Análise de Incertezas

I.B De Paula

- Um bom experimentalista deve fazer todo o esforço possível para minimizar os erros de seu experimento. Cabe ao experimentalista a responsabilidade de apresentar uma medida da confiabilidade de seus dados.

- Vamos definir erro como sendo:

  a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro de uma grandeza.Normalmente não se conhece o valor verdadeiro de uma grandeza, o que torna esta definição difícil de ser aplicada.

- Podemos então definir o conceito de incerteza:

  Incerteza experimental é um valor possível que o erro pode assumir. Define uma faixa onde se estima estar localizado o valor da grandeza medida (dentro de um determinado nível de probabilidade).

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢Em geral o resultado de uma medição é apenas uma estimativa do valor verdadeiro de uma grandeza física. Sendo assim, o resultado da medição só é completo quando acompanhado do valor de incerteza.

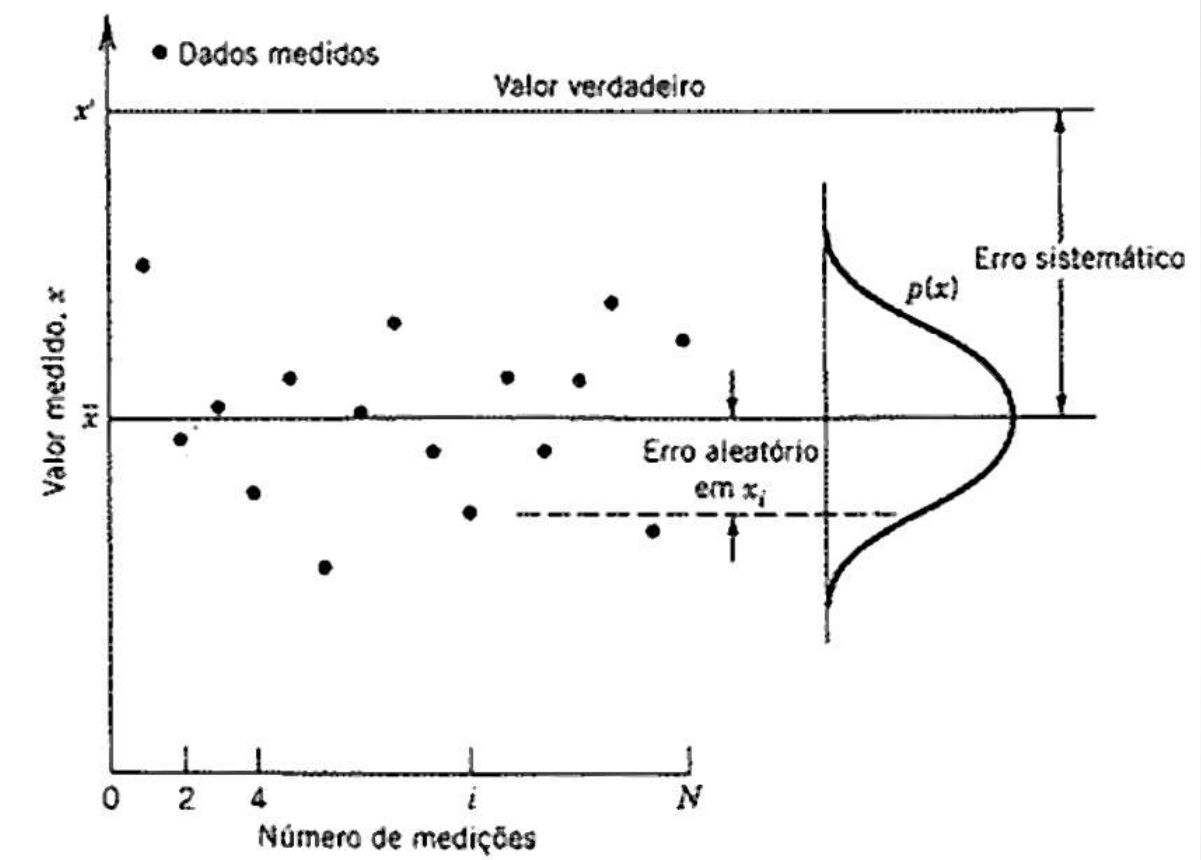
➢Para chegarmos a um método de descrição das incertezas nas variáveis, precisamos conhecer a natureza das incertezas. Podemos classificar as incertezas experimentais em:

- incertezas aleatórias: são incertezas que fazem com que medidas repetidas apresentem valores diferentes.

- incertezas sistemáticas: são incertezas que fazem com que medidas repetidas apresentem aproximadamente o mesmo desvio (positivo ou negativo) sem razão aparente (se a razão fosse conhecida uma correção poderia ser feita).

