Análise de dados experimentais

I.B De Paula

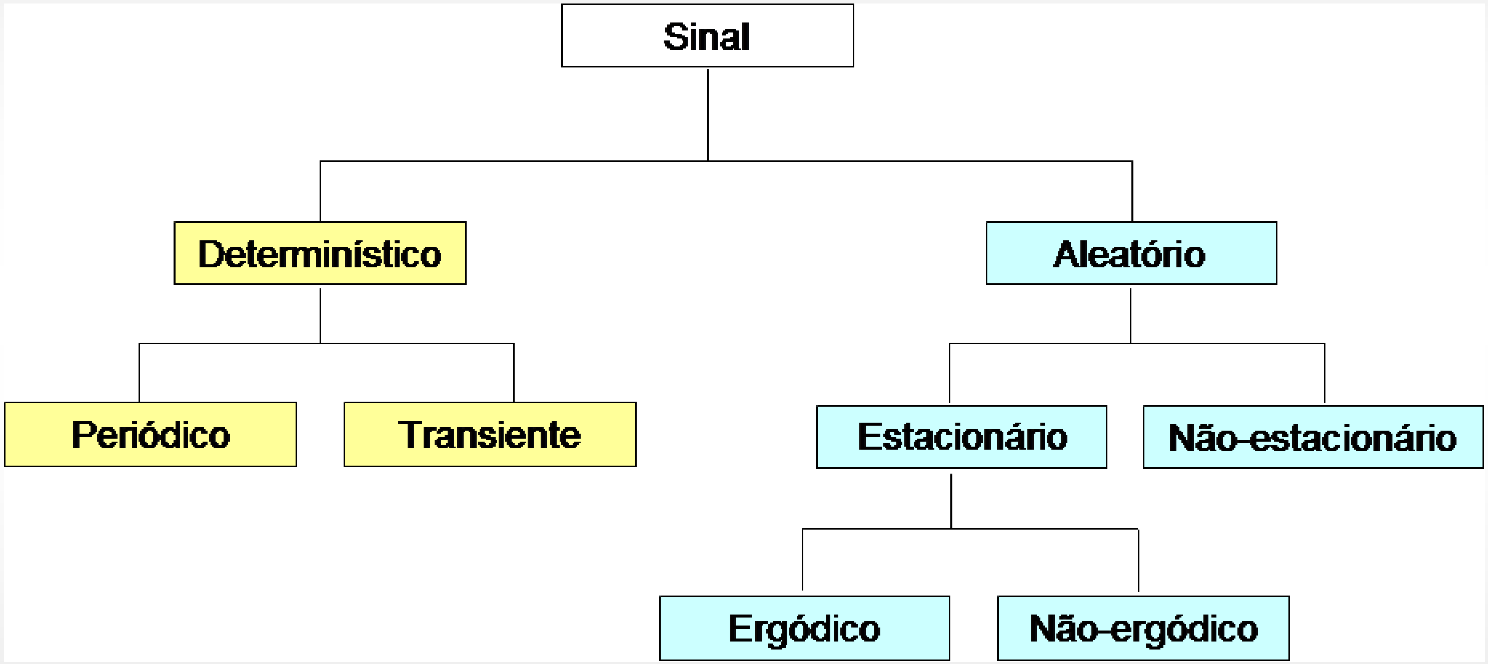
➢O objetivo desta aula é apresentar técnicas e conceitos básicos de condicionamento e análise de sinais que são comumente empregados durante o processo de medição de grandezas físicas por meio de instrumentos.

➢Para se aprofundar no tema o livro: *Random data: Analysis and Measurement Procedures. Dos autores: J. S. Bendat; A. G. Piersol*, é uma boa referência para estudo.

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Tipos de sinal**



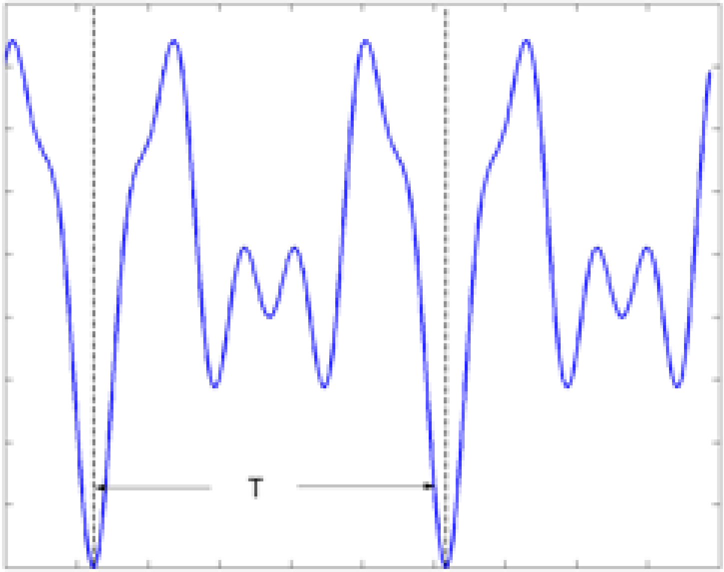
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

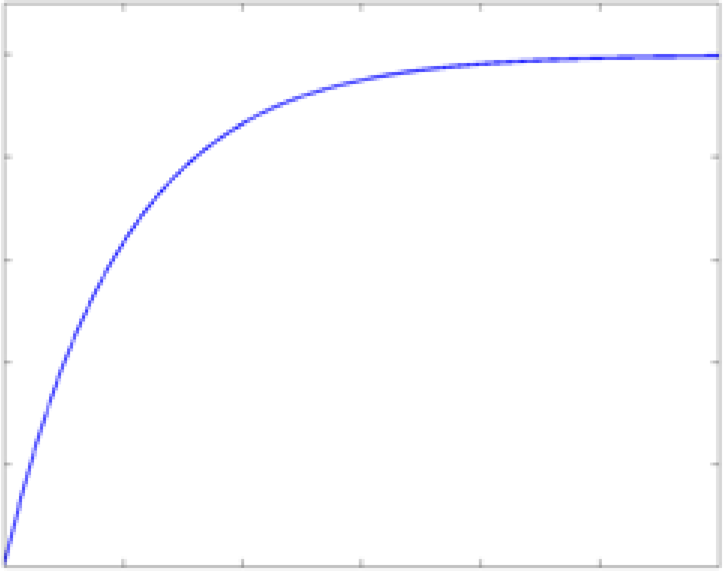
➢**Tipos de sinal:**

➢<u>Determinístico</u>:*Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração*.

Periódico



Transiente



Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Tipos de sinal:**
  - Determinístico: *Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração*.

Periódico. Ex:

Transiente. Ex:

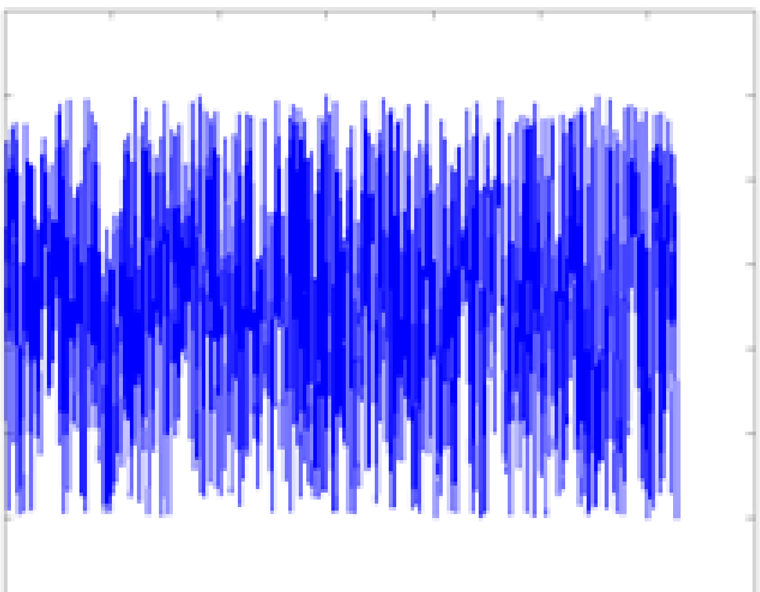
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

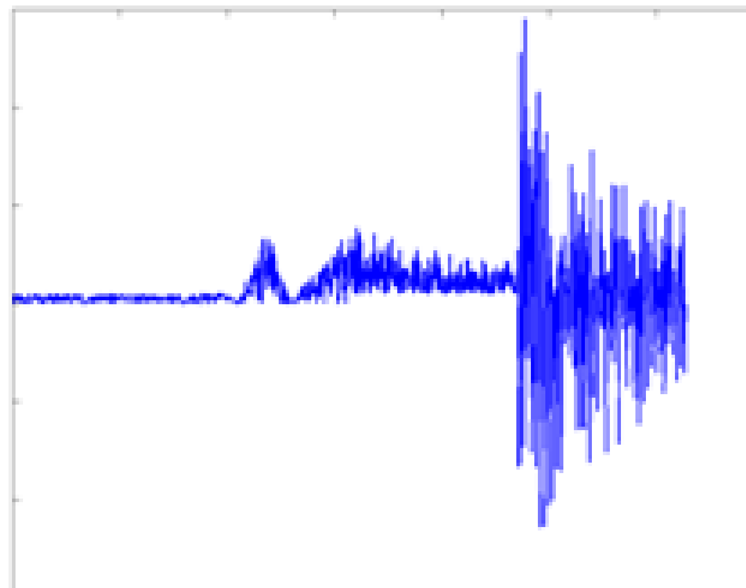
➢Tipos de sinal:

➢<u>Estocástico (Aleatório): </u>*possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário



