

Introdução a instabilidade hidrodinâmica e transição laminar- turbulento em escoamentos

Igor Braga de Paula

Introdução a disciplina

- Dinâmica das aulas : Aulas Teóricas em sala
- Ao longo do curso serão apresentados alguns conceitos teóricos acerca da instabilidade de escoamentos. Conceitos de cálculo, vibrações, ondas e mecânica dos fluidos são um importante requisito para acompanhar as aulas. O objetivo é que ao final do curso o aluno tenha um conhecimento inicial básico acerca dos mecanismos físicos responsáveis pela instabilidade de escoamentos.
- Avaliação: Listas de exercícios e trabalhos
- Contato
Igor Braga de Paula
Sala 131L
Telefone: 3527-1168
igordepaula@puc-rio.br

Introdução a disciplina

- **Literatura sugerida:**
- BETCHOV, R.; CRIMINALE, W. O. *Stability of Parallel Flows*. Academic Press, 1967.
- BOIKO, A. V.; DOVGAL, A. V.; GREK, G.; KOZLOV, V. V. *Physics of Transitional Shear Flows*. Springer 2012.
- DRAZIN, P.G. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2002.
- DRAZIN, P. G.; REID, W.H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2004.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. Elsevier, 1987.
- LIGHTHILL, J. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 2001.
- MENDONÇA, M. T. M; MEDEIROS, M. A. F. *Estabilidade de escoamentos Laminares: Teoria Linear - Instabilidade Hidrodinâmica Não-Linear*. TURBULÊNCIA, Vol.2 - EPTT 2000, ABCM.
- SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill 1979.
- SCHIMID, P. J.; HENNINGSON, D. S. *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer, 2001.

Introdução a disciplina

- Conteúdo da disciplina (disponível on-line – SAU):

Guia para Aula de Métodos Experimentais em Termociências 2014- Pós Graduação

Nº Aula	Data	Tópico
1	14/03/17	Introdução a instabilidade hidrodinâmica
2	21/03/17	Continuação da introdução - Instabilidade de Taylor Couette com energia
	28/03/17	Congresso - JEM
3	04/04/17	Revisão de matemática
4	11/04/17	Oscilações forçadas e amortecidas - sistemas dinâmicos
5	18/04/17	Revisão de Equações diferenciais parciais
	25/04/17	Conceitos de ondas, impedância e admitância
6	02/05/17	Transmissão e reflexão - projeto de silencioso
7	09/05/17	Introdução ao estudo de instabilidade em fluidos - Equações de N-S linearizadas - Instabilidade de Kelvin Helmholtz
8	16/05/17	Instabilidade de Kelvin Helmholtz - Interpretação da solução. Análise Temporal/Espacial
9	23/05/17	Outros efeitos na instabilidade de K-H (ondas de águas rasas, capilares e de águas profundas)
10	30/05/17	Continuação - Instabilidade de Rayleigh Taylor, ruptura de jato e instabilidade de K-H
11	06/06/17	Instabilidade de Kelvin Helmholtz em dois fluidos (Barnea e Taitel)
12	13/06/17	Instabilidade invíscida de camada cisalhante
13	20/06/17	Teorema de Rayleigh e Fjørtoff
14	27/06/17	Camada limite - Orr Sommerfeld e Squire
15	04/07/17	Instabilidade Não linear equacionamento
16	11/07/17	Instabilidade Não linear - implicações e observações experimentais
17	18/07/17	Estágios avançados da transição e início da turbulência

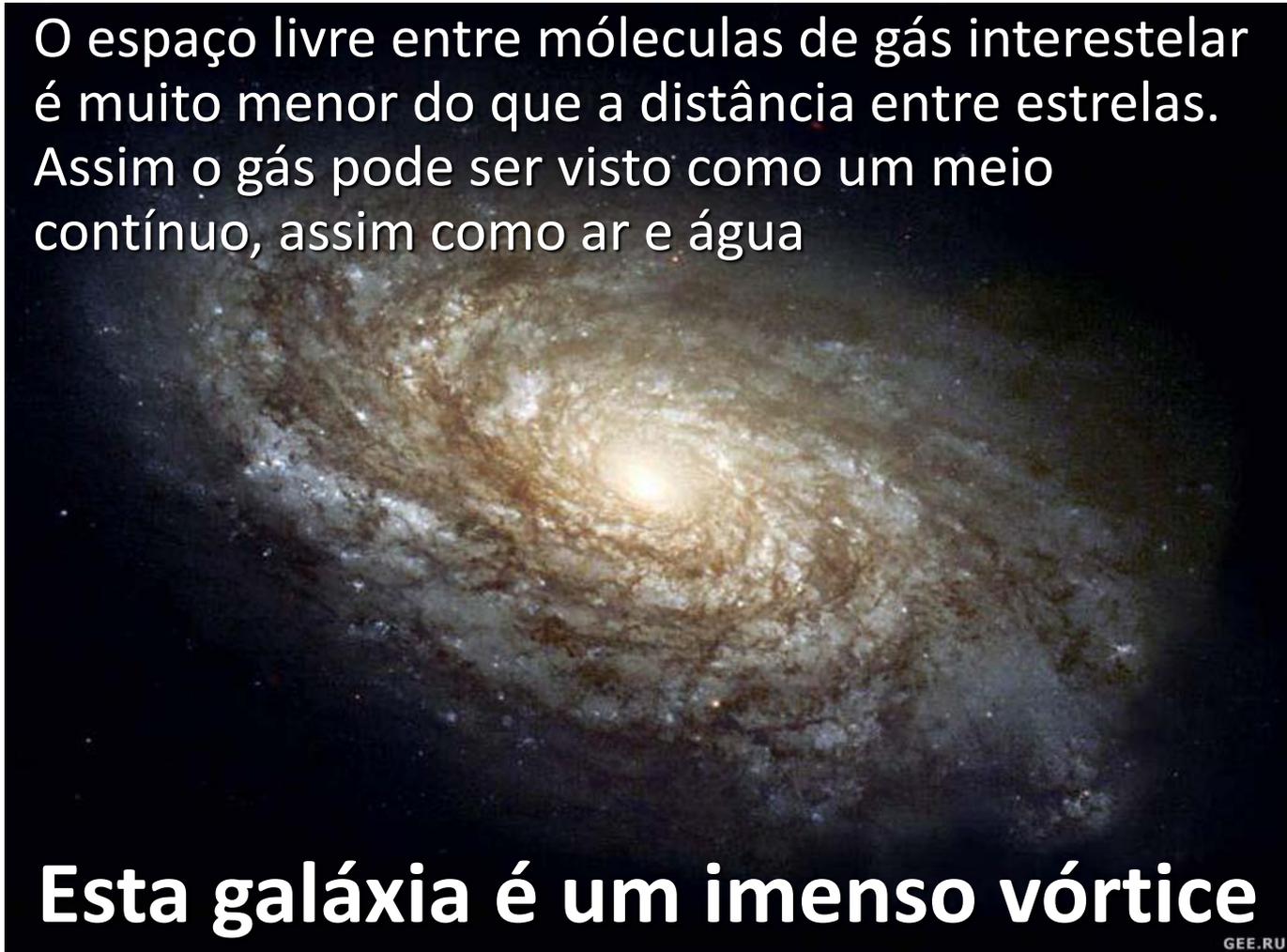
Introdução a disciplina

- O conteúdo e o calendário da disciplina podem sofrer algumas alterações dependendo de quantos alunos estiverem matriculados e da dinâmica das aulas.
- Área de Interesse dos alunos ?
- Se possível poderemos abordar casos mais interessantes para os alunos. (ex. instabilidade térmica, de escoamento bifásico ou de escoamentos rotativos).
- Para o início teremos uma introdução mais geral sobre o tema e a justificativa para esse tipo de estudo

Introdução (extraído aulas Yury Kachanov PUC-2014)

- Na visão de Kolmogorov, o universo é governado por turbulência.

O espaço livre entre moléculas de gás interestelar é muito menor do que a distância entre estrelas. Assim o gás pode ser visto como um meio contínuo, assim como ar e água



Esta galáxia é um imenso vórtice

Introdução – o que é Turbulência?

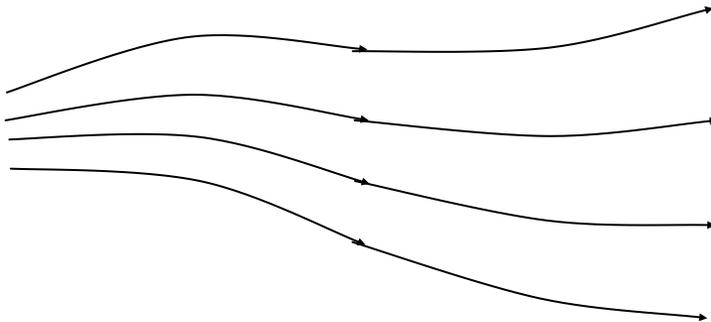
- Infelizmente, ainda não há uma resposta definitiva para essa questão (ao menos não uma única)
- Na literatura existem diversas definições.
- A palavra turbulência significa caótico. Esse conceito não é compartilhado por todos. Existem alguns pesquisadores que acreditam que há alguma ordem na turbulência.
- A palavra turbulência é utilizada para definir uma característica complexa de algum sistema

Introdução - Desafio

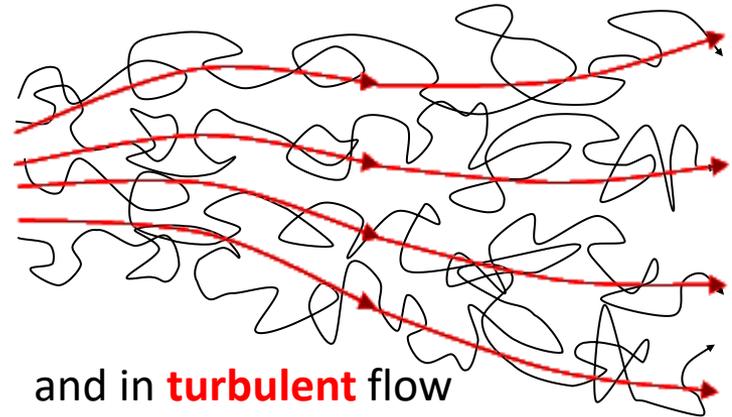
- O problema da turbulência e dos mecanismos envolvidos na dinâmica do escoamento ainda são questões não resolvidas e relevantes da mecânica dos fluidos moderna.
- Atualmente, a questão acerca dos mecanismos de regeneração da turbulência em escoamentos livres sobre superfícies é um dos principais desafios.
- A solução desse problema pode facilitar a criação de novos modelos, mais eficientes, e que permitam estimar com maior confiabilidade o comportamento de escoamentos turbulentos.

Porque turbulência é importante?

- Porque escoamentos turbulentos são extremamente difundidos na natureza.
- Escoamentos laminares representam uma exceção a regra



Particle trajectories in **laminar** flow



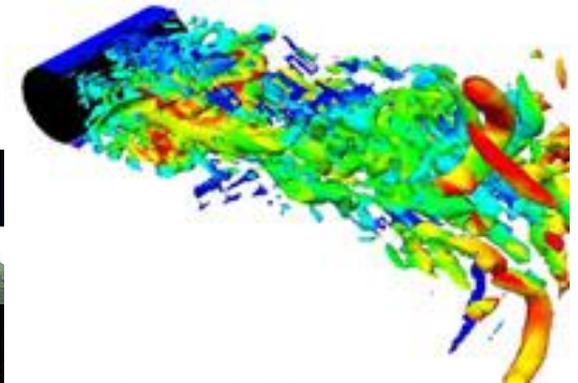
and in **turbulent** flow

Porque turbulência é importante?

Por exemplo, os seguintes escoamentos são tipicamente turbulentos

- Escoamentos atmosféricos
- Escoamentos em rios e oceanos
- Fotosfera do sol e outras estrelas, nuvens de gás
- Camadas limite sobre quase todos os veículos
- Maioria dos processos de combustão
- Maioria dos escoamentos em escoamentos naturais, transferência de calor, reações químicas
- Escoamentos de gases e líquidos em tubulações

,etc.