Análise de Incertezas

I.B De Paula



- ➢Cabe ao experimentalista identificar as fontes de incerteza sistemáticas e implementar correções adequadas.
- ➢As incertezas aleatórias não podem ser corrigidas.

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- A partir de uma análise estatística do conjunto de dados podemos estimar o valor de real de x' como sendo:

$$x' = \bar{x} \pm u_x \qquad (P\%)$$

Onde $\bar{x}$ representa a estimativa média das amostras e u_x representa o intervalo de incerteza dessa estimativa para um determinado nível de probabilidade (*P%*).

- A análise de incerteza é o método utilizado para quantificar o termo u_x.

- As ferramentas estatísticas comuns, que são utilizadas na maioria dos textos de engenharia para quantificar a incerteza de uma medição, devem ser usadas após a identificação e eliminação das componentes de incerteza sistemáticas.

Análise de Incertezas

➢Muitos autores assumem a distribuição das incertezas aleatórias como sendo Gaussiana.

➢Isto de fato ocorre na maioria das propriedades físicas que são contínuas ou regulares no tempo ou no espaço onde as variações são devidas a erros aleatórios.

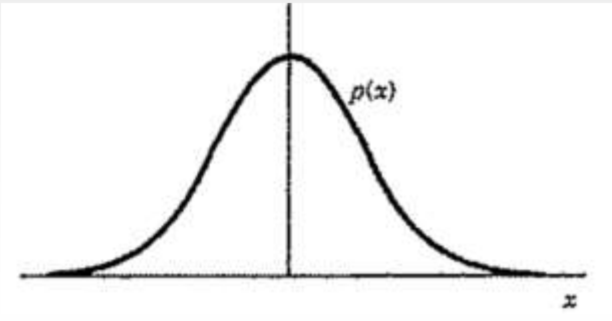
➢A construção de histogramas ou funções de densidade de probabilidade (PDF's) ajudam a identificar a distribuição estatística que melhor representa os dados medidos.

Análise de Incertezas

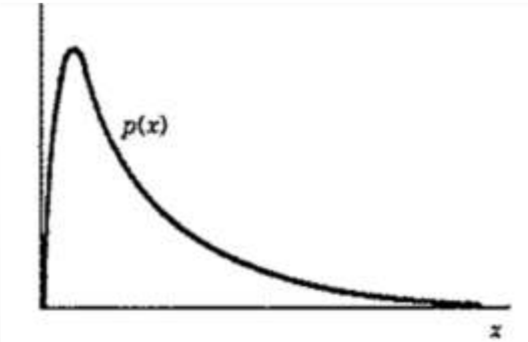
I.B De Paula

- Ex. distribuições estatísticas e relação com as medições

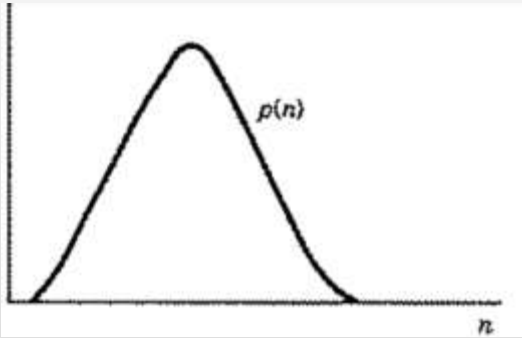
  - **Normal:** Maioria dos casos. Variações devido a erro aleatório



  - **LogNormal:** Falha ou projeções de durabilidade. Eventos tendem a ser distorcidos na extremidade da distribuição.



  - **Binomial:** comum em situações que envolvem somente duas possibilidades. Ex.: Cara/Coroa



Análise de Incertezas

I.B De Paula

Ex. **Distribuição Normal**

➢No caso da distribuição normal com média μ e desvio padrão σ a probabilidade de que o valor da observação aleatória seja x é dado pela equação:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]}$$

➢Onde

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx; \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x)dx;$$

➢Observa-se que somente com os valores da média e do desvio padrão é possível construir a distribuição.