Transiente



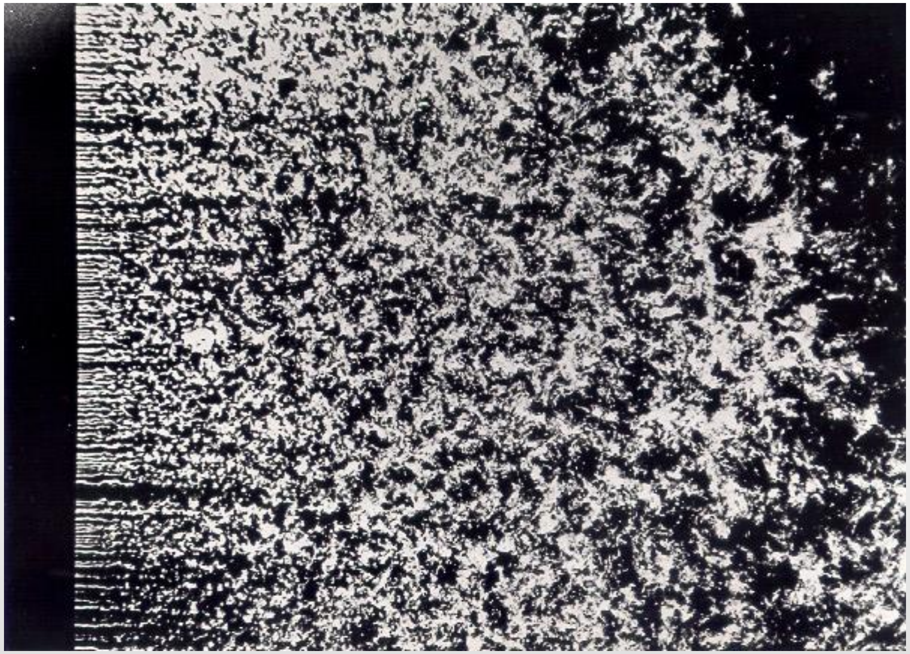
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

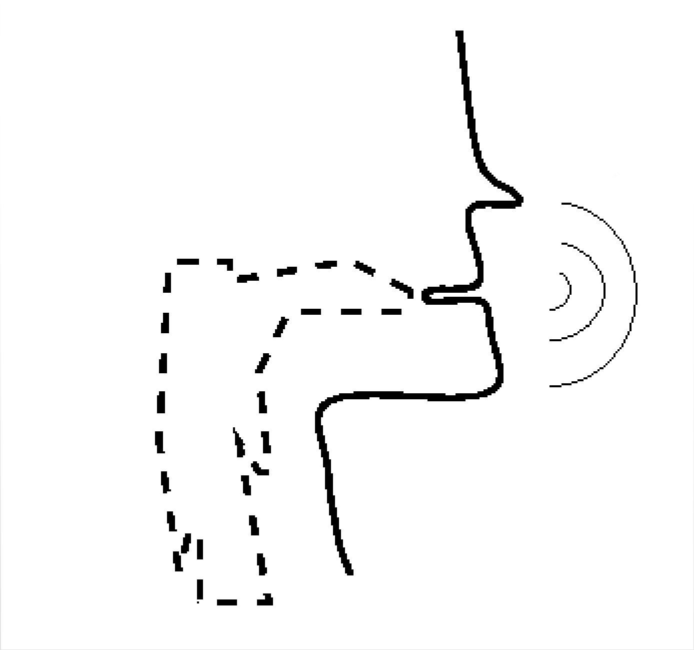
➢**Tipos de sinal:**

➢<u>Estocástico (Aleatório):</u> *possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário. Ex:



Não Estacionário. Ex:



Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Tipos de sinal:**
  - Estocástico (Aleatório):

Estacionário ergódico: *propriedades estatísticas não dependem do tamanho da amostra, ou seja as médias temporais e as médias de eventos são iguais.*

Estacionário não ergódico: *somente estatísticas de ordem mais elevada apresentam invariância no tempo.*

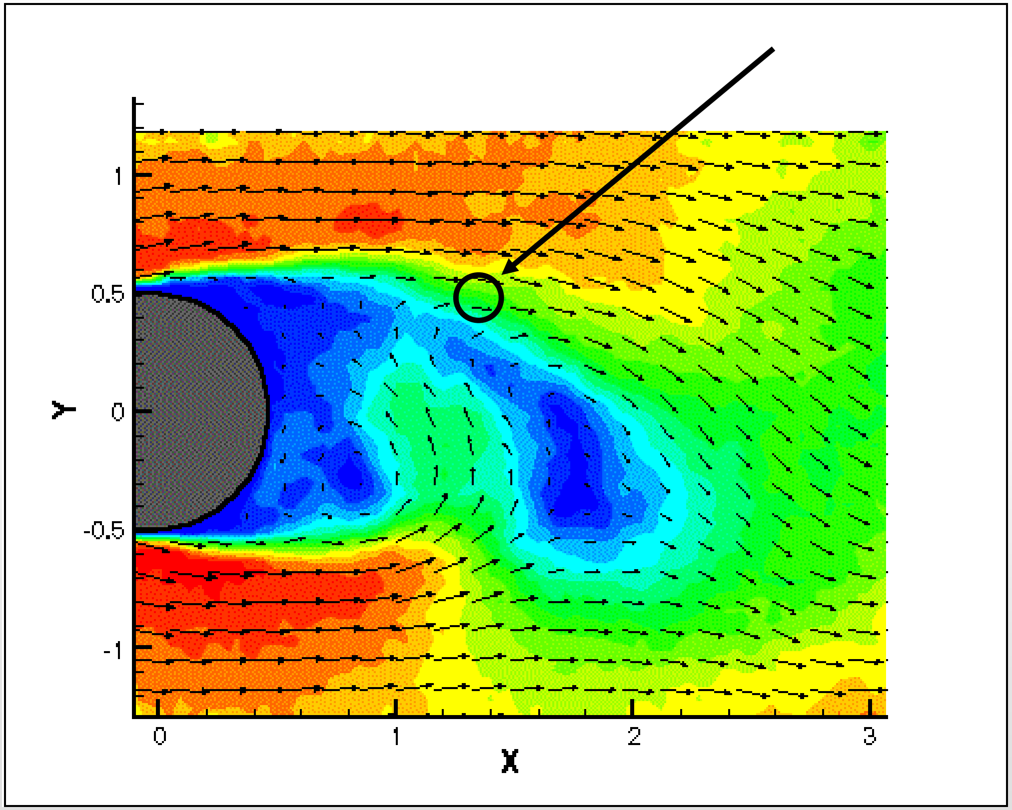
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

➢<u>Exemplo</u>: Escoamento na esteira de um cilindro



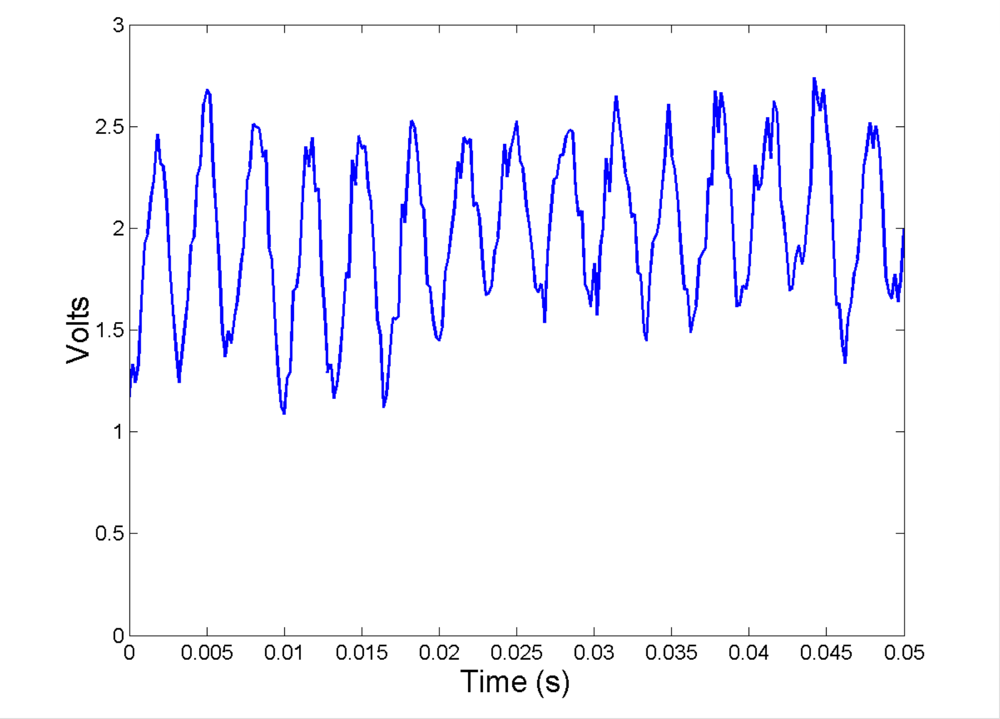
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

➢<u>Exemplo</u>: Escoamento na esteira de um cilindro.
Série temporal de 1 ponto no espaço medido com anemômetro a quente



Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Medidas de amplitude (Distribuição Normal):

➢Componente média (DC)

Valor médio

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} x_j$$

Componente alternada (AC)

Vários estimadores
Ex.:desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\left(x_j - \mu\right)^2}$$

➢Período de integração

Não dá informação sobre características do sinal

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

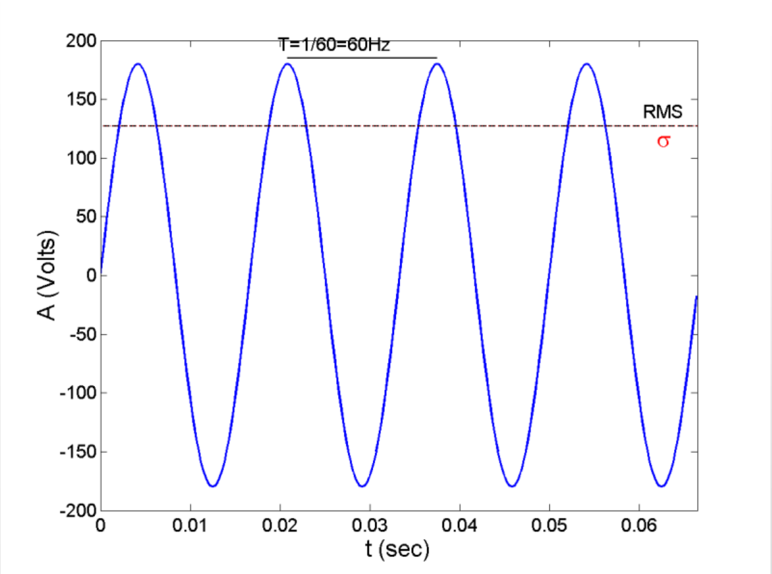
➢Medidas de amplitude:

➢Em eletrônica os sinais são geralmente definidos em termos de seu valor RMS.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}(x_j)^2}$$

➢Sinais sem componente média tem os valores RMS e de desvio padrão iguais.