Influência do regime do escoamento

Importantes características do escoamento são afetadas pela mudança de regime laminar para turbulento:

**Todas são muito maiores
no regime turbulento**

- Arrasto viscoso
- Fluxo de Calor
- Fluxo de Massa
- Fluxo de quant.
de movimento

Engenheiros normalmente buscam:

Redução

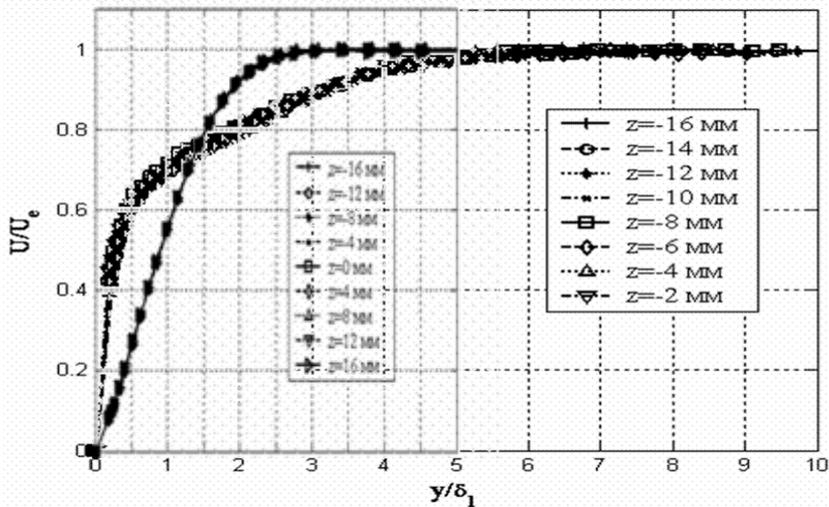
Redução em veículos hipersônicos
e aumento em trocadores de calor

Redução para fazer jatos longos ou aumento
para intensificar mistura (ex.: combustores)

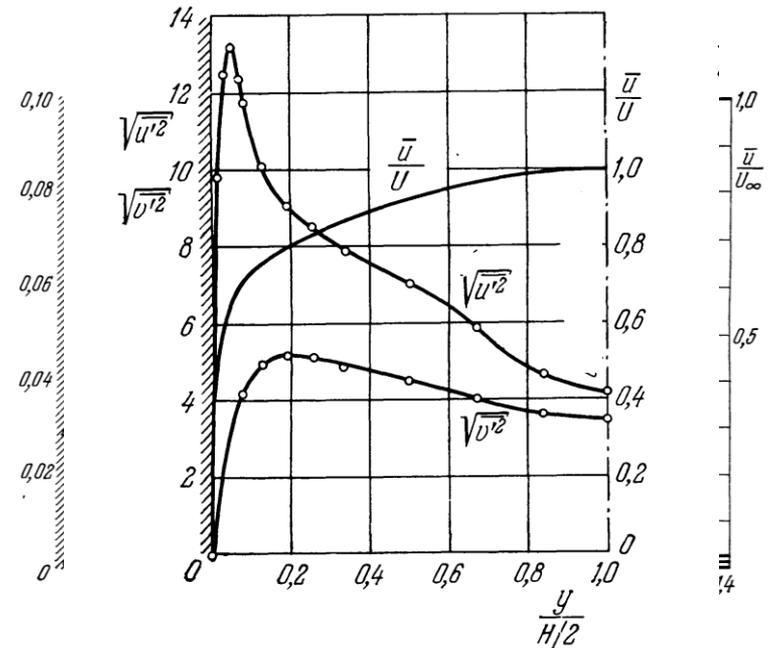
Redução para antecipar separação
ou aumento para atrasar separação

Influência do regime do escoamento

Comparação de perfis de velocidade média típicos de camada limite laminar e turbulenta



Perfil de intensidade turbulenta, típico de escoamento turbulento em canal

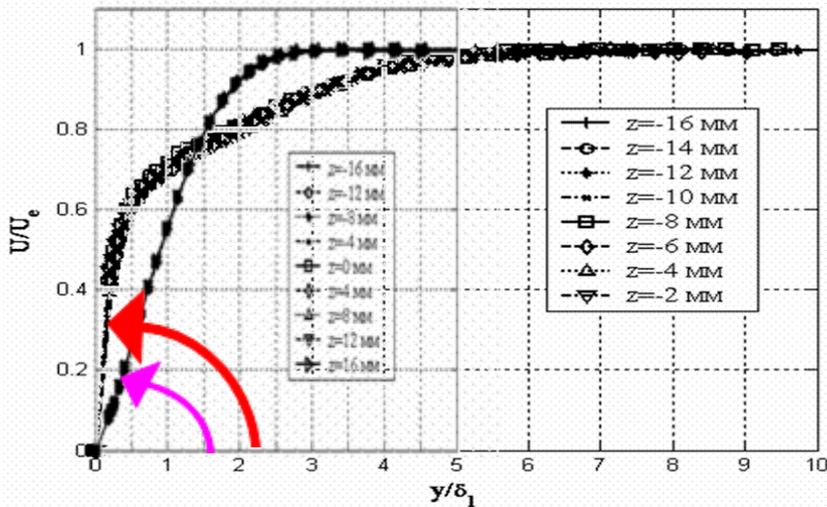


Borodulin, Kachanov, Roschectayev (2004)

Reihardt (1938)

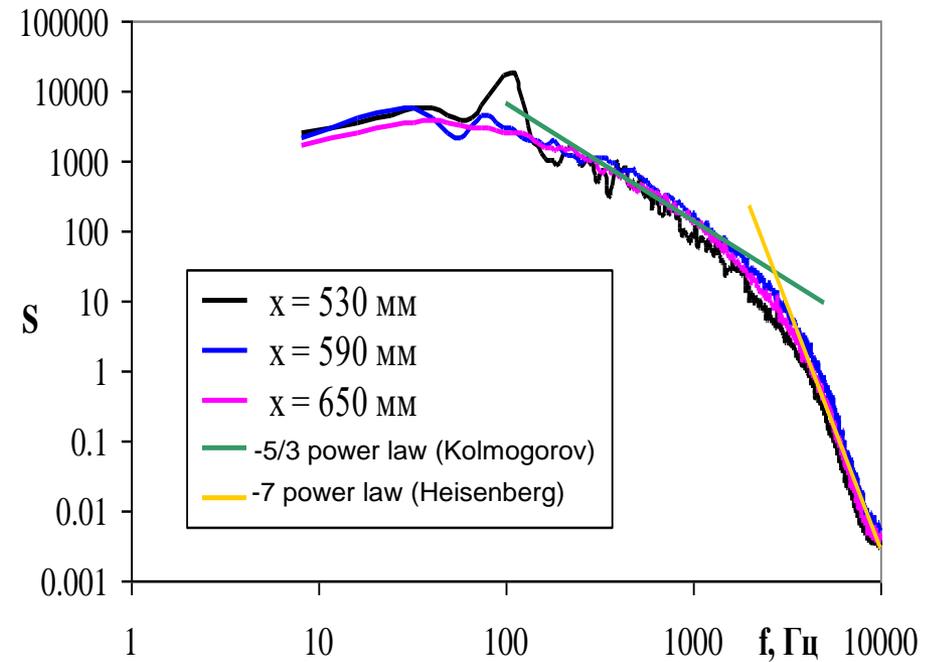
Influência do regime do escoamento

Comparação de perfis de velocidade média típicos de camada limite laminar e turbulenta



Derivada da velocidade média dU/dy na parede é muito maior no regime turbulento!

Espectro de frequências das flutuações de velocidade



Comparação com lei de potência de Kolmogorov (-5/3) e Heisenberg (-7)

Influência do regime do escoamento

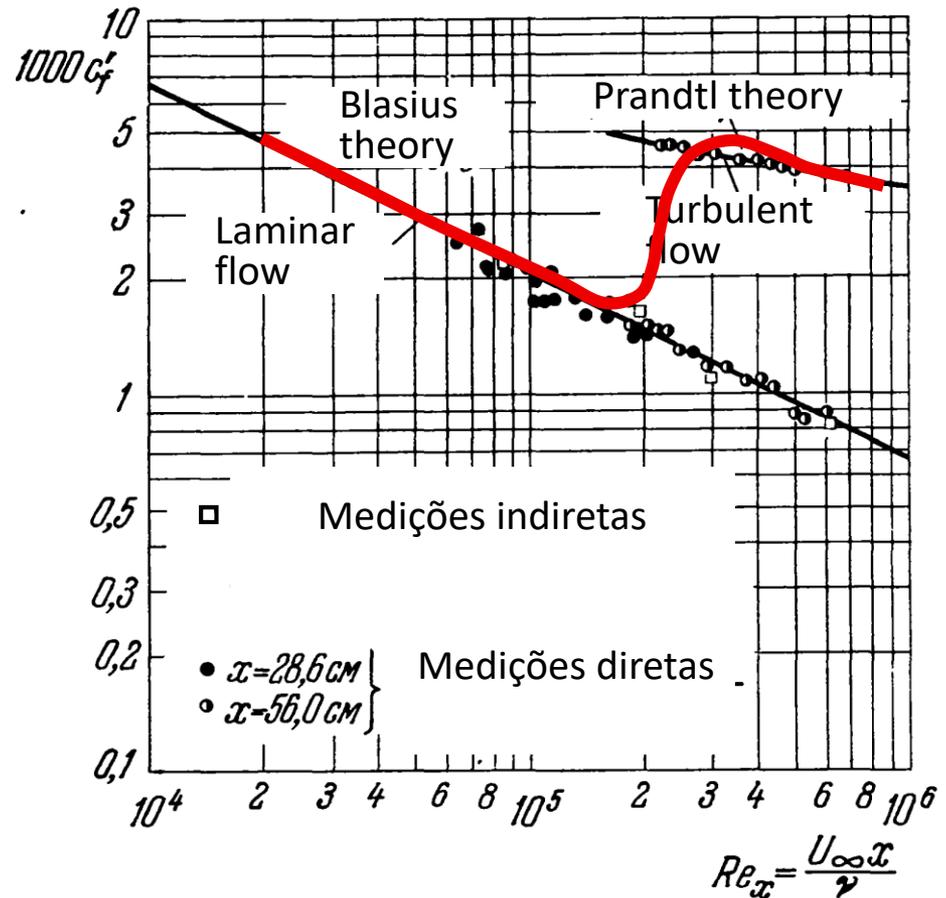
Coeficiente de atrito

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$c'_{f \text{ laminar}} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