Análise de Incertezas

I.B De Paula

Ex. **Distribuição Normal**

➢No caso de amostras finitas uma estimativa para a média é dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

onde N é o número de amostras

➢Já a estimativa do desvio padrão para amostras finitas é dada por:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\ ; \quad \text{para N grande } (>30)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\ ; \quad \text{para N pequeno}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

Ex. **Distribuição Normal**

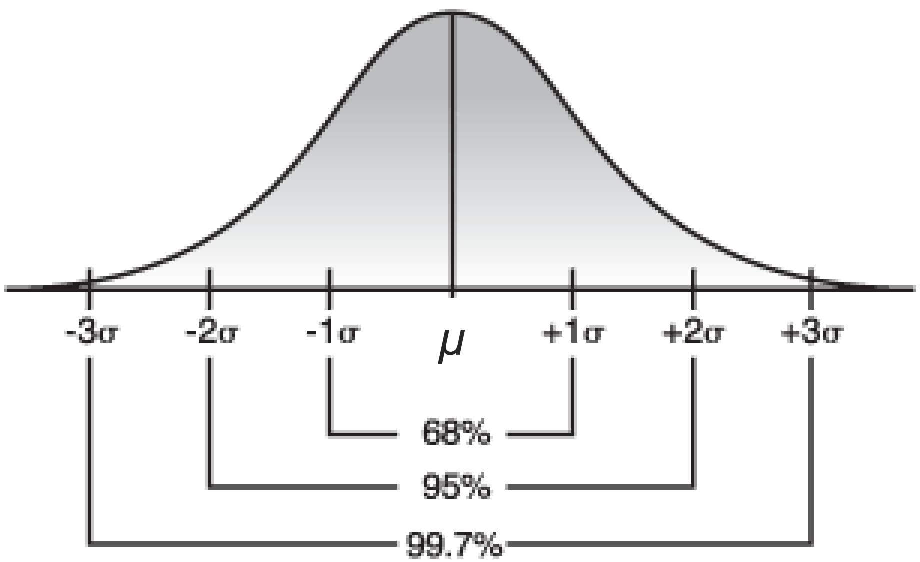
➢Para uma distribuição normal de média μ desvio padrão σ, temos que a probabilidade de uma medida x estar compreendida em uma certa faixa $\pm x_1$ da média é:

$$p = \int_{\bar{x}-x_1}^{\bar{x}+x_1} \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]} dx$$

➢p/ x_1= ± 1σ; p=0.683

➢p/ x_1= ± 2σ; p=0.954

➢p/ x_1= ± 3σ; p=0.997



Análise de Incertezas

I.B De Paula

- Com o conhecimento da natureza das incertezas e das ferramentas estatísticas usadas para estimar alguns componentes dessa incerteza, prosseguimos para a estimação da incerteza da medição.

- Alguns termos específicos devem ser definidos aqui para facilitar a exposição do tema. As definições seguem o Guia para Expressão de Incerteza de Medição. (ver *www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/gum_final.pdf*)

  - **Incerteza Padrão:** Incerteza da medição, expressa sob a forma de 1 desvio padrão (± 1σ)

  - **Incerteza Padrão Combinada:** Incerteza padrão de uma medição que envolve mais de uma incertezas. Ex.: Media de medições com paquímetro: Incerteza das medições e incerteza do instrumento.

Análise de Incertezas

- **Incerteza expandida:** quantidade que define um intervalo em torno do resultado de uma medição com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando

Obs: A fração pode ser vista como a probabilidade de abrangência ou nível da confiança do intervalo.

- **Fator de abrangência:** fator numérico usado como multiplicador da incerteza padrão combinada para se obter a incerteza expandida. k define o nível de confiança da incerteza. Ex.: $k_{Dist\_Normal}(95\%)=2$

$$u_{\exp} = k \times u_{padrão}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- **<u>Incerteza do tipo A:</u>** obtida a partir de um conjunto de amostras, usando estimadores amostrais para a média e para o desvio padrão.

  As análises baseadas nas distribuições estatísticas apresentadas anteriormente se aplicam a incertezas do tipo A.

- **<u>Incerteza do tipo B:</u>** obtida por qualquer outro meio, tal como informação prévia fornecida pelo fabricante; aproximações conservadoras baseadas em experiência prévia com instrumentos similares; modelo matemático formal do processo de medição específico como um processo estocástico, valores da bibliografia, etc.

Análise de Incertezas

- **<u>Incerteza do tipo A:</u>** Considerando uma amostra finita, que contém medidas de um instrumento que segue uma distribuição Gaussiana de probabilidades.
- Seria correto usar k = 2 para conseguir uma probabilidade de abrangência de 95% para um caso em foram amostrados apenas 5 dados (N=5) para se estimar o desvio padrão?
- E poderíamos usar k = 2 para conseguir uma probabilidade de abrangência de 95% para outro caso onde foram utilizadas 5000 amostras para se estimar o desvio padrão?

Ex. **Distribuição t-Student**

- Em casos onde o número de amostras é restrito e o desvio padrão da população é desconhecido, utiliza-se a distribuição t-Student para se estimar o fator de abrangência (k).

- A medida que o número de dados (Graus Liberdade=N-1) aumenta a distribuição tende para a normal.

Tabela resumida de fator de abrangência (p=95%) com o número de graus de liberdade para uma distribuição t-Student.