➢Ex: Tensão da rede
Vpp=2*180V
Vrms=127V

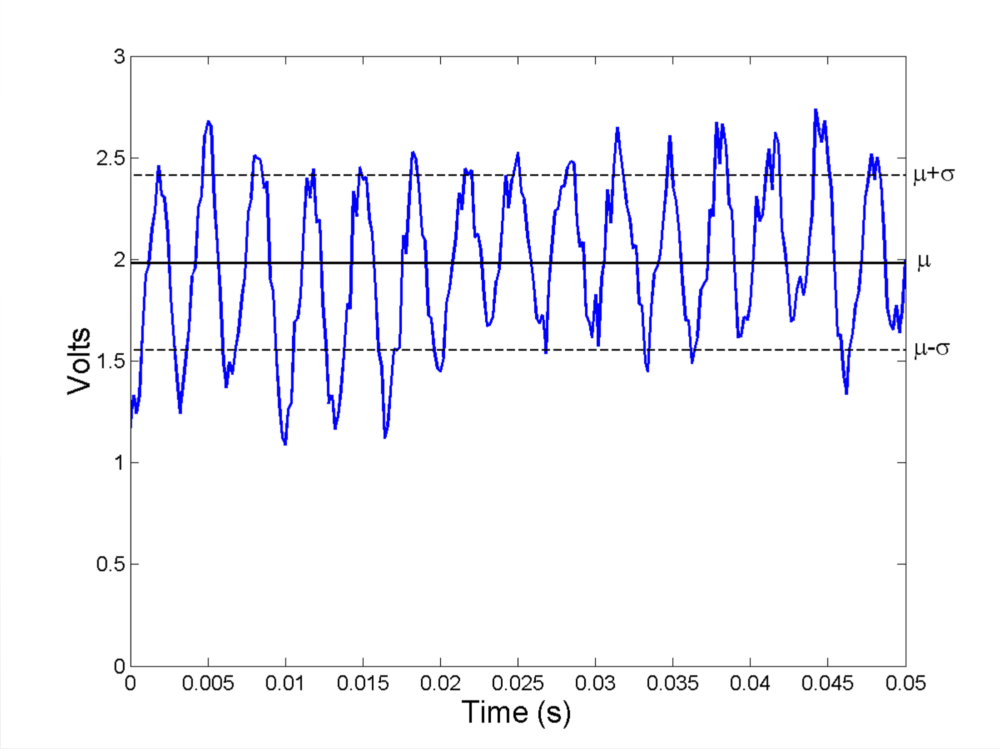


Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

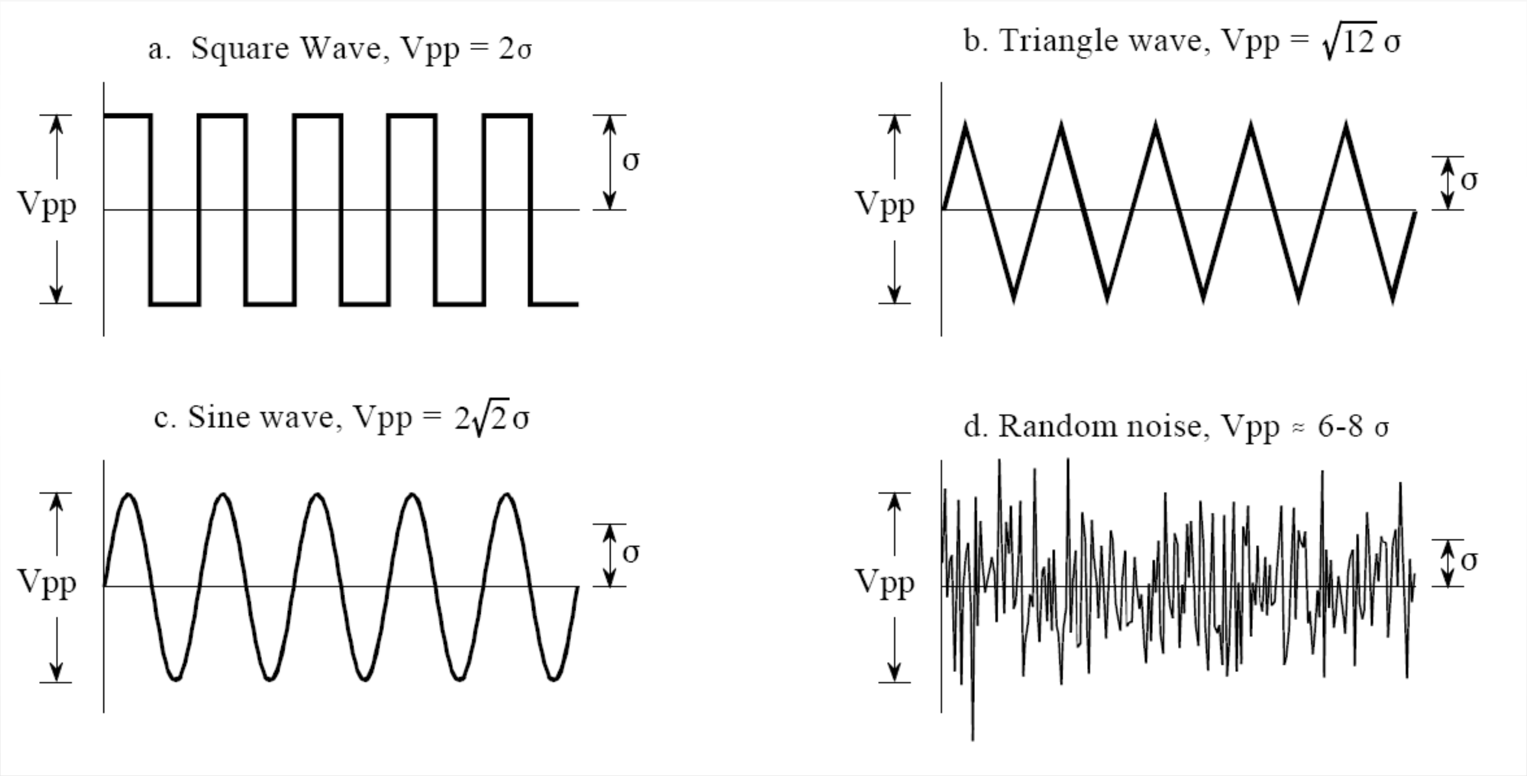
➢Exemplo: Escoamento na esteira de um cilindro.
Série temporal de 1 ponto no espaço medido com anemômetro de fio quente.



Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - <u>Exemplo</u>: Diferentes formas de onda



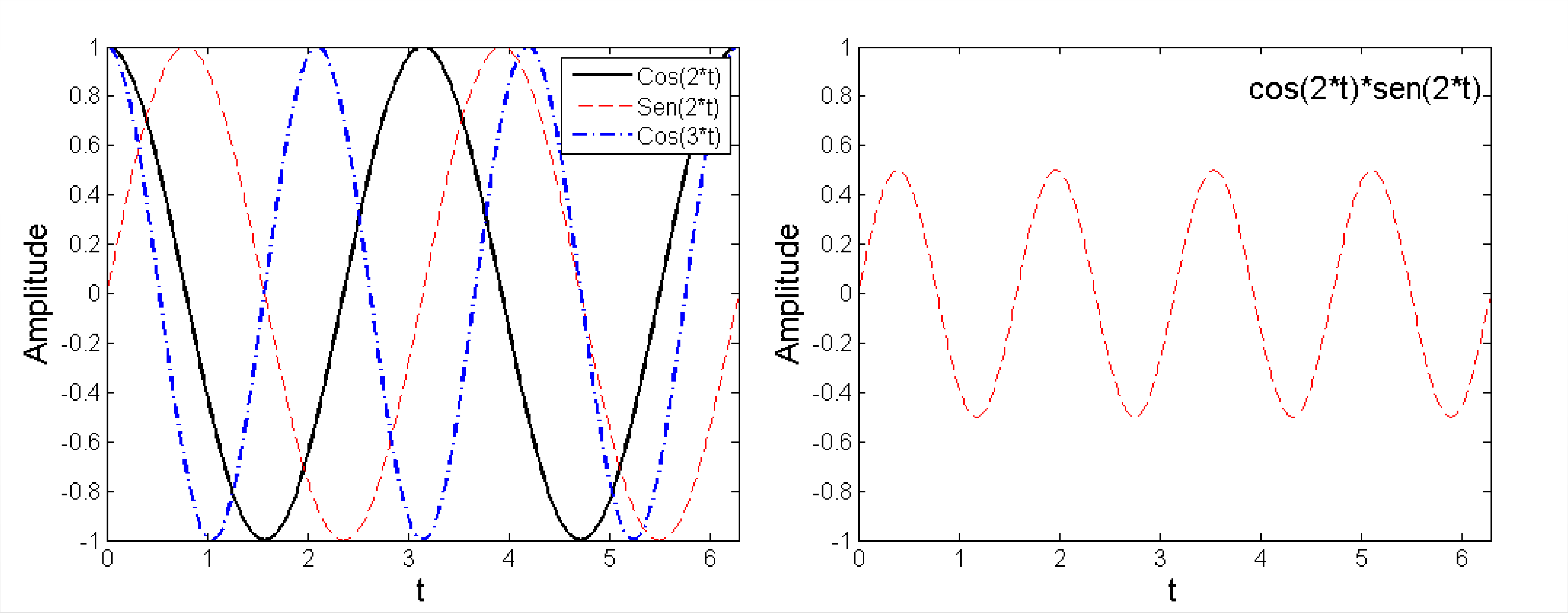
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_j)}{N}$$