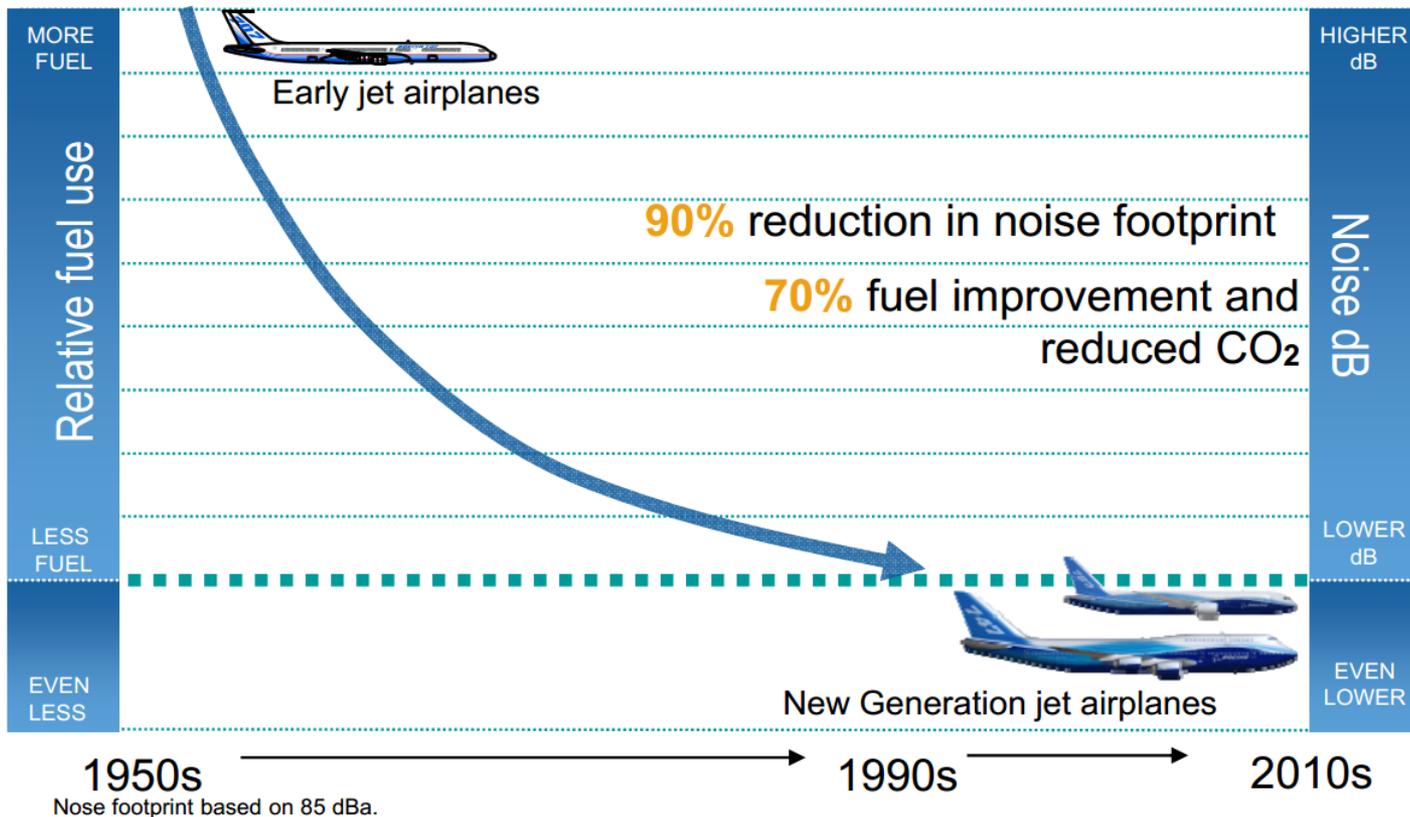
$$c'_{f \text{ turbulento}} = 0.0592 \text{Re}_x^{-1/5}$$

Coeficiente de arrasto de uma placa plana em regime de escoamento laminar e turbulento



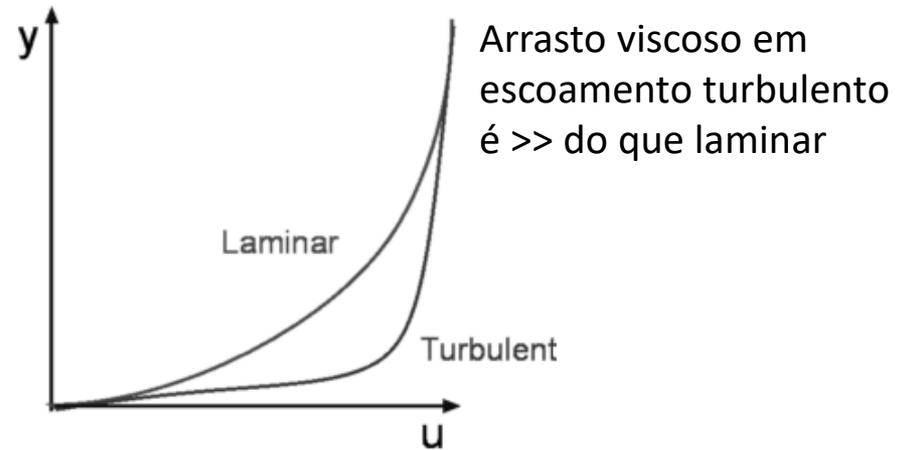
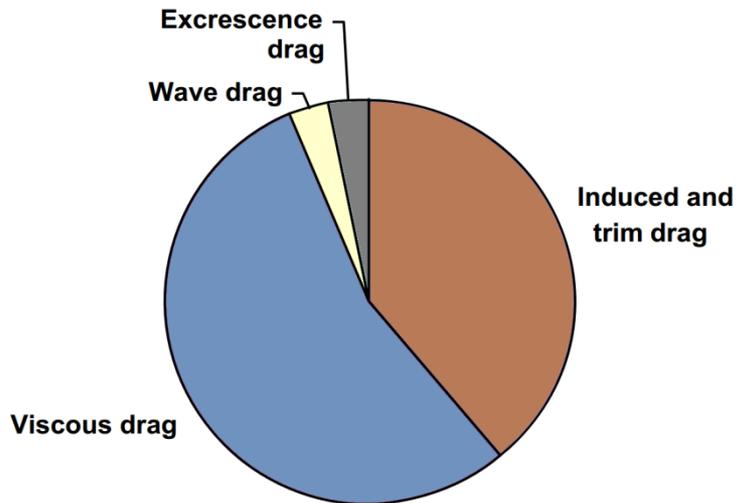
Ex.:Influência do regime do escoamento

- Evolução da redução do consumo de combustível e emissão de ruído em aeronaves comerciais (Goldhammer, 2011)



Ex.:Influência do regime do escoamento

- Contribuições das diferentes formas de arrasto no arrasto total de uma aeronave comercial (extraído de Goldhammer, 2011).



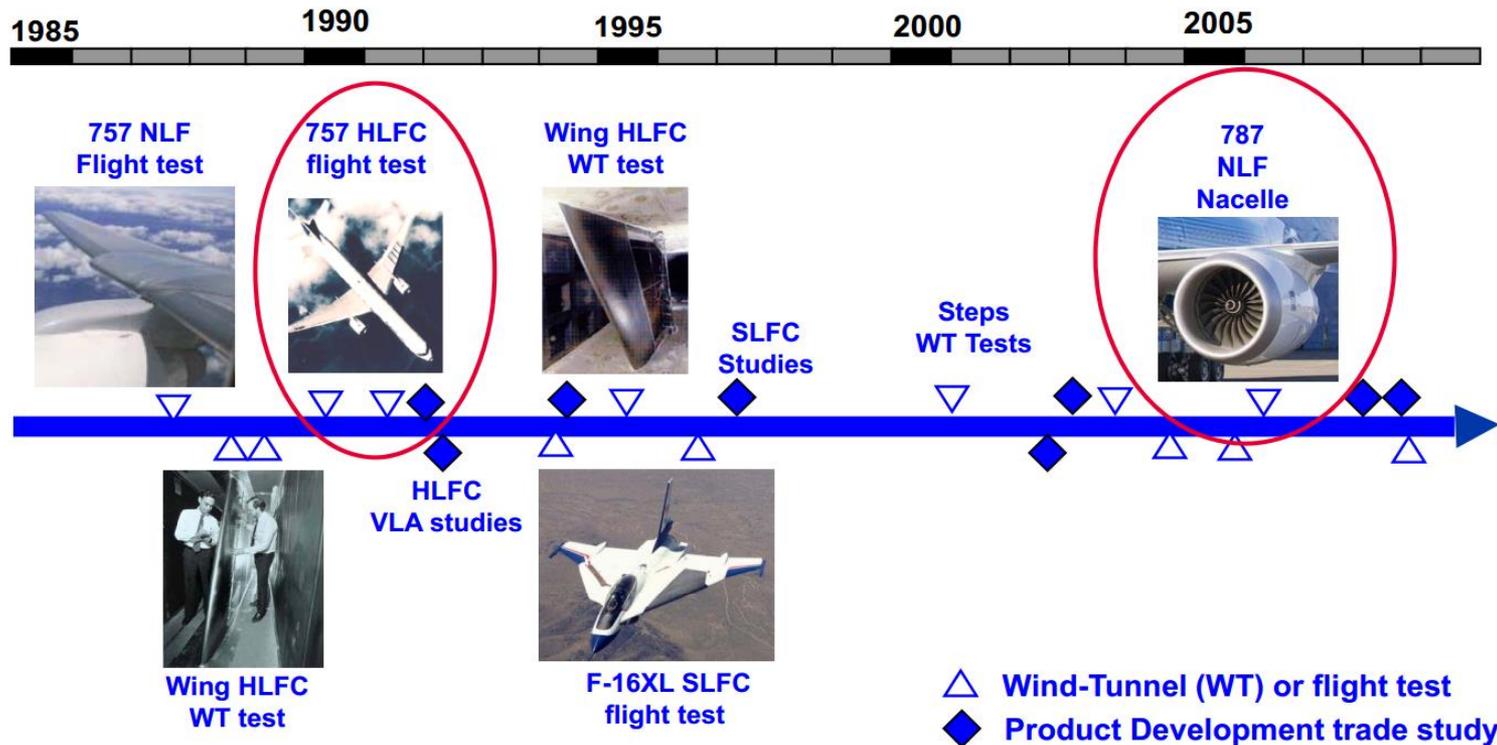
- O arrasto viscoso e o induzido pela sustentação são predominantes para aeronaves subsônicas em regime de cruzeiro.
- O arrasto viscoso é atualmente o componente do arrasto das aeronaves com maior potencial de redução (Goldhammer, 2011).
- A redução de arrasto por meio do atraso da transição é uma das poucas tecnologias disponíveis que podem melhorar significativamente a performance das aeronaves atuais (J. Crouch, AIAA 2008-3832)

Ex.:Influência do regime do escoamento

- IMPORTÂNCIA DA REDUÇÃO DE ARRASTO PARA A INDÚSTRIA AERONÁUTICA:
 - Arrasto é um dos principais itens responsáveis pela performance de uma aeronave.
 - Em torno de 22% do custo operacional direto (DOC) de uma aeronave corresponde a gastos com combustíveis (Reneaux, ECCOMAS 2004).
 - Em um A320 estima-se que uma redução de 1% no arrasto implica em um aumento de 1.5ton de carga útil ou 10 passageiros (Reneaux, ECCOMAS 2004).

Ex.:Influência do regime do escoamento

- Atividade de pesquisa visando soluções para manutenção do escoamento laminar ao longo de maiores extensões das aeronaves (extraído Goldhammer 2011).



Ex.:Influência do regime do escoamento



- Exemplos atuais de utilização da tecnologia no projeto aerofólios com longa extensão de escoamento laminar: Boeing 787 e Honda Jet.
- No caso do Boeing 787 a tecnologia também foi utilizada no projeto das Nacelles.

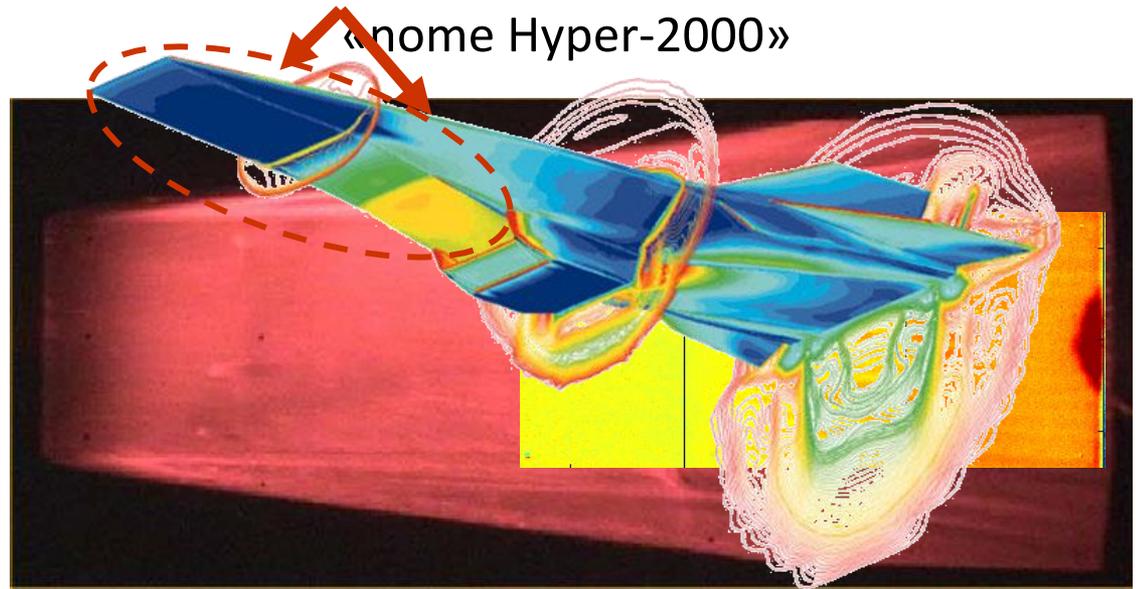
Ex.:Influência do regime do escoamento



Veículo hipersônico X-43A

Campo de escoamento calculado ($M = 7$)