Graus Liberdade	1	2	3	4	5	6
k	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52

Graus Liberdade	7	8	10	20	50	inf
k	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2

Análise de Incertezas

I.B De Paula

Incerteza do tipo B:

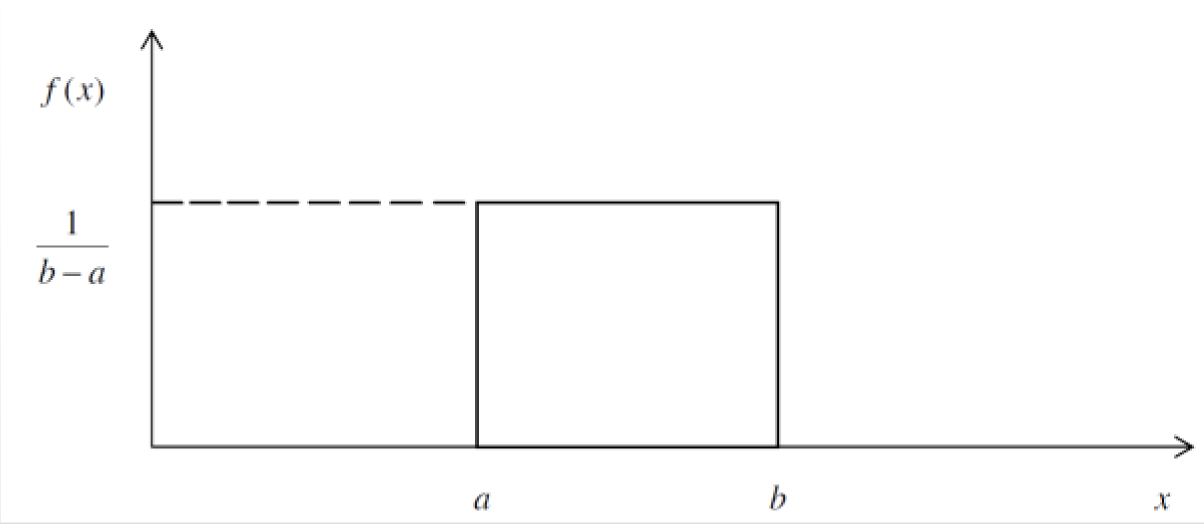
- O uso adequado do conjunto de informações disponíveis para uma avaliação da incerteza-padrão do Tipo B, exige discernimento baseado na experiência e no conhecimento geral, habilidade que pode ser aprendida com a prática.
- Quando é possível inferir a distribuição de probabilidades pelo certificado/manual do instrumento, a incerteza padrão pode ser obtida com as equações daquela distribuição.
- Ex: Manual diz que incerteza do instrumento é de1% do fundo de escala, com 95% de confiabilidade (fator de abrangência de 2).
  ->Fator de abrangência 2 para 95% de confiabilidade equivale a distribuição normal. Logo a incerteza padrão é 1%/2

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- Se apenas forem conhecidos ou puderem ser estimados os limites inferior ou superior da distribuição, admite-se uma distribuição retangular para a grandeza de influência.
- É comum associar esse tipo de distribuição a **Incertezas do tipo B**, pois se sabe que a variável está limitada a um intervalo finito, mas não há razão para atribuir uma probabilidade diferenciada para regiões dentro desse intervalo. Ex.: valor indicado por um instrumento de resolução finita (e.g.Voltímetro digital)

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|b-a|} & p/\ a \le x < b \\ 0 & resto \end{cases}$$



Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢No caso da distribuição retangular a média e o desvio padrão são obtidos por:

$$\mu = \int_a^b xP(x)dx; \qquad \sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 P(x)dx;$$

Resolvendo

$$\mu = \int_a^b x\frac{1}{(b-a)}dx; \qquad \sigma^2 = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{(b-a)}dx;$$

$$\mu = \frac{(b+a)}{2}; \qquad \sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} \rightarrow se - a = b \rightarrow \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 1:** A especificação de resolução fornecida pelo fabricante para um dado instrumento é de ±1% da leitura.

Como nenhuma informação adicional é fornecida, pode-se admitir que qualquer valor do erro dentro desses limites é igualmente provável (distribuição retangular).

Logo:

$$u_{padrão} = \pm \frac{1\%}{\sqrt{3}}$$

➢**Exemplo 2:** O certificado de calibração de um instrumento indica uma incerteza de ±0.1% das medições, na faixa de medição do instrumento, para um nível de confiança 95%.

Isso equivale a dizer que o fator de abrangência k= 2 para uma distribuição normal. Logo a incerteza padrão fica:

$$u_{padrão} = \pm \frac{0,1\%}{2} = \pm 0.05\%$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 3:** Uma sequencia de leituras de um multímetro digital foram todas iguais.