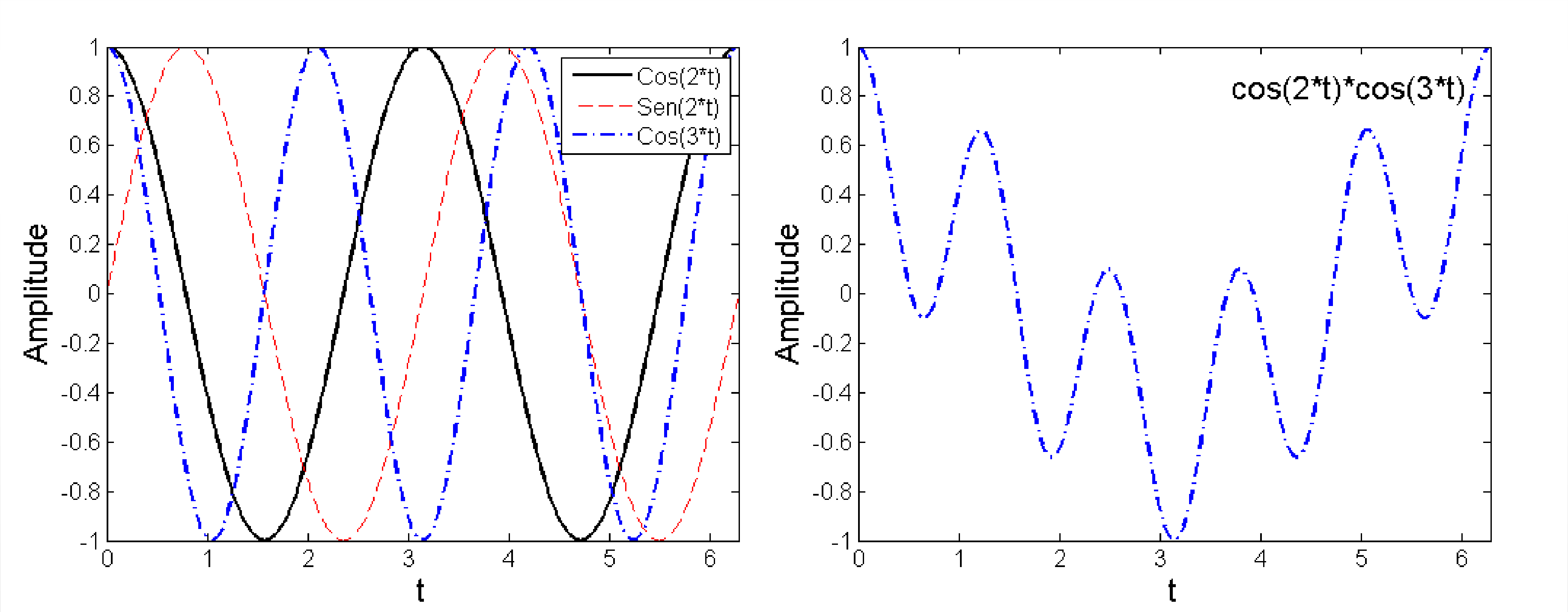
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

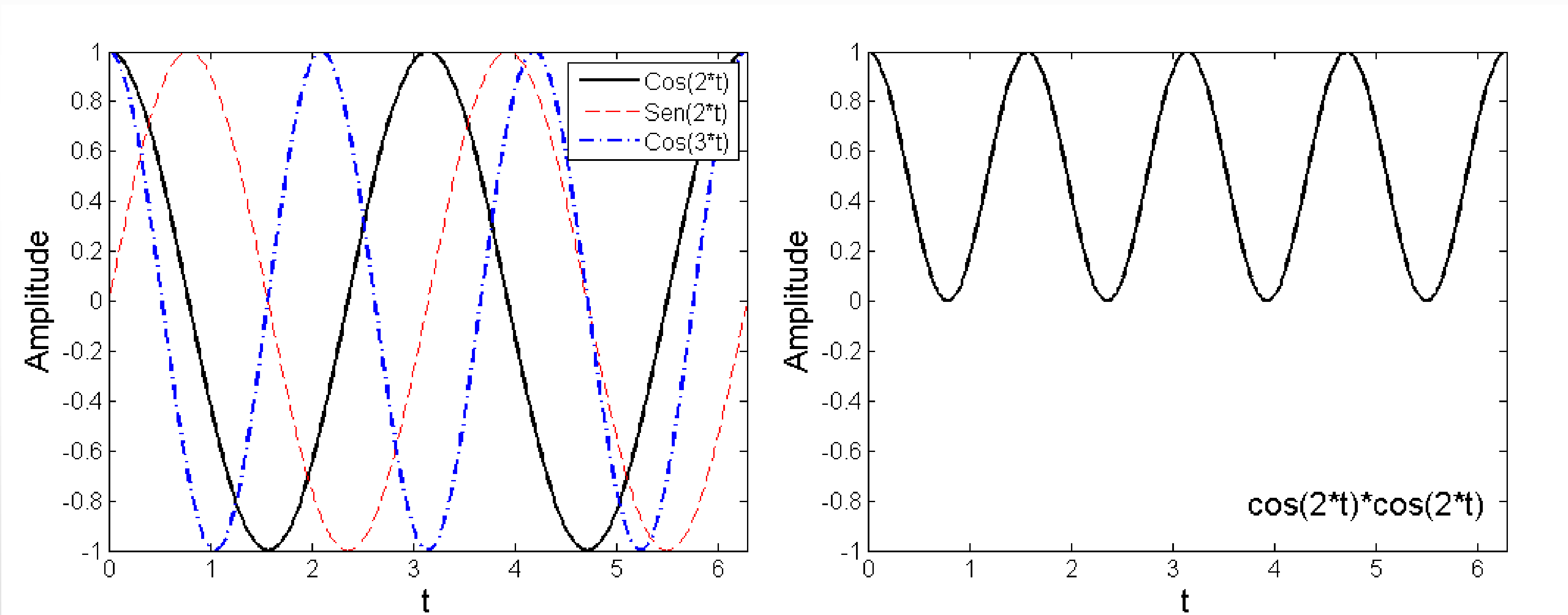
$$\mathrm{cov}(X,Y)=\sum_{j=1}^{N}\frac{(X_j-\mu_X)(Y_j-\mu_j)}{N}$$



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\sum_{j=1}^{N}\frac{(X_j-\mu_X)(Y_j-\mu_j)}{N}$$



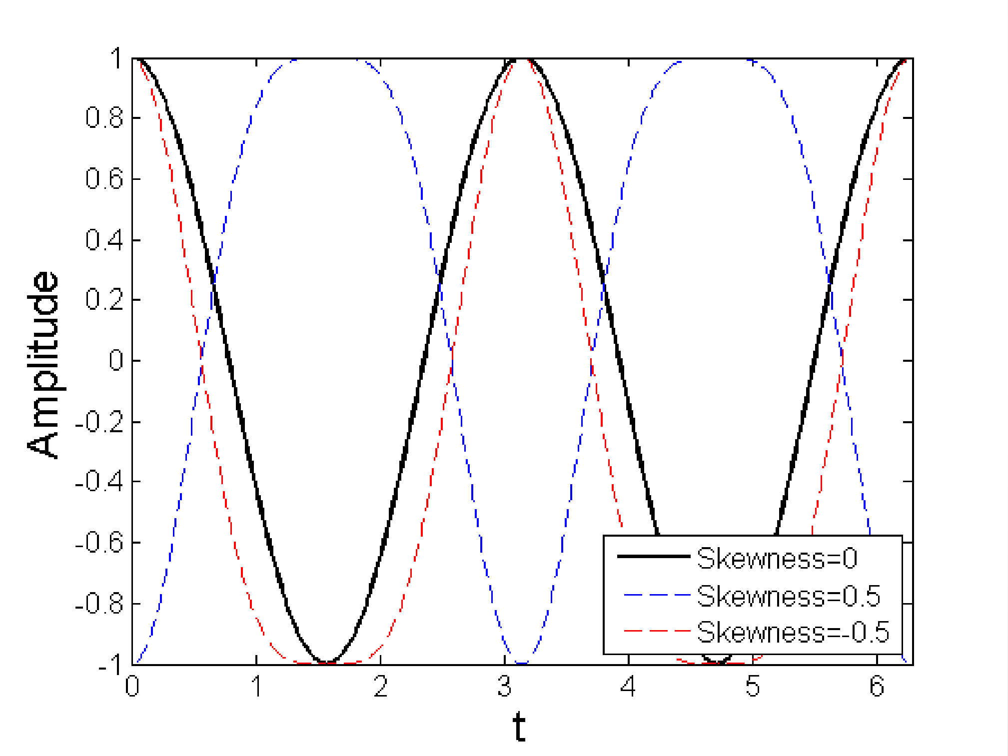
A covariância nesse exemplo só é diferente de 0 para o caso de cos(2*t)*cos(2*t)