Parte do nariz do modelo simulado
«nome Hyper-2000»



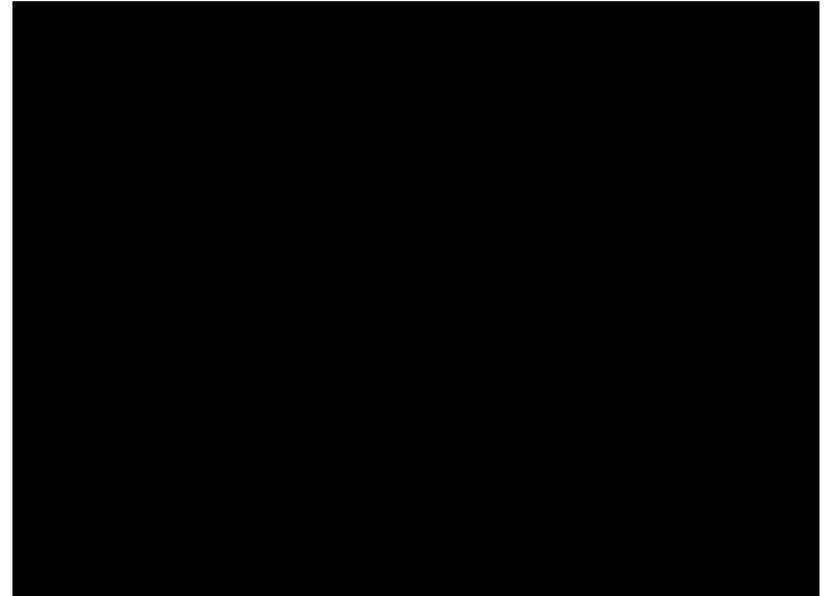
Visualização do escoamento em óleo ($M = 6$)

Porque ocorre mudança de regime?

- De acordo com o entendimento atual do problema, a transição do escoamento laminar para turbulento está quase sempre associada a um ou vários mecanismos de instabilidade do escoamento. Essas instabilidades normalmente advêm do escoamento base ou de perturbações sobrepostas ao escoamento.
- A origem dos mecanismos de instabilidade e a natureza física de cada mecanismo podem ser diferentes.
- As instabilidades podem ser lineares, não lineares, primárias, secundárias, etc.
- A transição do escoamento laminar para turbulento é um dos problemas mais complicados da mecânica dos fluidos moderna.

Transição laminar-turbulento

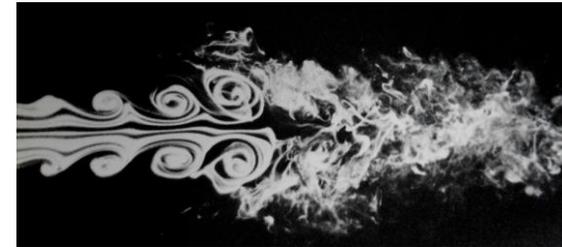
- Algumas das principais razões para a dificuldade do problema podem ser listadas abaixo:
- O problema envolve ,essencialmente, múltiplos estágios.
- As considerações e o objeto de estudo são diferentes nos vários estágios (perturbações externas, instabilidades do escoamento base, vórtices.)
- Em geral o fenômeno é essencialmente não linear
- Há uma mistura de escalas de tempo, espaço e amplitude das perturbações



CONCEITOS FUNDAMENTAIS

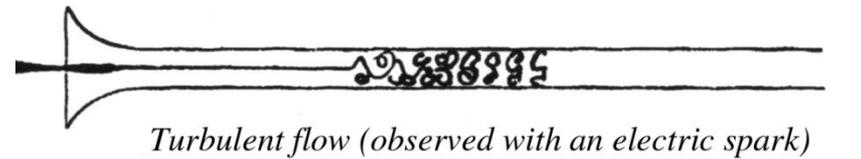
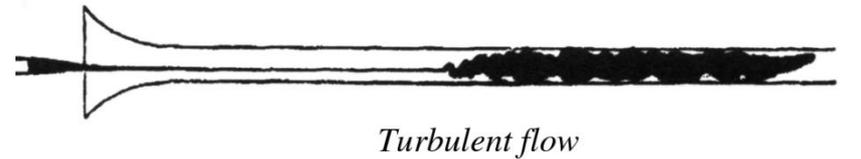
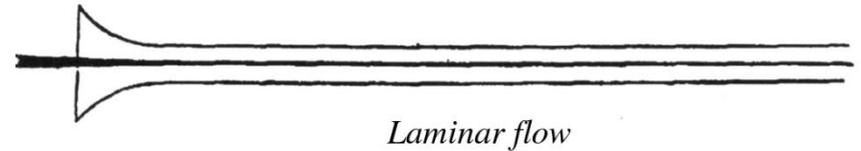
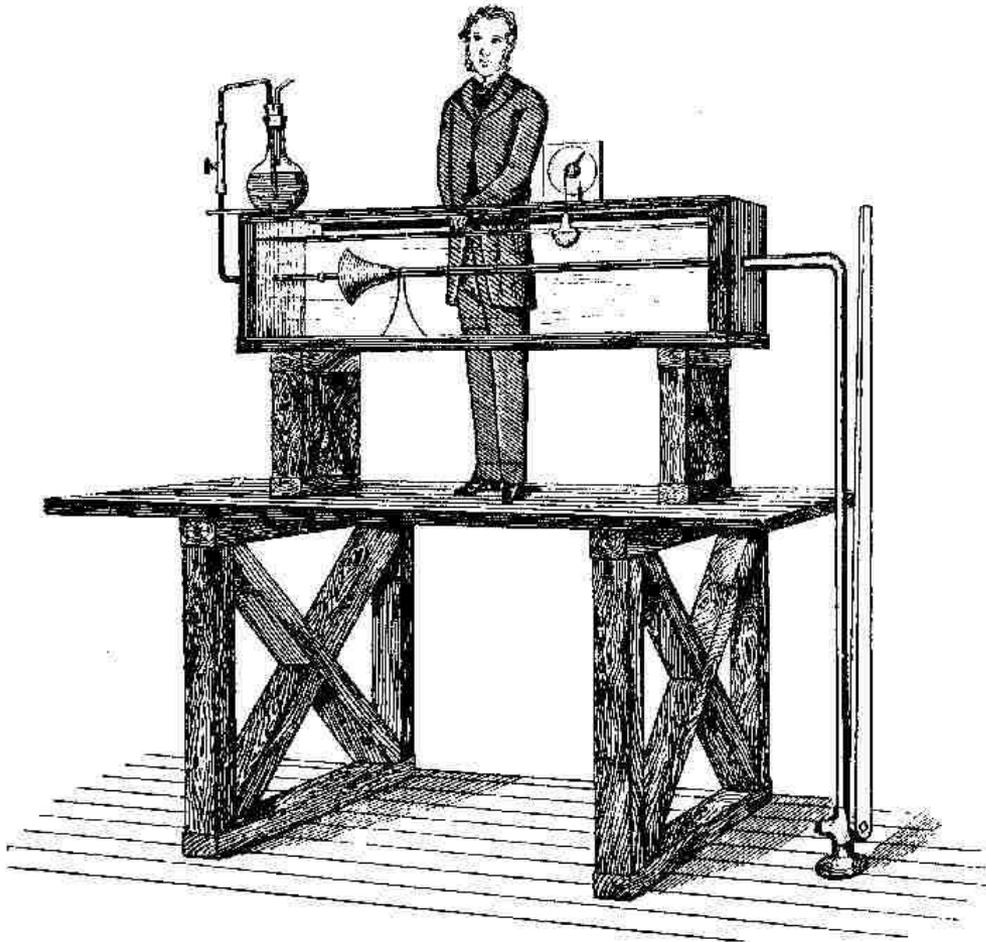
Conceitos iniciais

- A instabilidade de escoamentos é uma parte importante da mecânica dos fluidos.
- Frequentemente observa-se um estágio inicial e um final dos escoamentos. A instabilidade pode ser o caminho que conduz de um estágio ao outro.
- Alguns dos problemas mais conhecidos da instabilidade hidrodinâmica foram formulados no século XIX, por Helmholtz, Kelvin, Rayleigh e Reynolds.
- O experimento conduzido por Osbourne Reynolds em 1883 ilustra muito bem o mecanismo da instabilidade do escoamento em um tubo.



Primeiras investigações

- Experimento de Reynolds (1883)



Primeiras investigações

- Experimento de Reynolds (1883)
- A idéia de Reynolds era de visualizar o escoamento através de uma linha de tinta.
- Ele utilizou 3 diâmetros de tubos diferentes e observou que o comportamento da linha de tinta era alterado de acordo com:
 - V = velocidade média no tubo [m/s]
 - r = raio do tubo [m]
 - ν = viscosidade da água [m²/s]
- Usando grupos adimensionais ele encontrou um adimensional que relaciona a variação do comportamento da linha de tinta com os parâmetros do escoamento:

$$K = Vr/\nu$$

(Somente em 1908 Sommerfeld atribuiu a esse parâmetro o nome *número de Reynolds*. Fonte Annual Rev. Fluid Mech. 1990)

Primeiras investigações

- Experimento de Reynolds (1883)
- Reynolds encontrou no seu estudo valores críticos para o adimensional criado por ele abaixo dos quais o escoamento era totalmente laminar.
- Esse é um objetivo comum no estudo da instabilidade de escoamentos. Tipicamente, busca-se compreender sob quais condições o escoamento deixa de ser estável.
- O valor crítico do adimensional encontrado nos experimentos de O. Reynolds foi aprox. 13000. Esse valor é muito maior do que àquele utilizado, atualmente, para estimar o regime de escoamento em um tubo. No entanto, de acordo com as notas de Reynolds (extraído de Drazin 2002):

“... The critical velocity was very sensitive to disturbance in the water before entering the tubes...”

Primeiras investigações

- Alguns trabalhos posteriores ao de Reynolds mostraram que, no caso de escoamentos com perturbações na entrada ou com rugosidade , o número de Re crítico pode chegar a 2000.
- Outros experimentos, porém, realizados em escoamentos pouco perturbados na entrada e com paredes polidas, mostraram que a transição pode ocorrer em números de Re da ordem de 10^5 ou mais.
- De acordo com *Eliahou et al, 1998* o experimento de Reynolds ainda carece de explicações para ser compreendido completamente.
- Apesar de não explicar completamente todos os mecanismos envolvidos no experimento de Re, a teoria de instabilidade hidrodinâmica permite compreender diversos aspectos do problema. A diferença entre Re_c é uma delas, mas existem outras.