A incerteza dessa medição não pode ser zero, dado que existe uma limitação de leitura da variação do sinal devido a resolução do instrumento.
Considerando a resolução do instrumento como sendo r, pode-se assumir uma distribuição retangular com limites ±r/2.

Logo a incerteza padrão fica:

$$u_{padrão} = \pm \frac{(r/2)}{\sqrt{3}} = \pm \frac{r}{\sqrt{12}}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢ **Propagação de Incertezas**

Agora que sabemos como estimar a faixa de incerteza para uma variável individual, precisamos avaliar como estas incertezas se propagam em um resultado. Suponha que um resultado Y é função de n grandezas de entrada X_1, X_2, X_3,... X_n, por meio da função :

$$Y = F\left(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\right)$$

Desenvolvendo F em série de Taylor de 1ª ordem para variações em torno da médias de X_i e Y.

$$Y - \overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}\left(X_i - \overline{X}\right)$$

Onde *∂F/ ∂X* é chamado de coeficiente de sensibilidade do resultado y às grandezas de entrada X

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢Propagação de Incertezas

Fazendo o quadrado da expansão de Taylor

$$\left(Y-\overline{Y}\right)^2=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_i}\left(X_i-\overline{X}\right)\right]^2$$

Como a variância (s^2) é dada pelo quadrado da diferença, podemos expandir a equação:

$$s_y^{\ 2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}s_{X_i}\right)^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{\partial F}{\partial X_j}s_{X_i}s_{X_j}cc_{ij}$$

Onde cc_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i e X_j.

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢ **<u>Propagação de Incertezas</u>**

Quando as grandezas de entrada X não têm correlação cc_{ij} =0

$$s_y{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} s_{X_i} \right)^2$$

Usando essa expressão (ou a anterior no caso de grandezas relacionadas), é possível fazer a combinação de incertezas. No caso de amostras finitas temos a expressão fica:

$$u_y{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} u_{X_i} \right)^2$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- **Exemplo 4:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

Suponha que as seguintes medidas foram realizadas, com 95% de confiança:

$\Delta P = 2 \pm 0.03\text{kPa}$; $\rho = 1.2 \pm 0.05\text{kg/m}^3$;

Aplicando a expressão de propagação das incertezas

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial(\Delta P)} u_{\Delta P}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} u_\rho\right)^2}$$

As derivadas parciais (coef. de sensibilidade) são obtidas de forma analítica

$$\frac{\partial V}{\partial(\Delta P)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\rho\Delta P}\right)^{1/2} \qquad \frac{\partial V}{\partial(\Delta P)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta P}{\rho^3}\right)^{1/2}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 4:** Tubo de Pitot: $V=\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

As incertezas padrão das medições ficam(k=2):

$u_{\Delta P}$=±0.03/2=±0.015kPa; u_ρ=± 0.1/2=0.025kg/m^3

Substituindo:

$$u_V=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\Delta P\rho}}u_{\Delta P}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho^3}}u_\rho\right)^2}$$

$$u_V=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2000\cdot 1.2}}\cdot 15\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\cdot 2000}{1.2^3}}\cdot 0.025\right)^2}$$

$$\boxed{u_V=\sqrt{0.0469+0.6014}=0.81m/s}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- **Exemplo 4:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

Logo a velocidade pode ser expressa, com 95% de confiabilidade como sendo (k=2):

$$V = V + k^{*}u_V = 57 \pm 1.6 \text{ m/s}$$

As contribuições de cada parâmetro da incerteza da velocidade são:

$$u_{\Delta P}{}^2 = 0.0469$$

$$u_{\rho}{}^2 = 0.6014$$

Podemos observar que a maior contribuição vêm da incerteza na medição da massa específica do gás.

Logo, se quisermos melhorar a incerteza da velocidade seria melhor investir na medição da massa específica

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 5:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

As seguintes medidas foram feitas:
N= 19 amostras para T e ΔP,
e N=5 para P

➢Com os seguintes instrumentos:

•Medidor de pressão diferencial
Incerteza de calibração 5Pa
com 95% de confiabilidade

•Termopar com resolução de 0.25°K

•Barômetro com resolução
de 0.13kPa (1mmHg)

Pressão (kPa)	Temp (K)	ΔP (kPa)	
101.1	300.5	2.05	
100.4	300.2	2.04	
101.4	300.4	2.05	
99.7	300.5	2.03	
100.9	300	2.04	
	300.4	2.05	
	300.2	2.05	
	300.3	2.04	
	300.5	2.03	
	300.1	2.02	
	300	2.05	
	300.4	2.04	
	300.5	2.05	
	300.5	2.05	
	300.2	2.04	
	300.4	2.03	
	300.1	2.04	
	300.5	2.04	
	300.3	2.03	
100.7	**300.32**	**2.04**	**Média**
0.67	**0.18**	**0.01**	**Desvio-Padrao**