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Coeficiente de assimetria (*skewness*).

$$skewness = \frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^2}\right)^3}$$

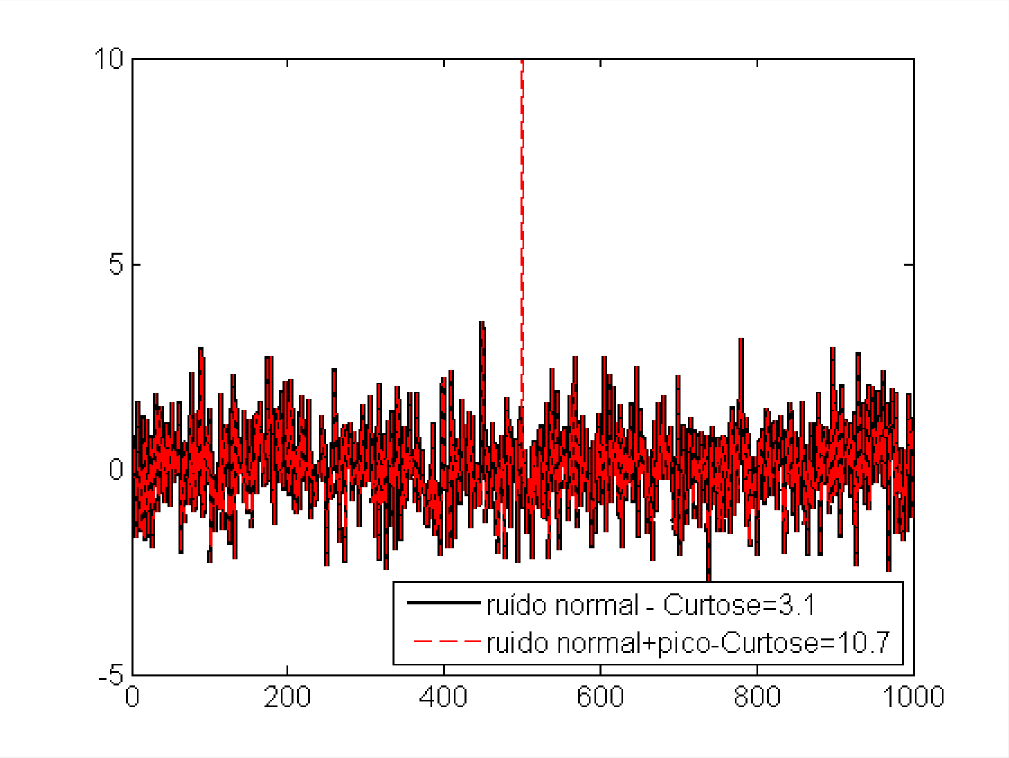


Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Curtose (medida de forma distribuição de probabilidades).

$$Curtose = \frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^4}{\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^2\right)^2}$$



Análise de dados experimentais

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Razão entre sinal de interesse e ruído (*signal to noise ratio* – *SNR*).

$$SNR = \frac{P_{\mathrm{sinal}}}{P_{ruido}} = \left(\frac{A_{RMS\mathrm{sinal}}}{A_{RMSruído}} \right)^2$$

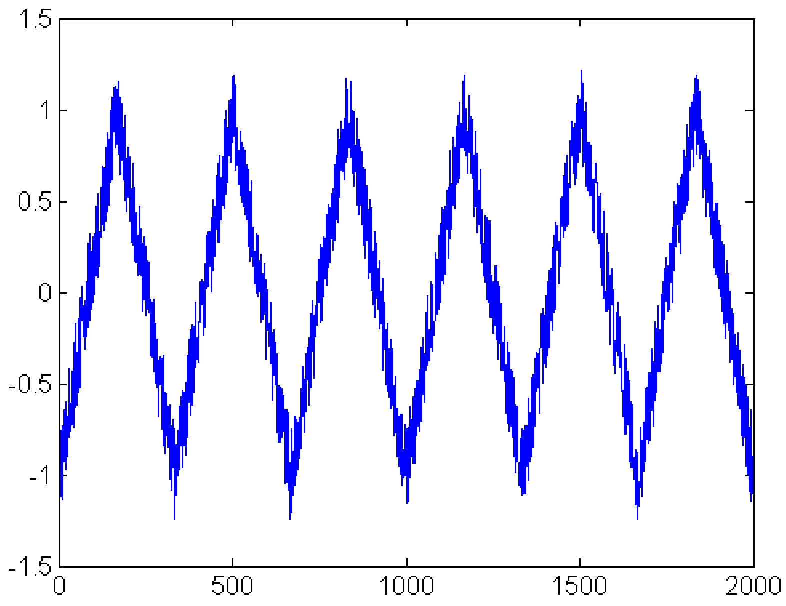
➢No caso onde o sinal de interesse é a média, uma definição alternativa pode ser utilizada.

$$SNR = \frac{\mu}{\sigma}$$

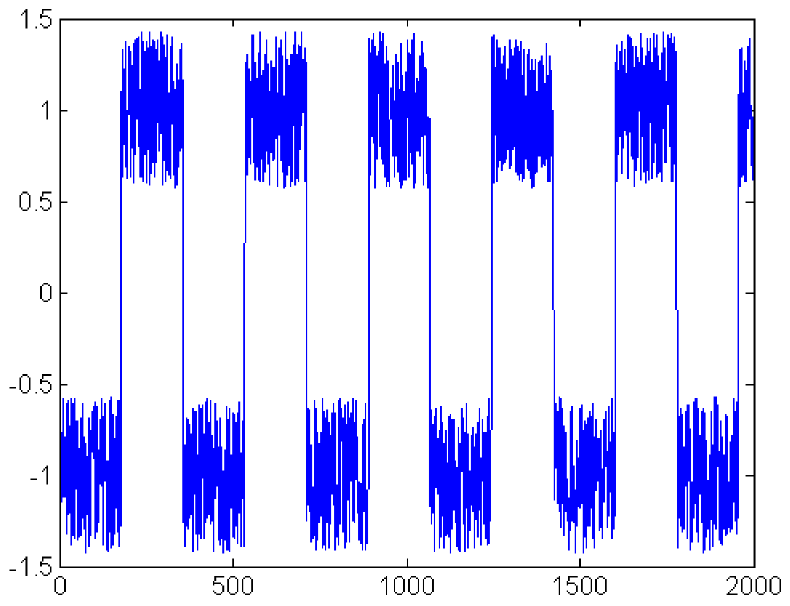
Análise de dados experimentais

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Razão entre sinal de interesse e ruído. Qual tem maior?



SNR=4.03



SNR=4.06

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

-É a frequência em que uma variável medida adquire um valor ou uma faixa de valores.

Ex.: Medição de uma variável qualquer

Nº Medição	Valor Medido
1	5.3054
2	5.0934
3	4.9581
4	5.125
5	5.0366
6	4.794
7	5.1898
8	5.0614
9	5.027
10	5.103
11	5.0523
12	4.8117
13	4.9675
14	4.9708
15	4.8936

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

Organizando os dados em intervalos de ocorrência das medidas temos: (o número de intervalos pode ser estimado usando a relação $n_{\text{intervalos}} = 1.87 \cdot (N-1)^{0.4} + 1$)

Nº Medição	Valor Medido
1	5.3054
2	5.0934
3	4.9581
4	5.125
5	5.0366
6	4.794
7	5.1898
8	5.0614
9	5.027
10	5.103
11	5.0523
12	4.8117
13	4.9675
14	4.9708
15	4.8936

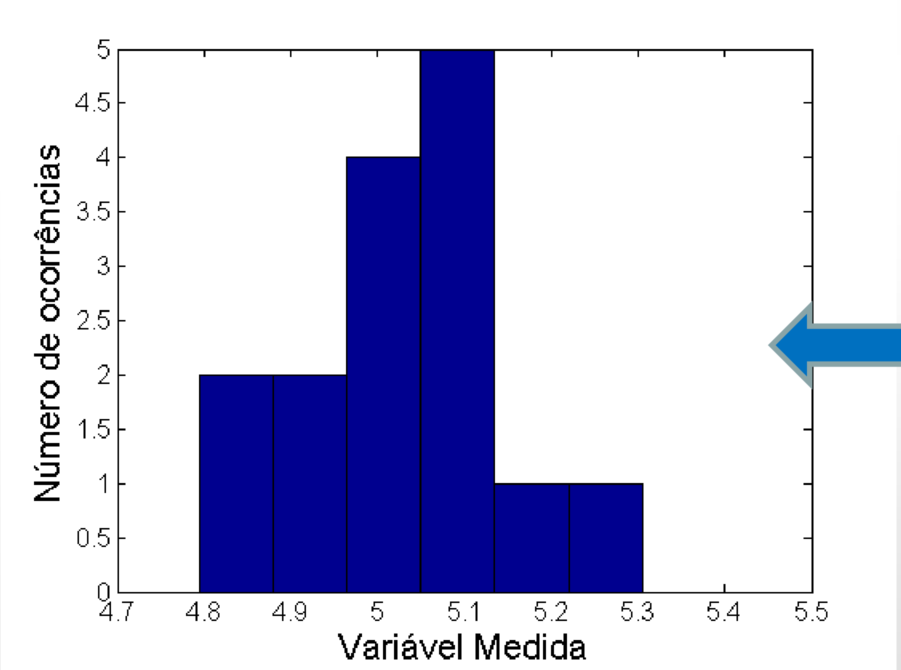
Nº Intervalo	Intervalo	nº ocorrências	nº ocorrências/N $f(n_i)$
1	$4.8 \le x_i < 4.885$	2	0.13
2	$4.885 \le x_i < 4.97$	2	0.13
3	$4.97 \le x_i < 5.055$	4	0.27
4	$5.055 \le x_i < 5.14$	5	0.33
5	$5.14 \le x_i < 5.225$	1	0.07
6	$5.225 \le x_i < 5.31$	1	0.07