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- **INTRODUÇÃO**

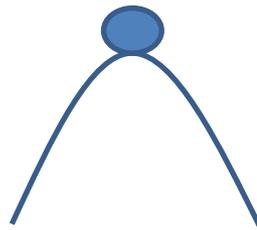
- Estudo da resposta de um escoamento a uma perturbação.
- Se o escoamento retorna a condição original ele é definido como estável, se as perturbações crescem e levam a outro regime é dito como instável.



estável



neutro

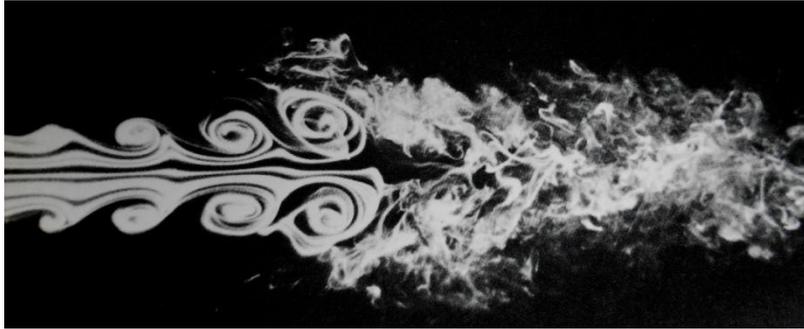


instável

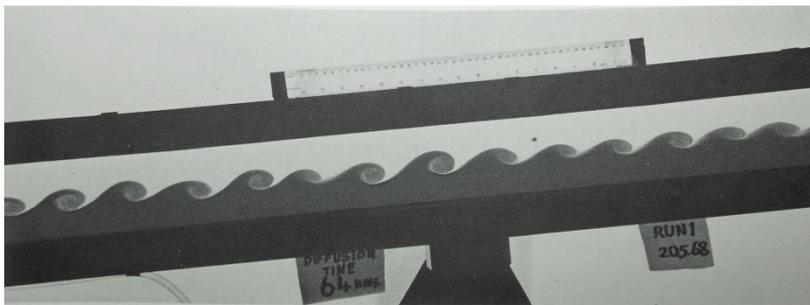


Condicionalmente estável

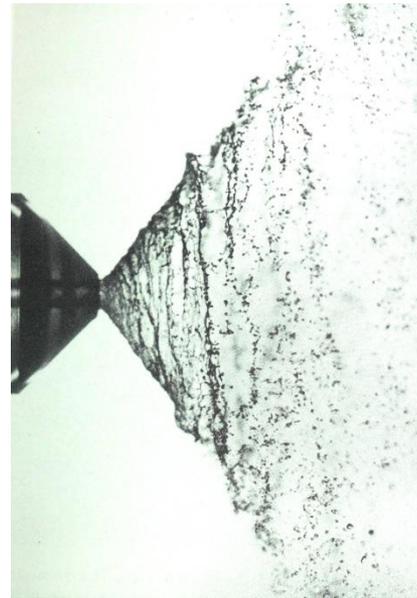
Exemplos:



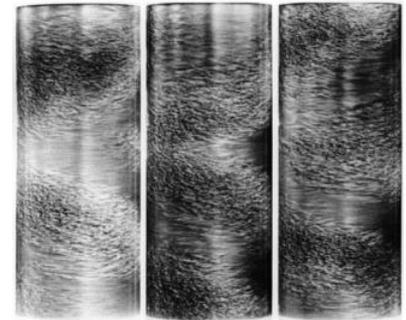
Instabilidade em jato laminar



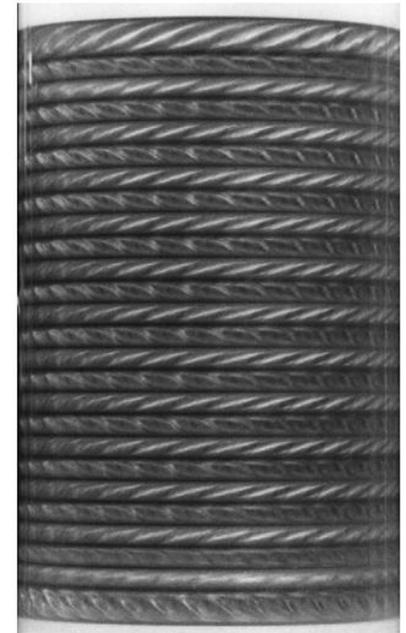
Instabilidade de Kelvin-Helmholtz em escoamento cisalhante



Instabilidade de em bocal



(a)



Instabilidade de Taylor-Couette

Exemplos:



Região de formação de escoamento turbulento
(Turbulent Spot)



Instabilidade gerada por convecção natural em
uma placa aquecida



Instabilidade em células de
Rayleigh Bénard

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- A formulação do problema não é muito difícil. Considerando um escoamento viscoso e incompressível, as equações de Navier-Stokes podem ser escritas na forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 U \quad (1)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2)$$

Onde $U = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, P é a pressão e Re o número de Reynolds.

- Para formular matematicamente o problema, é necessário definir um volume de controle \forall
- O escoamento base é assumido como laminar e representado pela solução $\bar{U}(x)$, $\bar{P}(x)$ das equações (1) e (2), que satisfazem as condições de contorno e supostamente dependem do vetor de posição espacial x e não do tempo t .

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- A análise da estabilidade do escoamento base é obtida assumindo que perturbações existem sobrepostas ao escoamento base:

$$U = \bar{U}(x) + u(x, t), \quad P = \bar{P}(x) + p(x, t) \quad (3)$$

E substituindo (3) em (1) e (2), além das condições de contorno do problema estudado.

- Como condição inicial, assume-se que as perturbações são iniciadas somente a partir do instante $t=0$. Assim pode-se chegar ao seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial t} + (\bar{U} + u) \cdot \nabla(\bar{U} + u) = -\nabla(\bar{P} + p) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\bar{U} + u) \quad (4)$$
$$\nabla \cdot (\bar{U} + u) = 0$$

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Sabe-se que $\bar{U}(x)$ e $\bar{P}(x)$ satisfazem a equação de N-S, logo:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{U} + \nabla \bar{P} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{U} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0$$

- De modo que os termos do escoamento base podem ser retirados da equação 4 sem prejuízo ao equacionamento. Assim a equação de N-S com as perturbações pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla u + u \cdot \nabla \bar{U} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad (5)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (6)$$

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Continuando do slide anterior

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla u + u \cdot \nabla \bar{U} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad (5)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (6)$$

Essas equações necessitam de condições iniciais e de contorno, que podem ser, por exemplo:

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (7)$$

nas fronteiras do volume de controle

$$u(x_{inicial}, t) = u(x_{final}, t) \quad \text{ou} \quad u(x_{inicial}, t) = u(x_{final}, t) = 0 \quad (8)$$

- A estabilidade do escoamento base é determinada pelo comportamento das soluções das eq. (5)-(8) para perturbações iniciais arbitrárias [$u_0(x)$]

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Para descrever o desenvolvimento de uma perturbação inicial $[u_0(x)]$ temos que primeiro definir uma medida para esse termo.
- Na maioria dos casos a energia cinética é a escolha natural. A energia cinética de uma perturbação contida no volume de controle \forall pode ser definida por:

$$E_{\forall} = \frac{1}{2} \rho \int_{\forall} |u|^2 \partial\forall$$

- Com base na definição de energia cinética das perturbações Joseph (1976) definiu 4 conceitos acerca da estabilidade de escoamentos.
 1. **Estabilidade:** A solução de u para as equações de N-S é estável a perturbações se a energia satisfaz a condição:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_{\forall}(t)}{E_{\forall}(t=0)} \rightarrow 0$$

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Com base na definição de energia cinética das perturbações Joseph (1976) definiu 4 conceitos acerca da estabilidade de escoamentos

2. **Estabilidade Condicional:** Caso em que existe um valor limite de energia $\delta > 0$ tal que a energia das perturbações tenda a 0 quanto o tempo tender a infinito. Caso a energia seja maior do que δ o escoamento se torna instável.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_v(t)}{E_v(t=0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_v(t)}{\delta} \rightarrow 0$$

3. **Estabilidade Global:** Caso onde o limite de energia δ tende a infinito. Esse é um caso especial do caso condicionalmente estável. Nele qualquer perturbação com qualquer amplitude é dita como estável.

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Com base na definição de energia cinética das perturbações Joseph (1976) definiu 4 conceitos acerca da estabilidade de escoamentos

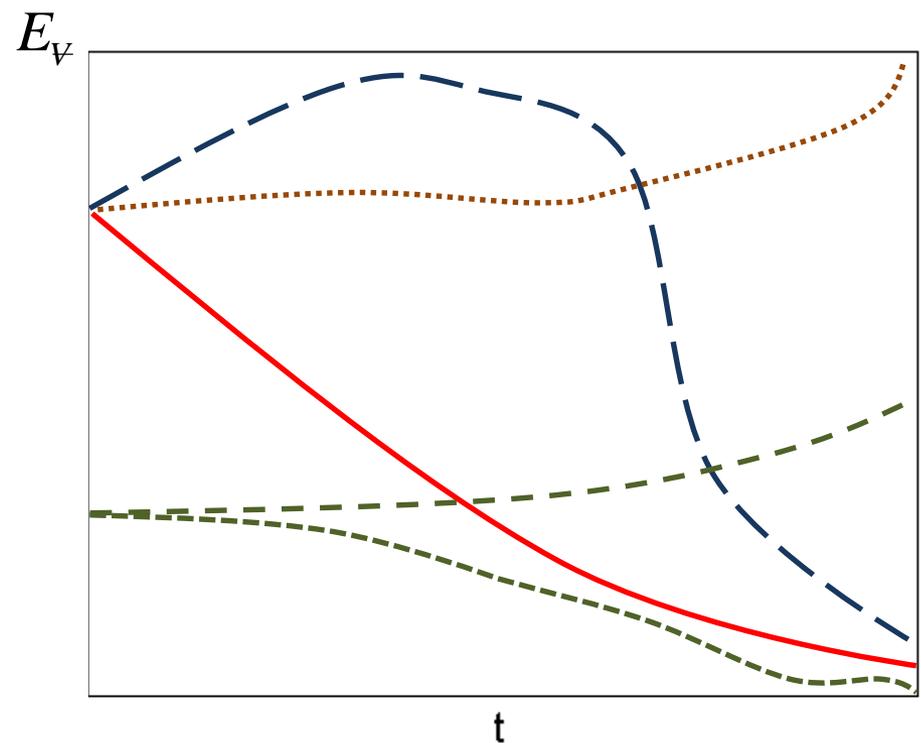
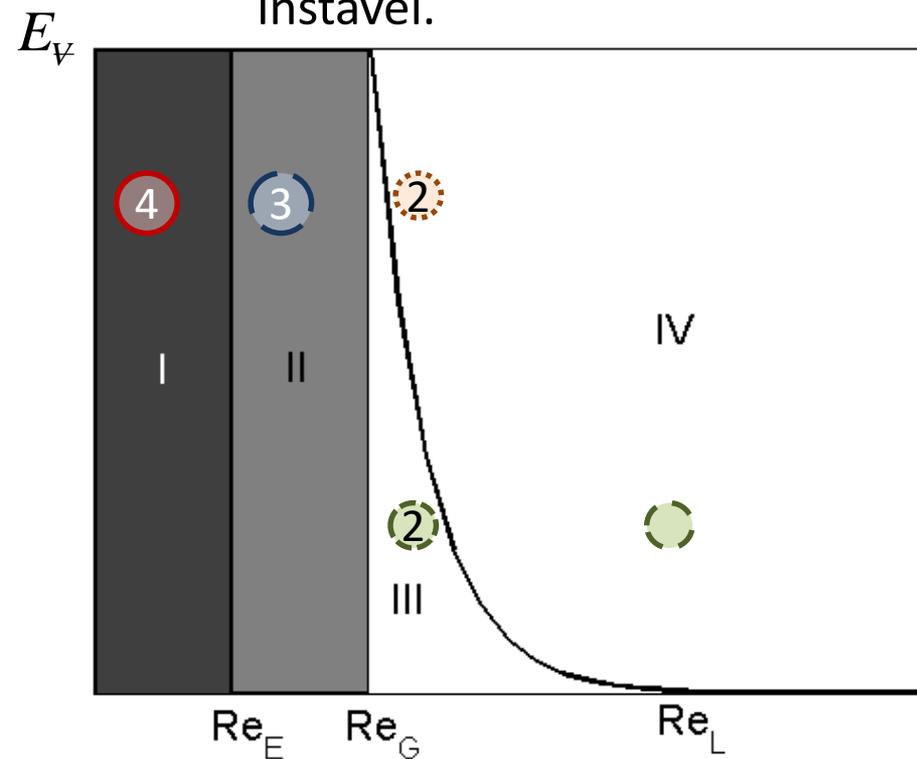
4. **Estabilidade Monotônica:** Caso em que a energia sempre decai ao longo do tempo, não apresentando nenhum crescimento.

$$\frac{\partial E_v(t)}{\partial t} < 0, \quad \text{para todo } t$$

- A partir dos conceitos iniciais de estabilidade de escoamentos é apropriado introduzir alguns conceitos adicionais como por exemplo o número de Reynolds crítico.
- O conhecimento das diferentes definições auxilia no entendimento dos diferentes valores de Re_c obtidos experimentalmente e citados anteriormente para a transição em tubos.

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Definições de números de Reynolds críticos:
 - $Re < Re_E$: escoamento monotonicamente estável – teoria de energia
 - $Re < Re_G$: escoamento é globalmente estável
 - $Re > Re_L$: escoamento é linearmente estável – incondicionalmente instável.



Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Exemplos de Re_c de alguns escoamentos :

- Hagen-Poiseuille:** $Re = rU_{centro} / \nu$

$$Re_L = \infty; \quad Re_E = 81.5; \quad Re_G \sim 2000;$$

- Poiseuille Canal Plano:** $Re = 2bU_{centro} / \nu$

$$Re_L = 5772; \quad Re_E = 49.6; \quad Re_G \sim 1000;$$

- Couette Canal Plano:**

$$Re_L = \infty; \quad Re_E = 20.7; \quad Re_G \sim 125-360;$$

Note o efeito das perturbações iniciais. Explicação para O. Reynolds ter encontrado um valor crítico de 13000, enquanto que as tabelas de engenharia sugerem $Re_c = 2000$

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações
- Para estudar a evolução da energia cinética das perturbações é necessário escrever uma equação para a energia.
- Multiplicando a equação (5) , por u podemos obter a equação desejada.

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \cdot (\bar{U} \cdot \nabla u)}_1 + \underbrace{u \cdot (u \cdot \nabla \bar{U})}_2 + \underbrace{u \cdot (u \cdot \nabla u)}_3 + \underbrace{u \cdot \nabla p}_4 = \underbrace{u \cdot \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u}_5 \quad (9)$$

1. Contribuição da convecção da perturbação pelo escoamento base
2. Contribuição do cisalhamento do escoamento base sobre a perturbação
3. Contribuição de efeitos não lineares sobre a perturbação
4. Contribuição da pressão – difusão
5. Contribuição da viscosidade - dissipação

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações
- Usando as relações abaixo além da conservação de massa eq.(2) e (6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Termos 1 e} \\ 3 \end{array} \right. \quad \nabla(u \cdot (u \cdot \bar{U}) + u \cdot (u \cdot u)) = 2u \cdot (\bar{U} \cdot \nabla u) + 2u \cdot (u \cdot \nabla u)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Termo 4} \end{array} \right. \quad \nabla(u \cdot I_P) = I_P \cdot \nabla u + u \cdot \nabla p, \quad \text{onde } I_P \text{ é a identidade de } P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Termo 5} \end{array} \right. \quad \frac{1}{\text{Re}} [\nabla(u \cdot \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla u] = \frac{1}{\text{Re}} u \cdot \nabla(\nabla u)$$

- Logo a equação (9) pode ser reescrita na forma

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left[\frac{u \cdot (u \cdot \bar{U})}{2} + \frac{u \cdot (u \cdot u)}{2} + u \cdot I_P - \frac{1}{\text{Re}} u \cdot \nabla u \right] + u \cdot (u \cdot \nabla \bar{U}) = -\frac{1}{\text{Re}} \nabla u \cdot \nabla u \quad (10)$$

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações

- Equação (10)

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} u \cdot (u \cdot \bar{U}) + \frac{1}{2} u \cdot (u \cdot u) + u \cdot I_p - \frac{1}{\text{Re}} u \cdot \nabla u \right] + u \cdot (u \cdot \nabla \bar{U}) = -\frac{1}{\text{Re}} \nabla u \cdot \nabla u$$

- A integral da equação no volume de controle permite avaliar o comportamento da energia do escoamento.
- Assumindo perturbações periódicas ou nulas nas fronteiras do domínio (eq. 8), implica que a integral do divergente dos termos dentro dos colchetes é zero (Teorema de Green). A equação pode ser reduzida a:

$$\frac{dE}{dt} = -\int_{\mathcal{V}} u \cdot (u \cdot \nabla \bar{U}) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\text{Re}} \nabla u \cdot \nabla u d\mathcal{V}$$

EQUAÇÃO DE ORR-REYNOLDS – (1894,1907)

(11)

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações

- Equação de Orr-Reynolds

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\forall} u \cdot (u \cdot \nabla \bar{U}) dV - \int_{\forall} \frac{1}{Re} \nabla u \cdot \nabla u dV$$

Termo de
produção (P)

Termo de
dissipação (D)

- O termo P (não confundir com pressão), corresponde ao trabalho realizado pela deformação das perturbações, exercido pelo cisalhamento do escoamento base. O sinal pode ser positivo ou negativo, dependendo do caso.
- O termo D, corresponde ao trabalho feito pela viscosidade (sempre negativo)

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações

- Equação de Orr-Reynolds

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\forall} u \cdot (u \cdot \nabla \bar{U}) d\forall - \int_{\forall} \frac{1}{\text{Re}} \nabla u \cdot \nabla u d\forall$$

- Essa equação pode ser usada para extrair importantes conclusões acerca da estabilidade de escoamentos.
- Ela é usada como base para definir se o critério de estabilidade de um escoamento de acordo com a energia.
- Quando a equação é igual a 0, tem-se o limiar de estabilidade do escoamento de acordo com o método da energia.

$$\frac{dE}{dt} = P - D = 0 \rightarrow \frac{1}{\text{Re}_E} = \max \left(\frac{\int_{\forall} u \cdot (u \cdot \nabla \bar{U}) d\forall}{\int_{\forall} \nabla u \cdot \nabla u d\forall} \right) \quad (12)$$

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações
- A partir desse limiar, para derivadas da energia maiores do que 0, pode haver algum crescimento de perturbações.
- Esse limiar é tido como o Re crítico de acordo com o método da energia.
- Valores negativos da variação de energia com o tempo, indicam um decaimento monotônico das perturbações (Região I da figura já apresentada).
- De acordo com a equação de Orr-Reynolds o cisalhamento do escoamento base é condição necessária para a instabilidade do escoamento

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações
- É importante notar que termos não lineares não estão presentes na equação de Orr-Reynolds. Assumindo $u=A(t)*\hat{u}$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = - \frac{\int_{\mathcal{V}} A^2(t) \hat{u} \cdot (\hat{u} \cdot \nabla \bar{U}) d\mathcal{V}}{A^2(t) \int_{\mathcal{V}} u^2 d\mathcal{V}} - \frac{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\text{Re}} A^2(t) \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} d\mathcal{V}}{A^2(t) \int_{\mathcal{V}} u^2 d\mathcal{V}}$$

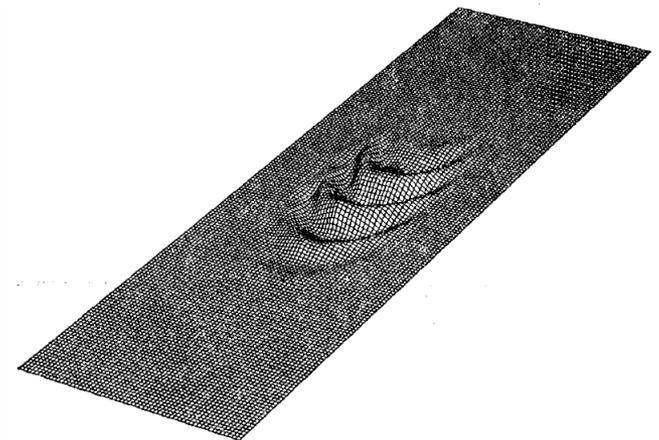
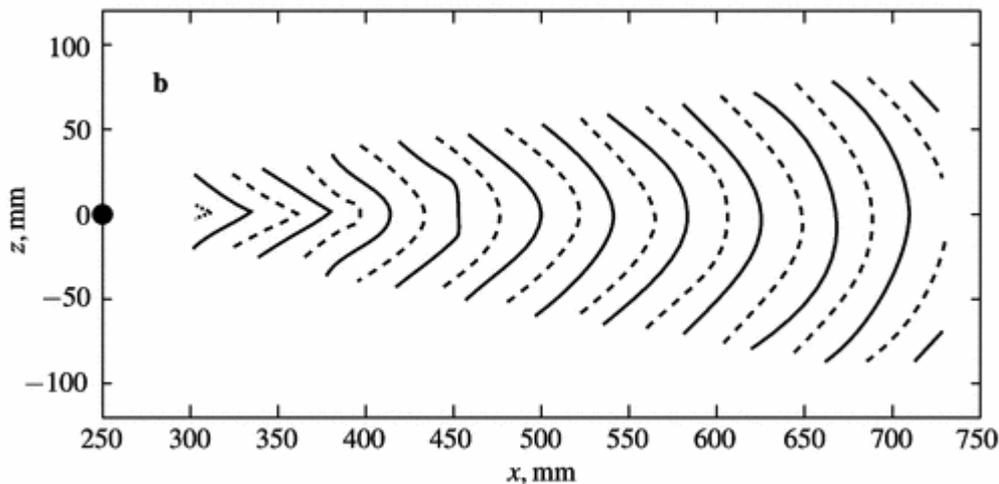
- Esses termos lineares estão relacionados com termos quadráticos da amplitude das perturbações.
- Termos não lineares correspondem a termos cúbicos e que , desapareceram da equação (10) quando a energia foi integrada em todo o volume de controle.

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- **Equação de Orr-Reynolds ~ Equação de energia das perturbações**
 - O crescimento instantâneo da energia das perturbações, não depende da amplitude inicial dessas perturbações e pode ser encontrado para perturbações infinitesimais com a mesma forma.
 - Isso indica que equações linearizadas, onde as perturbações são tidas como infinitesimais, podem ser utilizadas para prever o crescimento de perturbações finitas. (Se $A \ll 0$, A^*A é muito pequeno, logo termos que envolvem produto de perturbações podem ser desprezados).
 - Isso facilita a análise das equações para diferentes escoamentos e serve como base para se avaliar a instabilidade desses escoamentos.

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Exemplo uso da teoria para análise de perturbações em camada limite.
- Evolução de ondas na camada limite sobre uma placa plana. Os ondas são inseridas na camada limite por um gerador de perturbações (alto-falante).
- Efeitos não lineares podem ser observados a jusante do perturbador a medida que as ondas se propagam na direção do escoamento.



Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Exemplo uso da teoria para análise de perturbações em camada limite.
- O trabalho de Medeiros, JFM (2004), fez uso dos conceitos da equação de Orr-Reynolds para identificar regiões onde os efeitos lineares e não lineares eram predominantes
- De acordo com a teoria, efeitos **lineares** escalam com **A^2** .

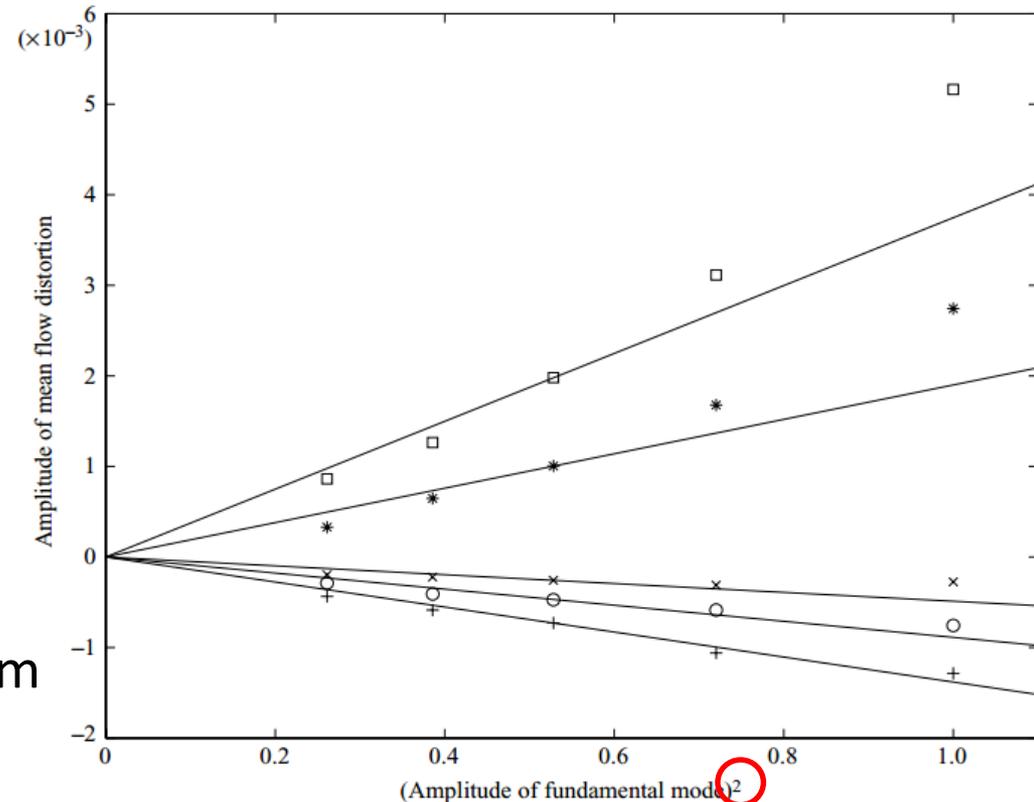


Figura extraída do trabalho de Medeiros, JFM (2004)

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Exemplo uso da teoria para análise de perturbações em camada limite.
- O trabalho de Medeiros, JFM (2004), fez uso dos conceitos da equação de Orr-Reynolds para identificar regiões onde os efeitos lineares e não lineares eram predominantes
- De acordo com a teoria, efeitos **não-lineares** escalam com A^3 .