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- **Exemplo 5:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

1° Passo identificar incertezas

- Tipo A

Desvio padrão dos dados:

Manômetro=10Pa,
Termopar= 0.18K,
Barômetro= 670Pa

Desvio padrão das médias dos dados=desvio/ √N

$u_{\Delta P}$ =10/ √19 =2.3Pa
u_T = 0.18 √19 =0.0413K
u_P = 670√ 5=299.6Pa

- Tipo B

Incerteza dos instrumentos:

$u_{manometro}$ =5/2=2.5Pa

Assumindo distribuição retangular e usando-se a resolução como limites superior e inferior da distribuição, temos

$u_{Termopar}$ = ± 0.125/√3 =0.072K

$u_{Barometro}$ = ± 65/√3 =37.6Pa

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 5:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

2° Calcular os coeficientes de sensibilidade.

Assumindo que o fluido se comporta como um gás perfeito, $P/\rho = RT$

com R=cte=287Nm/Kg.K e incerteza desprezível. A equação da velocidade fica:

$$V = \sqrt{\frac{2\Delta PRT}{P}} = 59.1 m/s$$

Os coeficientes de sensibilidade ficam

$$\frac{\partial V}{\partial(\Delta P)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2RT}{P\Delta P}\right)^{1/2} = 0.0145$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta PR}{TP}\right)^{1/2} = 0.0984$$

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta PRT}{P^3}\right)^{1/2} = -2.934E-4$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 5:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

3° Aplicar a expressão de propagação de incertezas

$$u_V = \sqrt{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial V}{\partial(\Delta P)}u_{\Delta P}\right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial(\Delta P)}u_{Manometro}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial T}u_T\right)^2 \\ &+\left(\frac{\partial V}{\partial T}u_{Termopar}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P}u_P\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P}u_{Barômetro}\right)^2\end{aligned}}$$

$$u_V = \sqrt{\begin{aligned}&(0.0145\times 2.3)^2 + (0.0145\times 2.5)^2 \\ &+(0.0984\times 0.0413)^2 + (0.0984\times 0.072)^2 \\ &+(-2.934E-4\times 299.6)^2 + (-2.934E-4\times 37.6)^2\end{aligned}}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 5:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

3° Aplicar a expressão de propagação de incertezas

$$u_V = \sqrt{\begin{array}{l}1.112E-3+1.314E-3\\+1.652E-5+5.019E-4\\+7.727E-3+1.217E-4\end{array}}$$

$$\boxed{u_V = 0.1 m/s}$$

➢Uma vez que a Incerteza Padrão Combinada é resultado de muitas contribuições de incertezas, **como calcular o fator de abrangência?**

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- Se considerarmos que a distribuição de probabilidades do resultado será aproximadamente Gaussiana (t-Student), precisamos estimar o Número de Graus de Liberdade Efetivo associado a incerteza padrão combinada calculada.

- Isso irá possibilitar a determinação do fator de abrangência para uma dada probabilidade escolhida (consulta à tabela t-Student).

- Para calcular o número de graus de liberdade efetivo de uma combinação de incertezas provenientes de amostras com diferentes graus de liberdade, utiliza-se a fórmula de Welch-Satterhwaite (ver ISO-GUM08).

$$G.L_{effetivo} = \frac{{u_{Comb}}^{4}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N\_componentes\_incerteza} \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial X_i} u_{X_i}\right)^4}{G.L_i}}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- Obs.: As incertezas padrão do Tipo B, por definição, tem número infinito de graus de liberdade. Isto é, não precisam ser contabilizadas no denominador da expressão acima.

- Além disso, deve-se adotar o valor inteiro superior ao resultado dessa fórmula.

- **Voltando ao caso do exemplo 5:** Tubo de Pitot: $V = \sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}$

Tínhamos que os dados de incerteza do tipo A, eram:

$u_{\Delta P}$ =10/ √19 =2.3Pa; u_T = 0.18 √19 =0.0413K

u_P = 670√ 5=299.6Pa

e a incerteza combinada era: u_V=0.1m/s

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Voltando ao caso do exemplo 5:** Tubo de Pitot:

Tínhamos que os dados de incerteza do tipo A, eram:

$u_{\Delta P}$ =10/ √19 =2.3Pa;