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Densidade de Probabilidade

    Organizando os dados em intervalos de ocorrência das medidas temos: (o número de intervalos pode ser estimado usando a relação $n_{\text{intervalos}} = 1.87 \cdot (N-1)^{0.4} + 1$)



Nº Intervalo	Intervalo	nº ocorrências	nº ocorrências/N $f(n_i)$
1	$4.8 \le x_i < 4.885$	2	0.13
2	$4.885 \le x_i < 4.97$	2	0.13
3	$4.97 \le x_i < 5.055$	4	0.27
4	$5.055 \le x_i < 5.14$	5	0.33
5	$5.14 \le x_i < 5.225$	1	0.07
6	$5.225 \le x_i < 5.31$	1	0.07

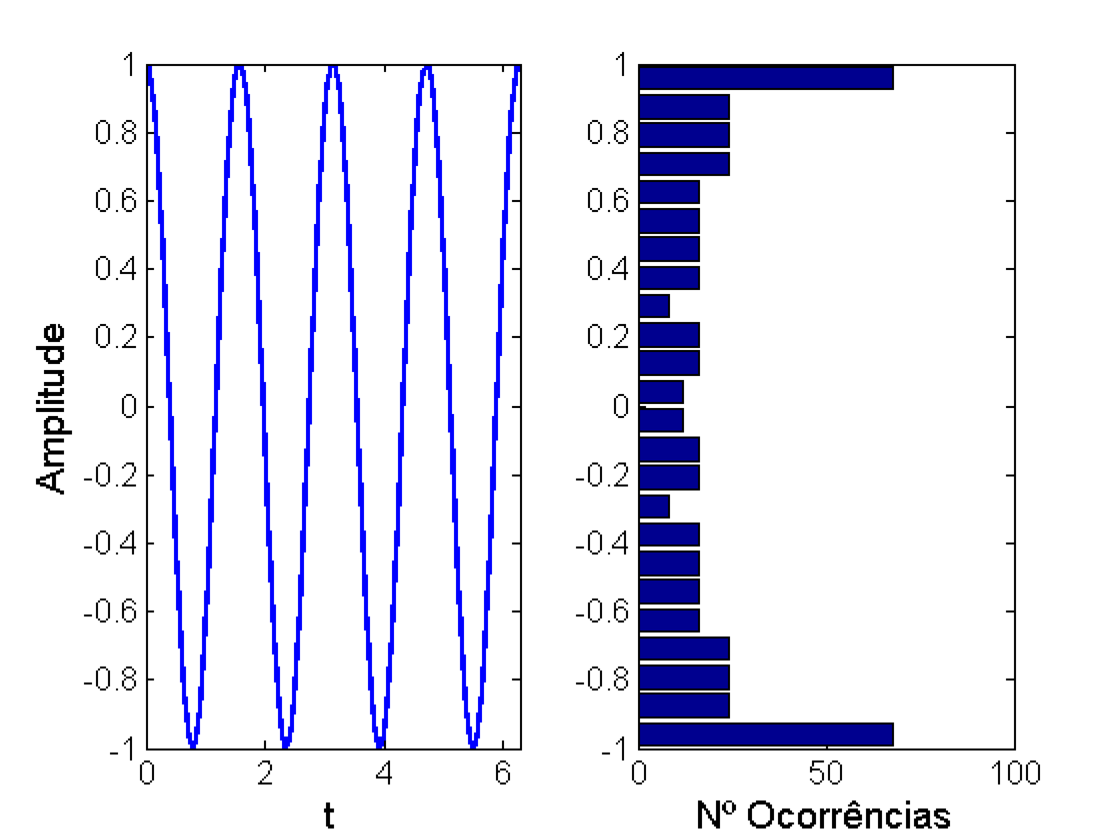
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: cos(4*t)

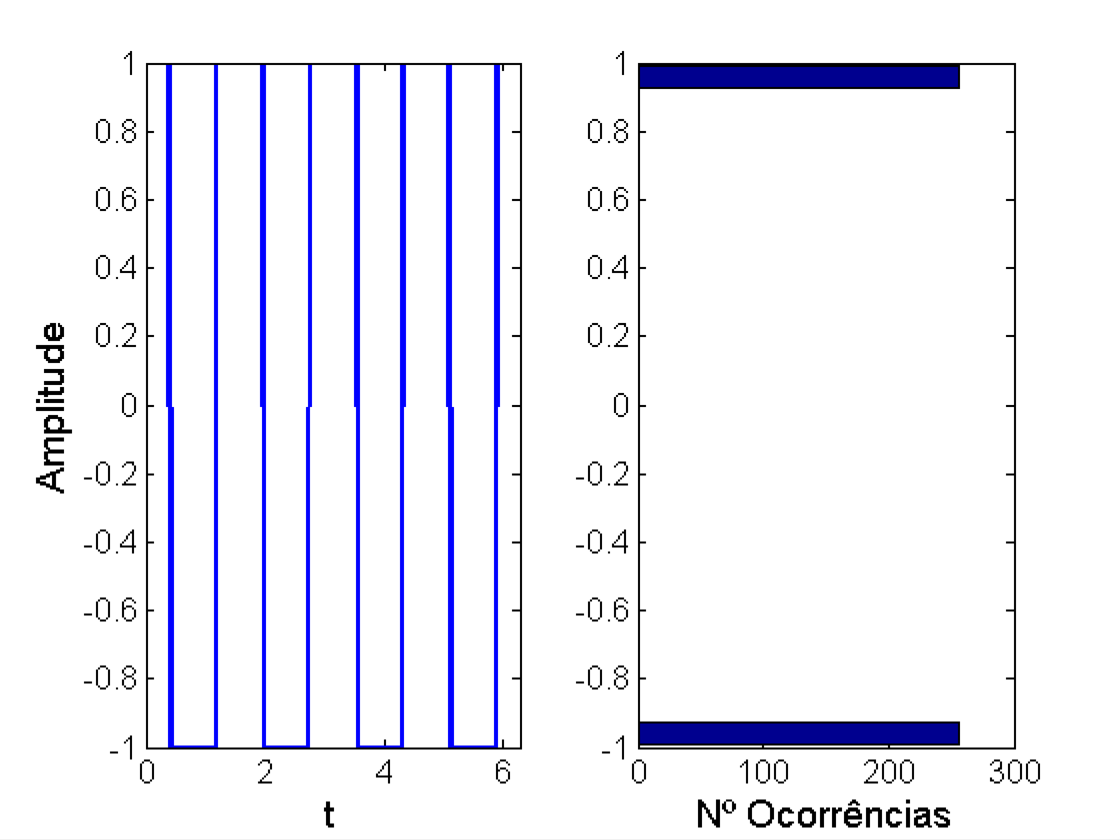


Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Densidade de Probabilidade

    Exemplos de sinais: Onda quadrada



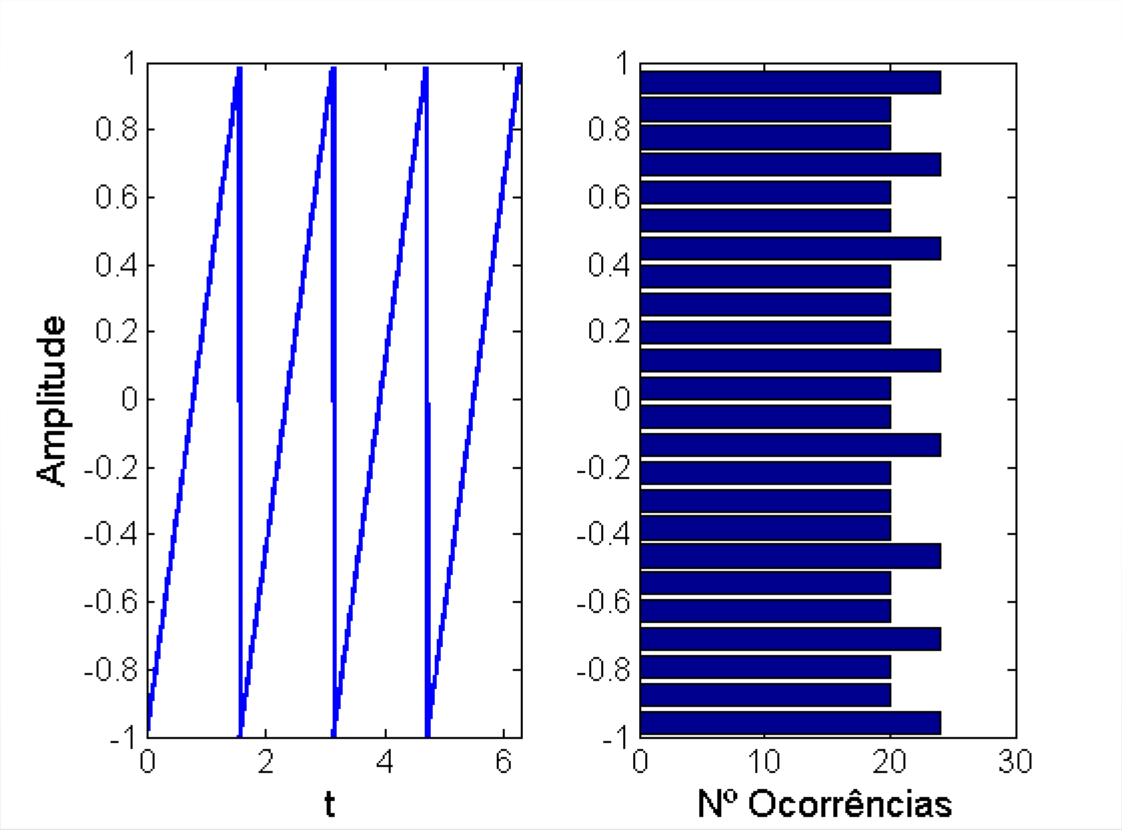
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: Dente de serra