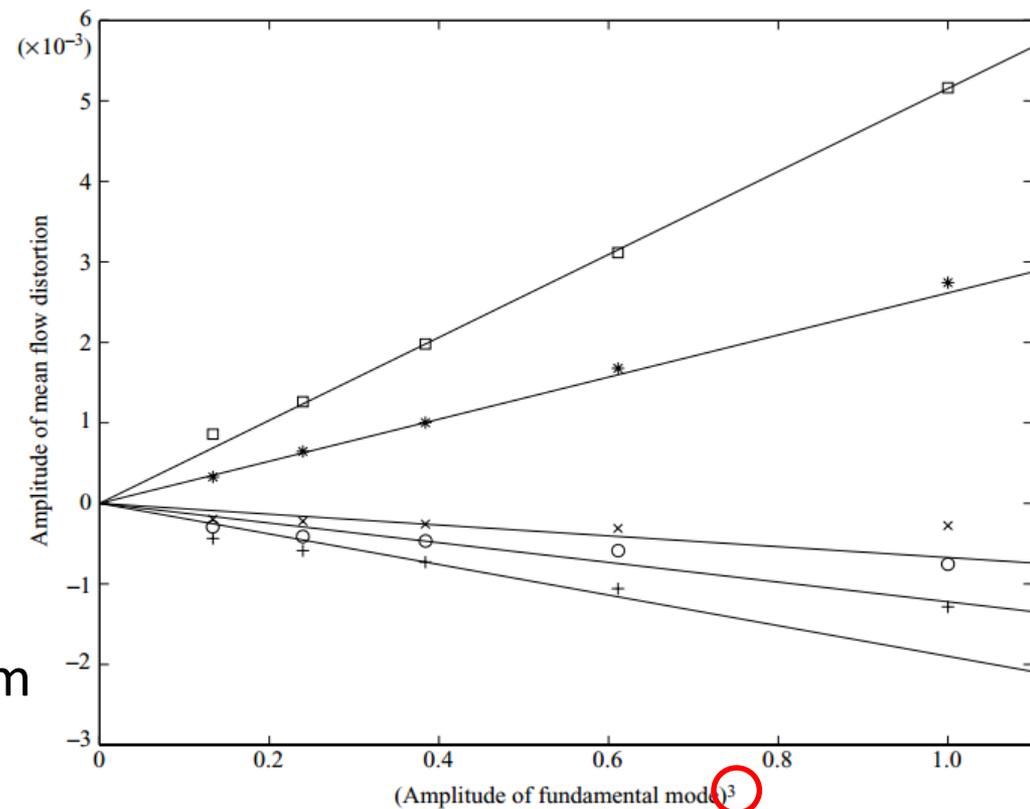


Figura extraída do trabalho de Medeiros, JFM (2004)

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Exemplo uso da teoria para análise de perturbações em camada limite.
- O trabalho de Paula et.al, JFM (2013), também fez uso desses conceitos para identificar a presença de efeitos não lineares na evolução de perturbações introduzidas na camada limite
- De acordo com a teoria, efeitos lineares escalam com A^2 . Efeitos não lineares escalam com uma potência maior de A (A^3).

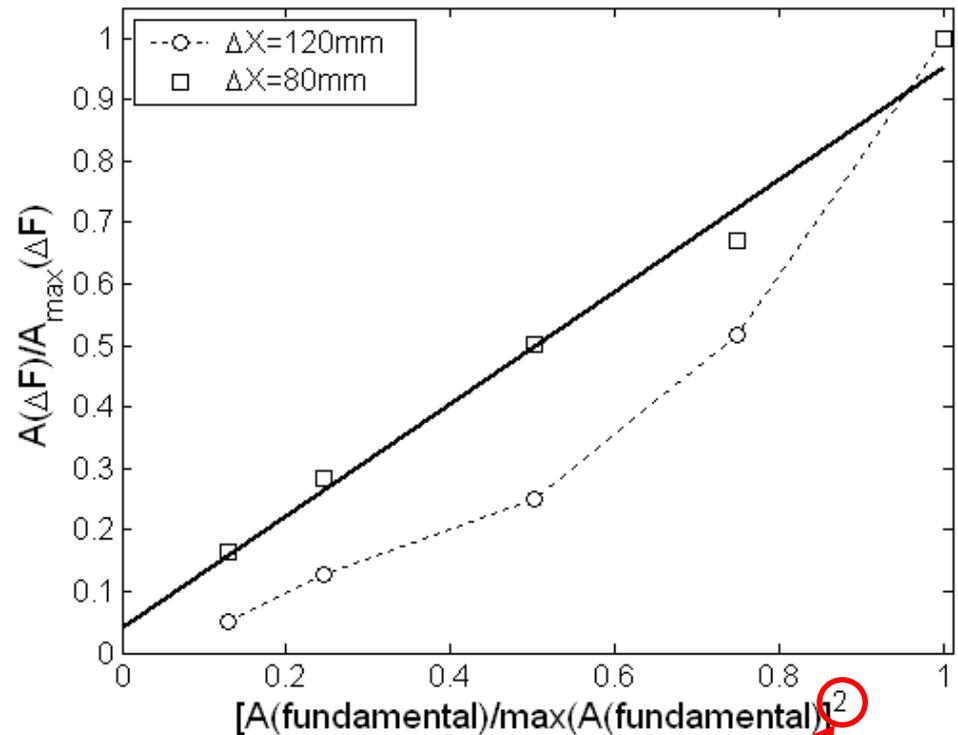


Figura extraída do trabalho de De Paula et.al., JFM (2013)

Teoria de instabilidade hidrodinâmica

- Exemplo método da energia: Critério de Rayleigh e escoamento de Taylor Couette

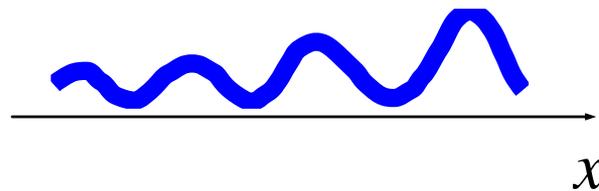


Classificação de instabilidades

Escoamentos cisalhantes estacionários

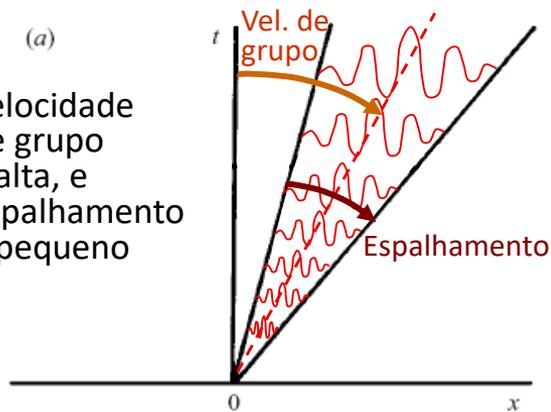
Instabilidade Convectiva

(perturbação cresce no espaço)



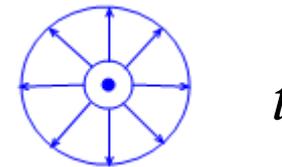
(a)

Velocidade de grupo é alta, e espalhamento é pequeno



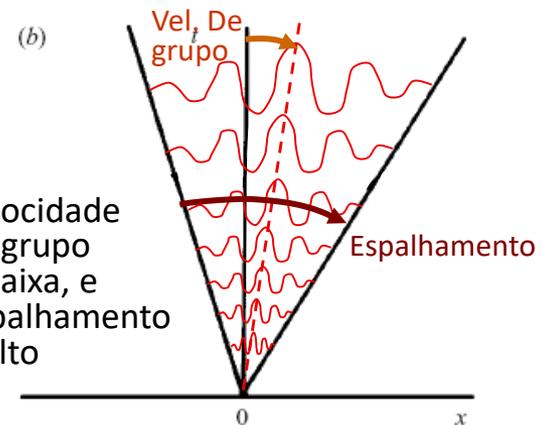
Instabilidade Absoluta

(perturbação cresce no tempo)



(b)

Velocidade de grupo é baixa, e espalhamento é alto

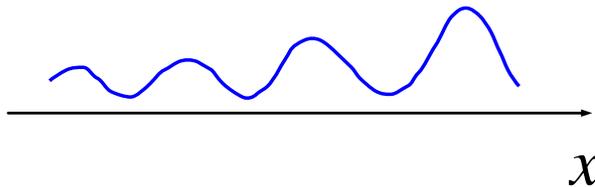


Classificação de instabilidades

Escoamentos cisalhantes estacionários

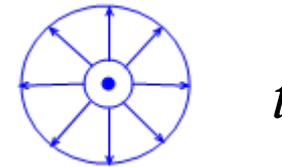
Instabilidade Convectiva

(perturbação cresce **no espaço**)



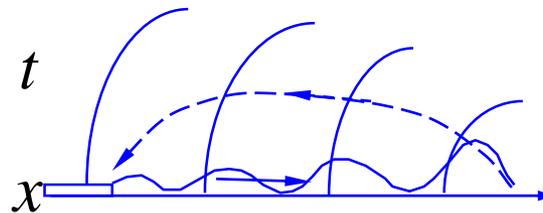
Instabilidade Absoluta

(perturbação cresce **no tempo**)



Instabilidade Global

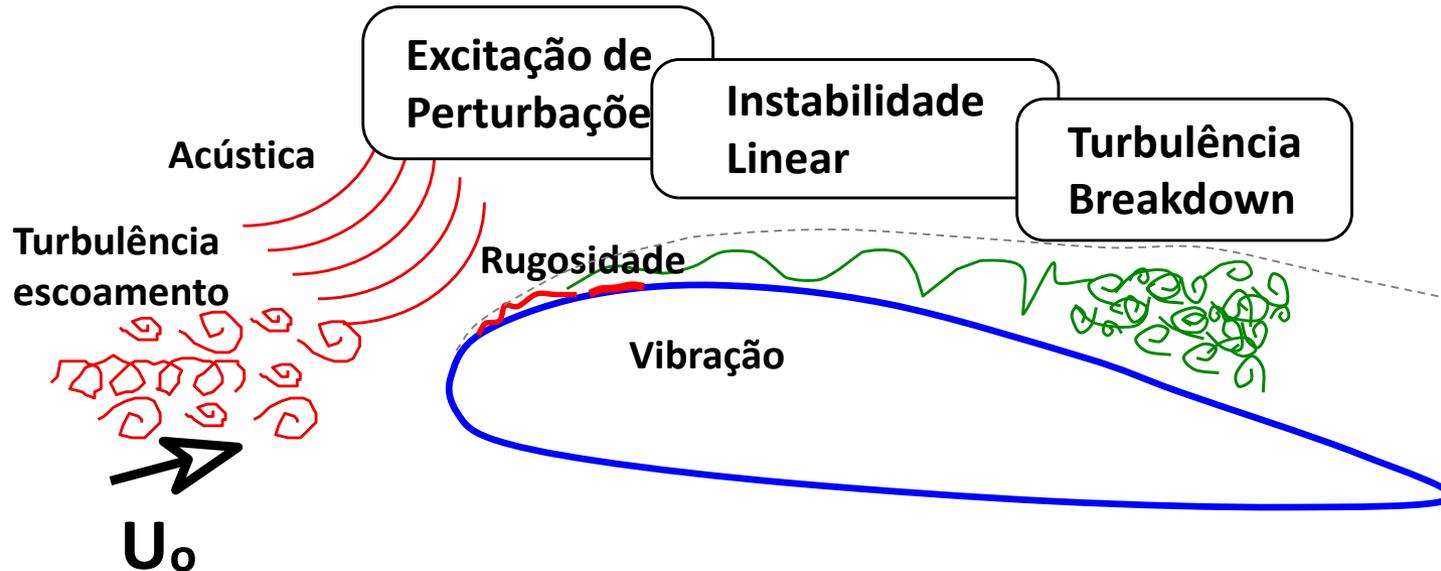
(cresce **no espaço e no tempo**)