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -2.934E-4$$

u_T = 0.18 √19 =0.0413K

u_P = 670√ 5=299.6Pa ;

$$\frac{\partial V}{\partial T} = 0.0984 \qquad \frac{\partial V}{\partial(\Delta P)} = 0.0145$$

u_V=0.1m/s

Usando a formula de Welch-Satterhwaite

$$G.L_{effetivo} = \frac{{u_V}^4}{\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \Delta P}u_{\Delta P}\right)^4}{G.L_{\Delta P}} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}u\right)_P^4}{G.L_P} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}u_T\right)^4}{G.L_T}\right]}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- **Voltando ao caso do exemplo 5:** Tubo de Pitot:

Tínhamos que os dados de incerteza do tipo A, eram:

$u_{\Delta P}$ =10/ √19 =2.3Pa;

u_T = 0.18 √19 =0.0413K

u_P = 670√ 5=299.6Pa ;

u_V=0.1m/s

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -2.934E-4$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = 0.0984 \qquad \frac{\partial V}{\partial (\Delta P)} = 0.0145$$

Usando a formula de Welch-Satterhwaite

$$G.L_{effetivo} = \frac{0.1^4}{\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{(0.0145\cdot 2.3)^4}{(19-1)} + \frac{(-2.934E-4\cdot 299.6)^4}{(5-1)} + \frac{(0.0984\cdot 0.0413)^4}{(19-1)}\right]}$$

$$\boxed{G.L_{effetivo} = 7.85 \approx 8}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Voltando ao caso do exemplo 5:** Tubo de Pitot:

Tínhamos que a incerteza padrão combinada era:

u_V=0.1m/s

Se quisermos expandir essa incerteza para um intervalo com 95% de confiança, podemos extrair o fator de abrangência utilizando a tabela t-Student para um número de graus de liberdade igual a 8.

Da tabela de t-Student para P=95% temos que: k=2.37

Logo a medida da velocidade pode ser expressa para um intervalo de 95% como sendo:

$$\boxed{V = 59.1 \mp 0.24 m/s}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢ **Sugestões para facilitar a análise:**

1. Calcular a incerteza padrão combinada relativa ao invés da absoluta:

$$\left(\frac{u_y}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{u_{X_i}}{y}\right)^2$$

Assim, a incerteza calculada será relativa a média de y. Além disso o termo

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{1}{y}$$

permite simplificações que facilitam o seu cálculo.

Ex.: Pitot

$$\frac{\partial V}{\partial(\Delta P)}\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{2RT}}{\cancel{P}\Delta P}\frac{\cancel{P}}{\cancel{2}\Delta P\cancel{RT}}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\Delta P}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢Sugestões para facilitar a análise:

2. Organizar os dados em uma tabela. Ex.:

Incerteza TIPO A									
Fonte de Incerteza	**Xi_médio**	**desvpad (Xi)**	**Distribuição**	**Divisor**	**coef_sens**	**u_p* coef_sens**	**(u_p* coef_sens)^2**	**(u_p* coef_sens)^4**	**G.L.**
Incerteza TIPO B									
Fonte de Incerteza	**Xi_médio**	**desvpad (Xi)**	**Distribuição**	**Divisor**	**coef_sens**	**u_p* coef_sens**	**(u_p* coef_sens)^2**	**(u_p* coef_sens)^4**	**G.L.**

Incerteza Combinada Padrão	
Graus de liberdade efetivos	
Fator de Abrangência (k)	
Incerteza Expandida	

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢Sugestões para facilitar a análise:

2. Organizar os dados em uma tabela. Ex. Pitot:

Incerteza TIPO A									
Fonte de Incerteza	**Xi_médio**	**desvpad (Xi)**	**N_amostras**	**Divisor**	**coef_sens**	**u_p* coef_sens**	**(u_p* coef_sens)^2**	**(u_p* coef_sens)^4**	**G.L.**
Desv_pad Manômetro	2040	10	19	4.36	1/2ΔP	0.000562293	3.16174E-07	9.9966E-14	18
Desv_pad Temperatura	300.32	0.18	19	4.36	1/2T	6.87514E-05	4.72675E-09	2.23422E-17	18
Desv_pad Barômetro	100700	670	5	2.24	-1/2P	-0.00148775	2.2134E-06	4.89916E-12	4

Incerteza TIPO B									
Fonte de Incerteza	**Xi_médio**	**incerteza (Xi)**	**Distribuição**	**Divisor**	**coef_sens**	**u_p* coef_sens**	**(u_p* coef_sens)^2**	**(u_p* coef_sens)^4**	**G.L.**
Calibração Manômetro	2040	5	Gaussiana	2	1/2ΔP	0.000612745	3.75457E-07	1.40968E-13	inf
Resolução Termopar	300.32	0.25	Retangular	1.7321	1/2T	0.000240306	5.77471E-08	3.33473E-15	inf
Resolução Barômetro	100700	130	Retangular	1.7321	-1/2P	-0.00037267	1.38882E-07	1.92883E-14	inf