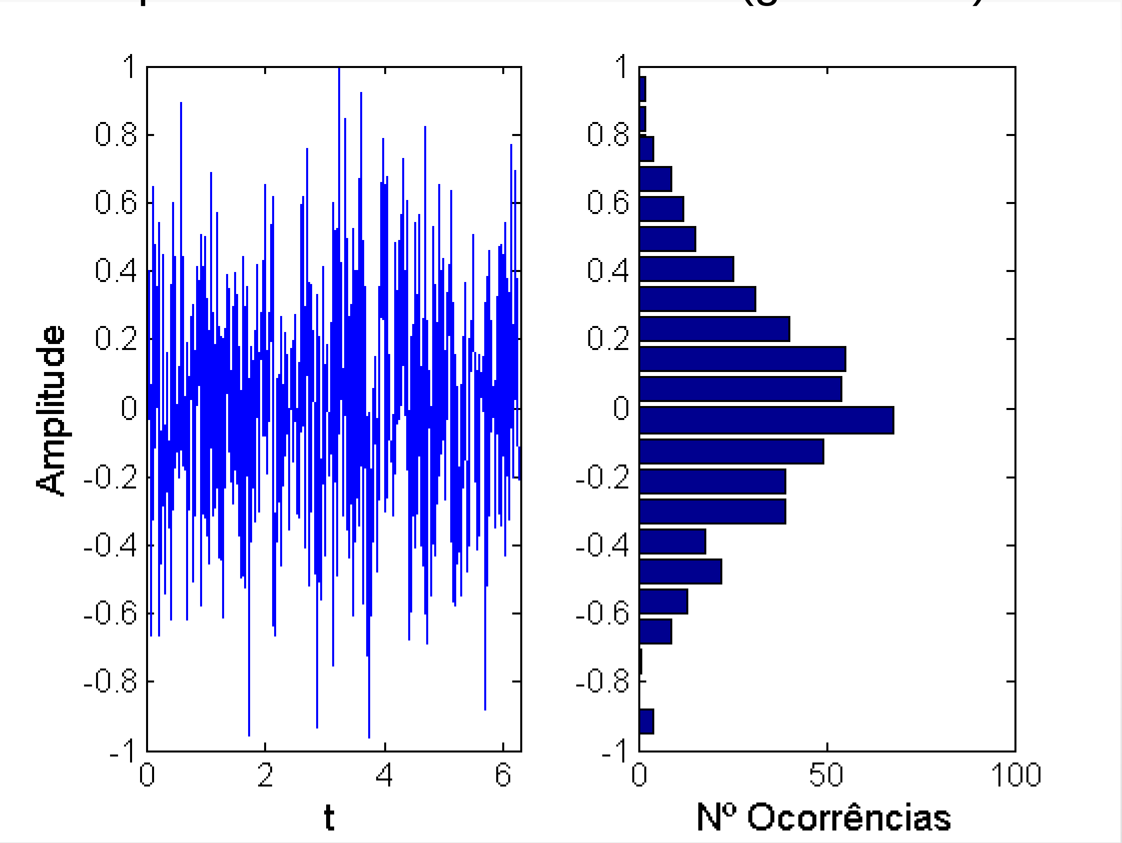
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: ruído normal (gaussiano)



Análise de dados experimentais

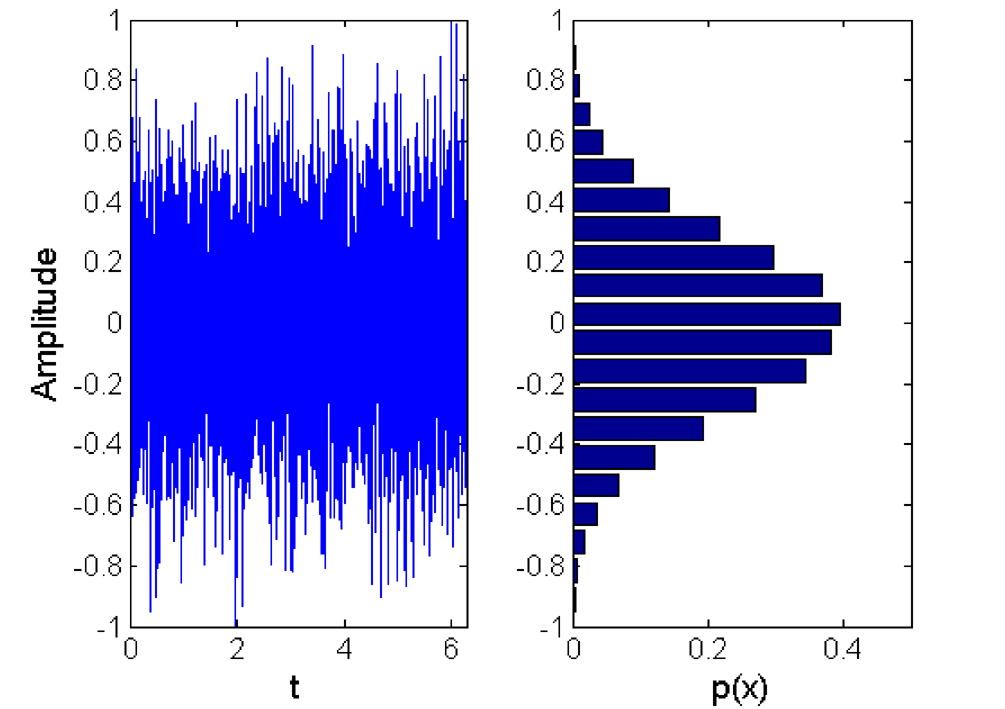
I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{intervalos} \rightarrow \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{\text{intervalos}} \to \infty, \delta x \to 0} n_{ocorrências} \big/ N(\delta x)$$



Análise de dados experimentais

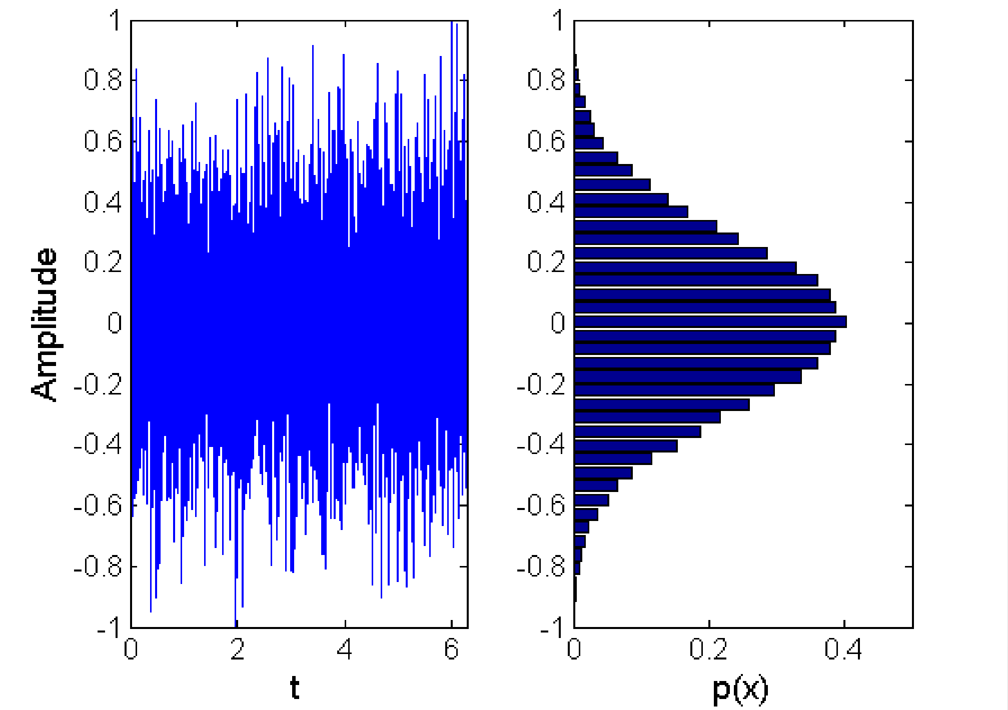
I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{intervalos} \to \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{intervalos} \to \infty, \delta x \to 0} n_{ocorrências} \Big/ N(\delta x)$$