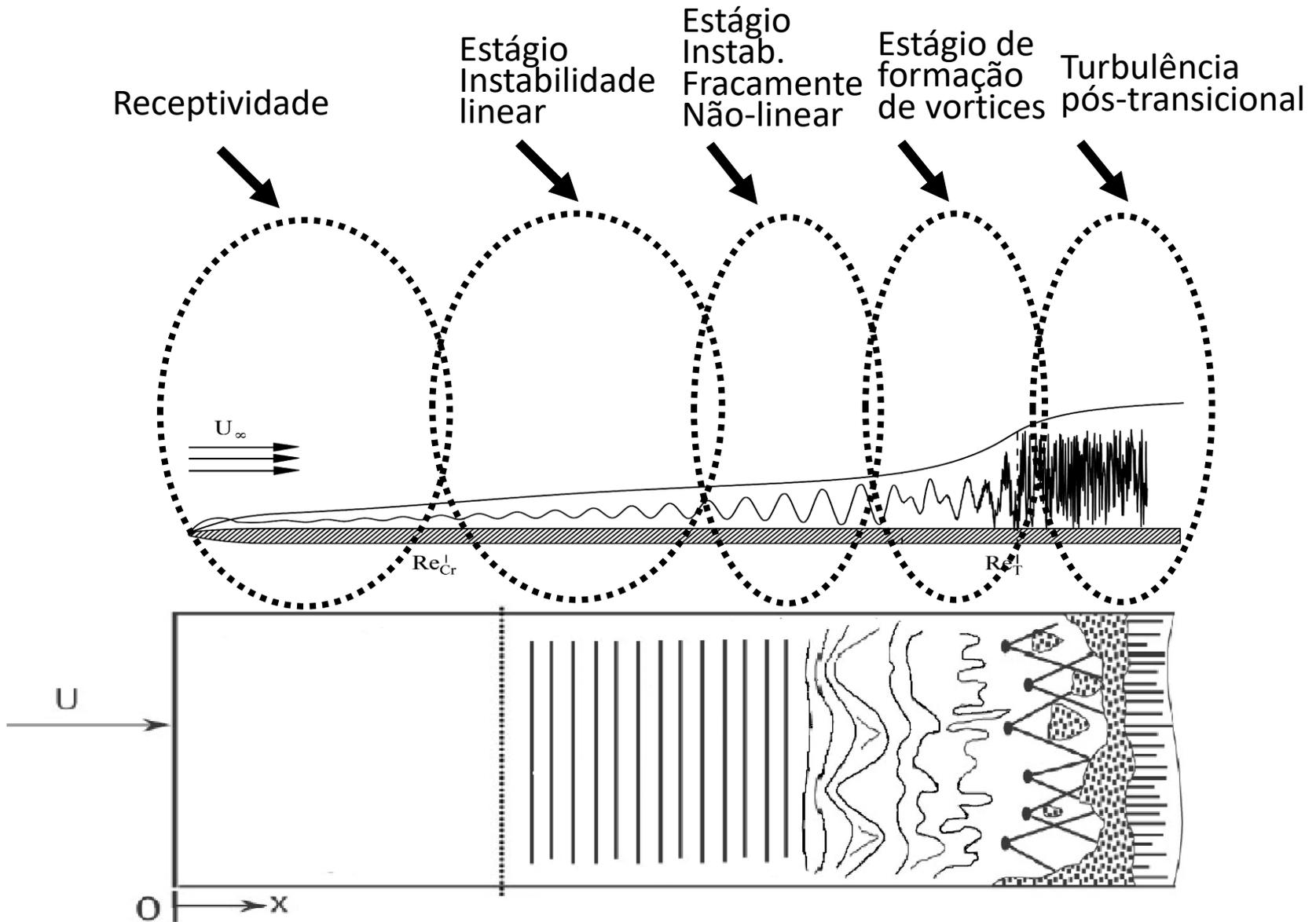
S. Taneda

Esteira de Von Kármán

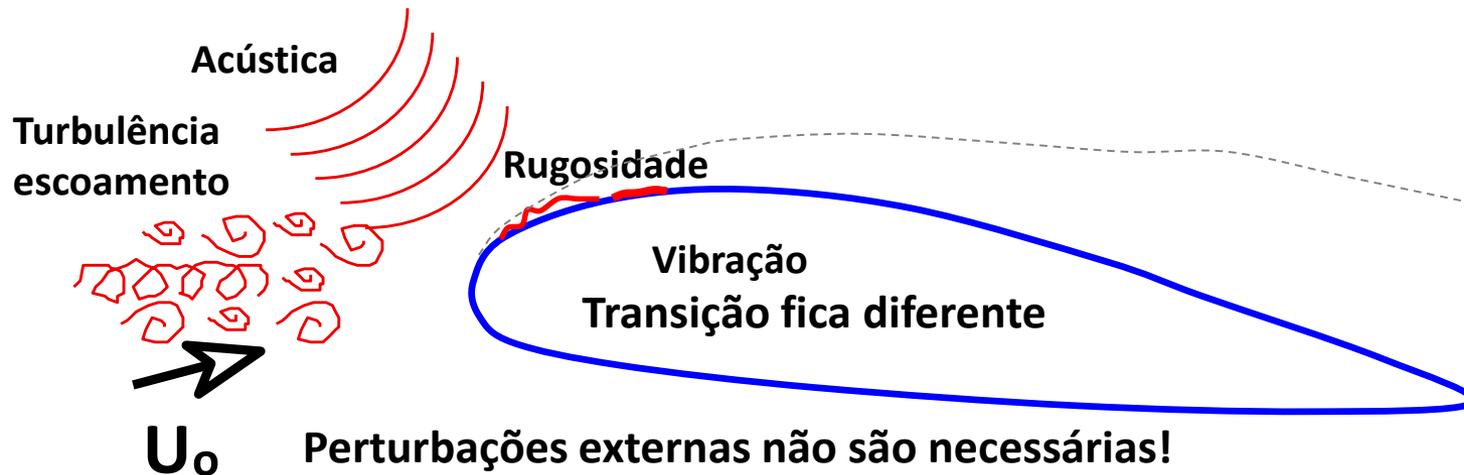
Desenho esquemático da transição iniciada por instabilidade **Convectiva**



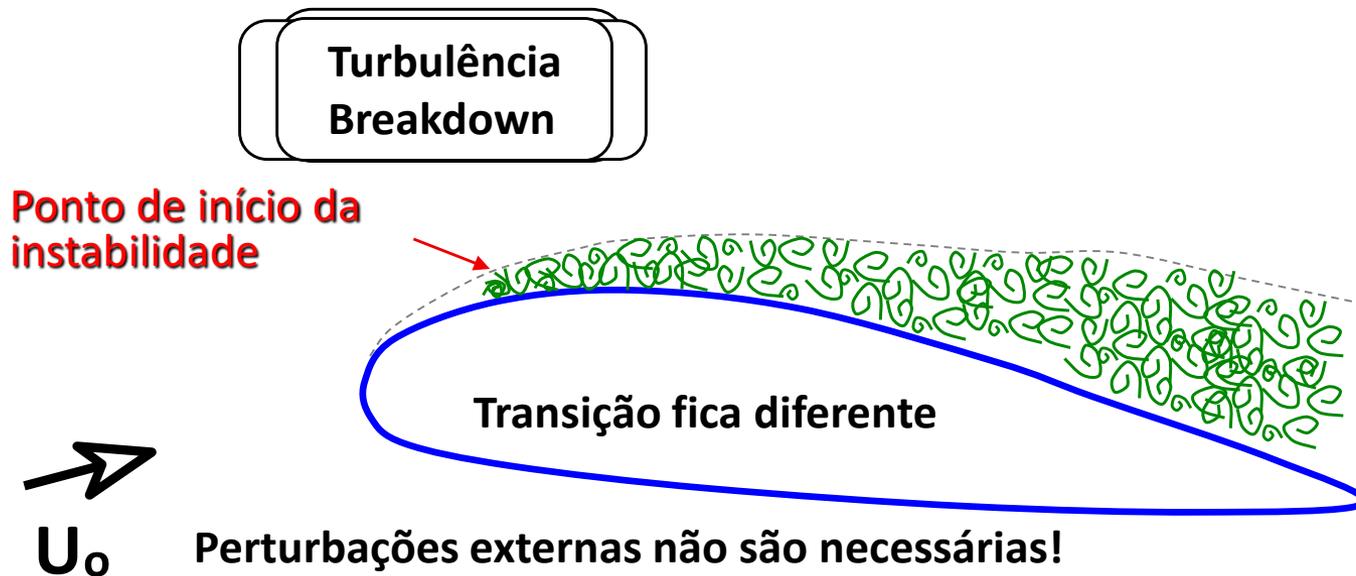
Esquemático da transição convectiva



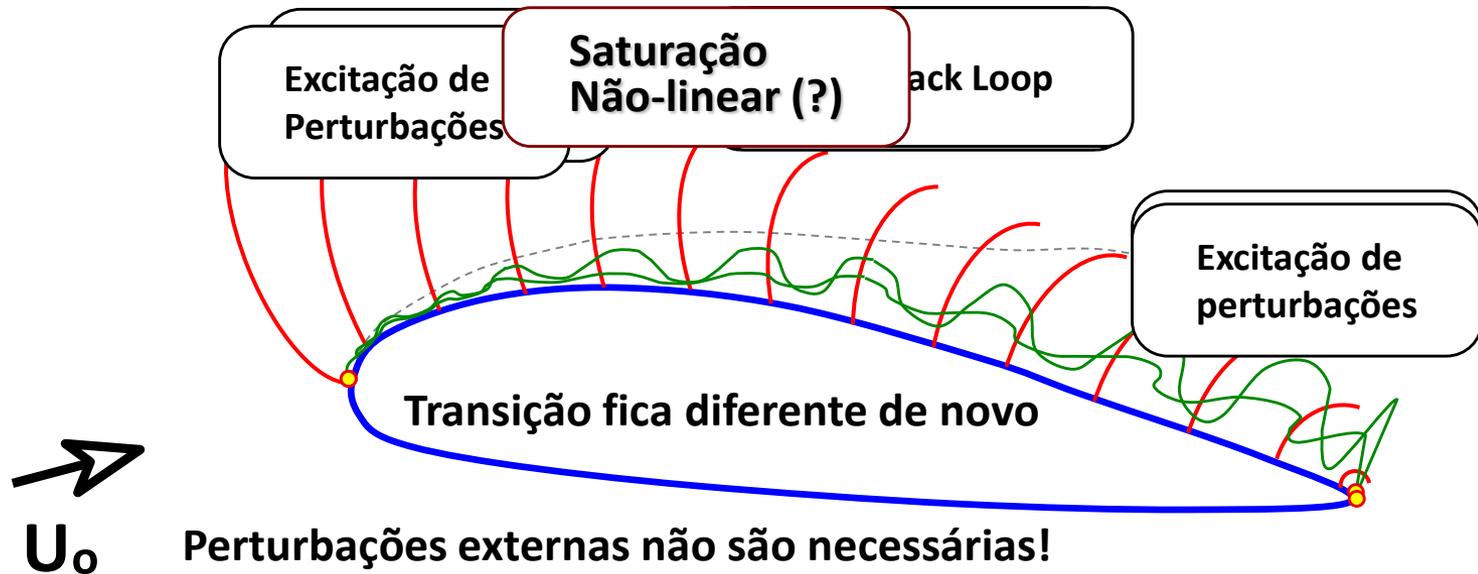
Desenho esquemático da transição iniciada por instabilidade **Absoluta**



Desenho esquemático da transição iniciada por instabilidade **Absoluta**



Desenho esquemático da transição iniciada por instabilidade **Global**



Desenho esquemático da transição iniciada por instabilidade **Global**