Incerteza Combinada Padrão	0.001762496
Graus de liberdade efetivos	7.8
Fator de Abrangência (k)	2.37
Incerteza Expandida	**0.42%**

Análise de Incertezas

I.B De Paula

- **Rejeição de Dados:**
  - Algumas vezes uma certa medida de uma série parece desviar significativamente das outras medidas.
  - Neste caso, o experimentalista deve decidir se esta medição é o resultado de algum erro grosseiro cometido e deve, portanto, ser descartada.
  - Obviamente, caso seja possível, deve-se repetir os experimentos para confirmar o resultado duvidoso. Caso não seja possível repetir o experimento, seria interessante ter-se um critério que auxiliasse a decisão sobre a rejeição ou não de um determinado ponto experimental.
  - O Critério de Chauvenet para a rejeição de pontos ruins pode ser utilizado.

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢Rejeição de Dados:

➢O critério de *Chauvenet* estabelece que uma determinada leitura pode ser rejeitada se a probabilidade de obter um desvio particular em relação à média for menor que 1/(2N), onde N é o número de medições realizadas.

➢A probabilidade de um determinado desvio x – $\bar{x}$ ocorrer é dada por:

$$P(x) = \frac{1}{s(2\pi)^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{s^2}\right]}$$

onde $\bar{x}$ é a média e *s* o desvio padrão de uma amostra

➢Definindo o desvio de uma medida com suspeita de erro grosseiro como x_{susp}- $\bar{x}$, o máximo desvio aceitável para uma amostra de N pontos fica:

$$\frac{1}{2N} = \frac{1}{s(2\pi)^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{(d_{\max})^2}{s^2}\right]}$$

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢Rejeição de Dados:

➢O critério de *Chauvenet:*

$$\frac{1}{2N} = \frac{1}{s(2\pi)^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{(d_{max})^2}{s^2}\right]}$$

Caso d> d_{max}, o ponto em questão pode ser rejeitado.

A tabela ao lado apresenta valores para a razão entre o máximo desvio aceitável e o desvio padrão, para diferentes valores de N, obtidos da expressão acima.

N	Dmax/s
2	1,15
3	1,38
4	1,54
5	1,65
6	1,73
7	1,80
10	1,96
15	2,13
25	2,33
50	2,57
100	2,81
500	3,29
1000	3,48

➢Rejeição de Dados:

➢Para eliminar pontos ruins seguindo o critério de Chauvenet, procedemos da seguinte forma:

a) mede-se a variável um número N de vezes e estima-se a média e o desvio padrão da amostra.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\;; \quad \text{para N pequeno}$$

➢Rejeição de Dados:

b)calcula-se o desvio entre cada medida e a média dividindo-se o resultado pelo desvio padrão.

$$\frac{d_i}{s} = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

c) usando um número de leituras N, comparar o valor de d_i/s com d_{max}/s. Se for maior, rejeita-se o ponto e recalcula-se a média e o desvio.

O critério somente deve ser aplicado uma única vez à distribuição!

➢**Exemplo 6:** Considere os resultados na medição do comprimento de um corpo apresentados na tabela abaixo. Verifique se algum ponto pode ser rejeitado.

a)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 49.53$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0.495$$

Leitura	Comprimento (mm)
1	49.36
2	50.12
3	48.98
4	49.24
5	49.26
6	50.56
7	49.18
8	49.89
9	49.33
10	49.39

➢**Exemplo 6:** Considere os resultados na medição do comprimento de um corpo apresentados na tabela abaixo. Verifique se algum ponto pode ser rejeitado

b)

$$\frac{d_i}{s} = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

Leitura	*d=xi-media*	*|di/s|*
1	-0.171	0.345
2	0.589	1.189
3	-0.551	1.112
4	-0.291	0.587
5	-0.271	0.547
6	1.029	2.077
7	-0.351	0.708
8	0.359	0.725
9	-0.201	0.406
10	-0.141	0.285

Análise de Incertezas

I.B De Paula

➢**Exemplo 6:** Considere os resultados na medição do comprimento de um corpo apresentados na tabela abaixo. Verifique se algum ponto pode ser rejeitado

c) verifica-se que o desvio da leitura número 6 dividido pelo desvio padrão é o único que ultrapassa o valor de 1,96 estabelecido como o máximo desvio para uma amostra de 10 medidas, como pode ser verificado na tabela do critério de Chauvenet.
Assim, este ponto pode ser rejeitado. Recalculando-se a média e o desvio padrão obtém-s

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 49.42 \qquad s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0.359$$