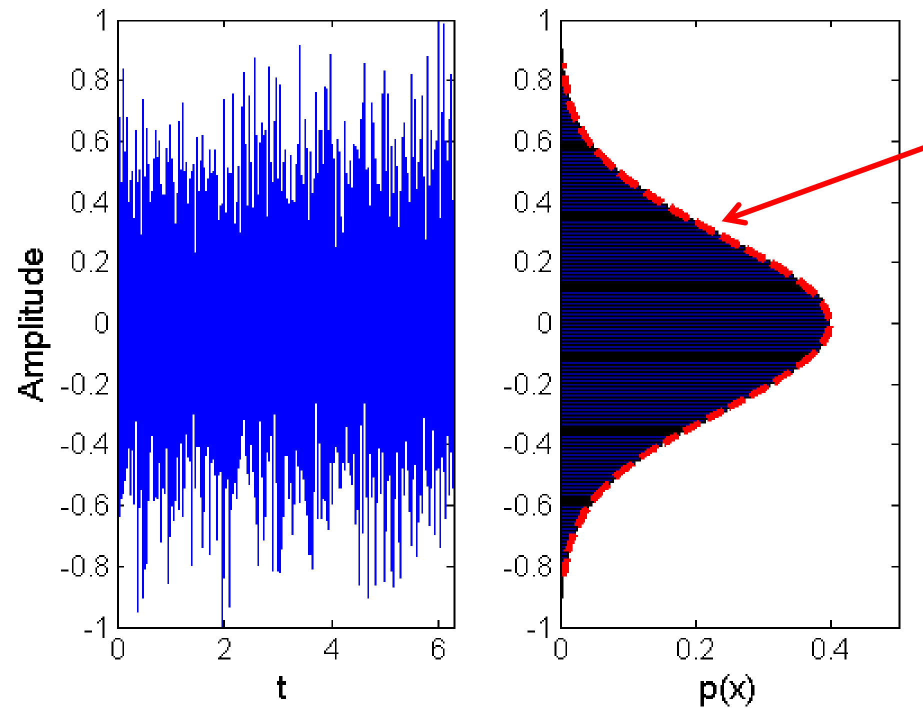


➢Análise de Sinais (introdução):

➢Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{intervalos} \to \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{intervalos}\to\infty,\delta x\to 0} n_{ocorrências} \Big/ N(\delta x)$$



Distribuição Normal ou gaussiana

Análise de dados experimentais

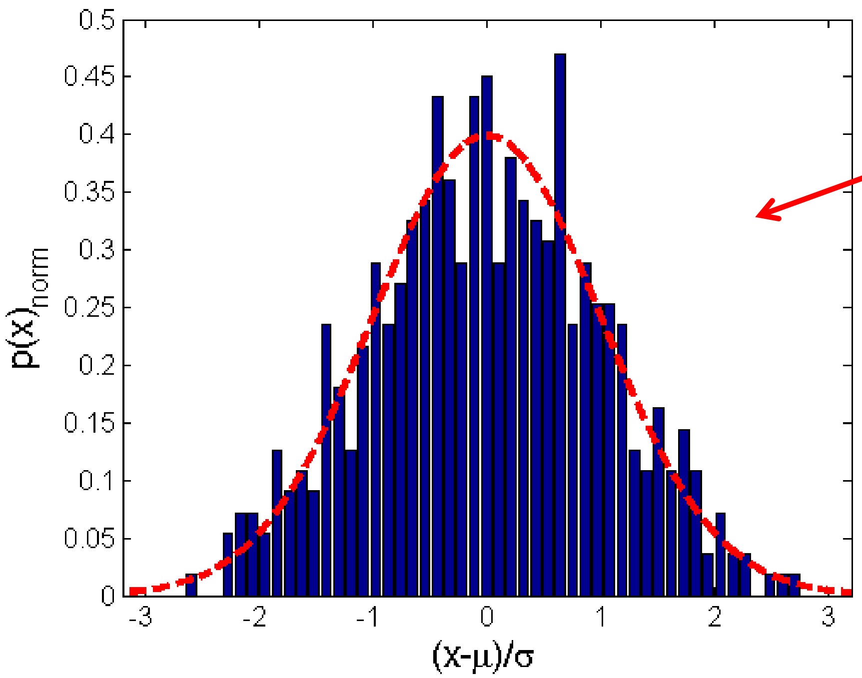
I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Função Densidade de Probabilidade (PDF) – dados discretos

$$p(x) = \left(\frac{n_{ocorrências}}{N_{amostras}} \right) \Big/ \Delta x \quad ; \quad p(x)_{Normalizada} = p(x) \cdot \sigma$$

$$x_{normalizado} = (x - \mu) \big/ \sigma$$



PDF – área sob a curva =1

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Aproximação polinomial de ordem *m* dos dados:

$$f(x) = y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots a_m x^m$$

A relação polinomial deve ser encontrada para um conjunto de N pontos de dados [da forma (x_i, y_i)].

Dedução para eq. do 1º grau:

$$f(x) = y = a_0 + a_1 x$$

onde y é a resultado da equação de ajuste e a_0 e a_1 são, respectivamente, os coeficientes linear e angular.

O desvio do ajuste pode ser dado por:

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

onde Y_i é um dos pontos medidos e y_i o ponto fornecido pelo ajuste

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

O objetivo é obter coeficientes que minimizem a soma dos erro quadrados, de modo que:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i - y)^2 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i - a_1 x - a_0)^2 = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_1} \sum \left(Y_i^2 - 2Y_i a_1 x - 2Y_i a_0 + a_1^2 x^2 + 2a_1 x a_0 + a_0^2\right) = 0$$

$$= 2\sum (Y_i - a_1 x - a_0)(-x) = 0$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

O objetivo é obter coeficientes que minimizem a soma dos erro quadrados, de modo que:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum (Y_i - y)^2 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum (Y_i - a_1 x - a_0)^2 = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_0} \sum \left(Y_i^2 - 2Y_i a_1 x - 2Y_i a_0 + a_1^2 x^2 + 2a_1 x a_0 + a_0^2\right) = 0$$

$$= 2\sum (Y_i - a_1 x - a_0)(-1) = 0$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Resolvendo para a_0:

$$\sum Y_i - a_1 \sum x - n a_0 = 0$$

$$a_0 = \frac{\sum Y_i - a_1 \sum x}{n}$$

E substituindo para encontrar a_1 :

$$\sum Y_i x - a_1 \sum x^2 - a_0 \sum x = 0$$

$$\sum Y_i x - a_1 \sum x^2 - \frac{\left(\sum Y_i - a_1 \sum x\right)}{n} \sum x = 0$$

$$a_1 = \frac{\sum Y_i \sum x - n \sum Y_i x}{\left(\sum x\right)^2 - n \sum x^2}$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Erro padrão do ajuste (1ª ordem):

$$S = \sqrt{\frac{\Delta^2}{N-2}} \rightarrow \quad S = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - y)^2}{N-2}}$$

$$S_{a0} = S\sqrt{\frac{\sum x^2}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}} \qquad S_{a1} = S\sqrt{\frac{n}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}}$$

De maneira simplificada, é possível estimar um intervalo de confiança para os dados em torno do ajuste a partir do erro padrão experimental

$$\pm t_{N-1,P}\frac{S}{\sqrt{N}} \ (\%P)$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Onde o expoente T se refere a transposta da matriz e -1 a inversa, com as matrizes *x,y* e *a* sendo :

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$x^T x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix}$$

$$x^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$\left(x^T x\right)^{-1} = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix}$$

Substituindo:

$$\left(x^T x\right)^{-1} x^T y = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

$$\left(x^T x\right)^{-1} x^T y = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy \\ -\sum x \sum y + n\sum xy \end{bmatrix}$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$\left(x^T x\right)^{-1} x^T y = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy \\ -\sum x \sum y + n \sum xy \end{bmatrix}$$

Equação encontrada anteriormente:

$$a_1 = \frac{\sum Y_i \sum x - n \sum Y_i x}{\left(\sum x\right)^2 - n \sum x^2}$$

Análise de dados experimentais

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Polinômios de mais alta ordem também podem ser ajustados usando essa operação:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Só que nesses casos as matrizes ficam:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Regressões de múltiplas variáveis também podem ser obtidas

Análise de dados experimentais

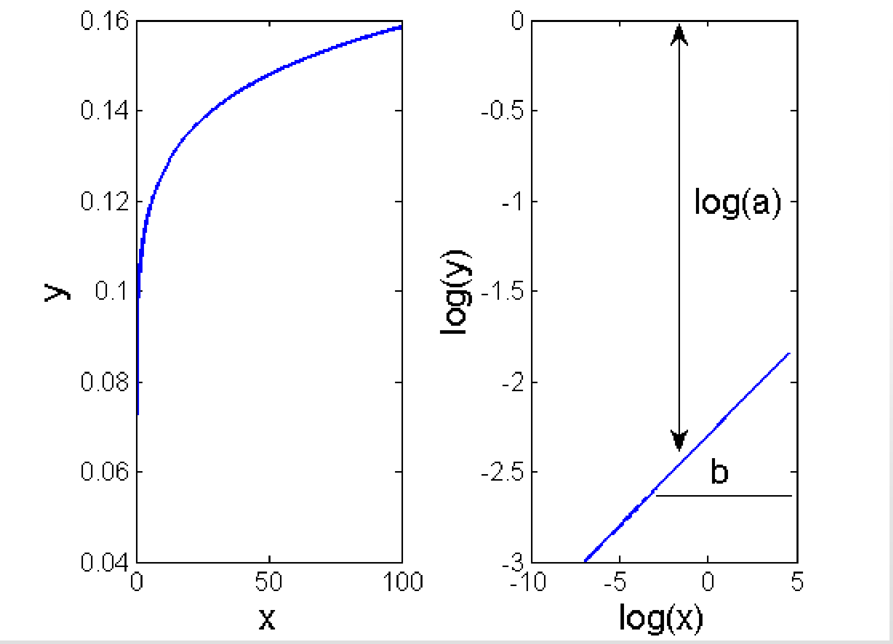
I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = ax^b$



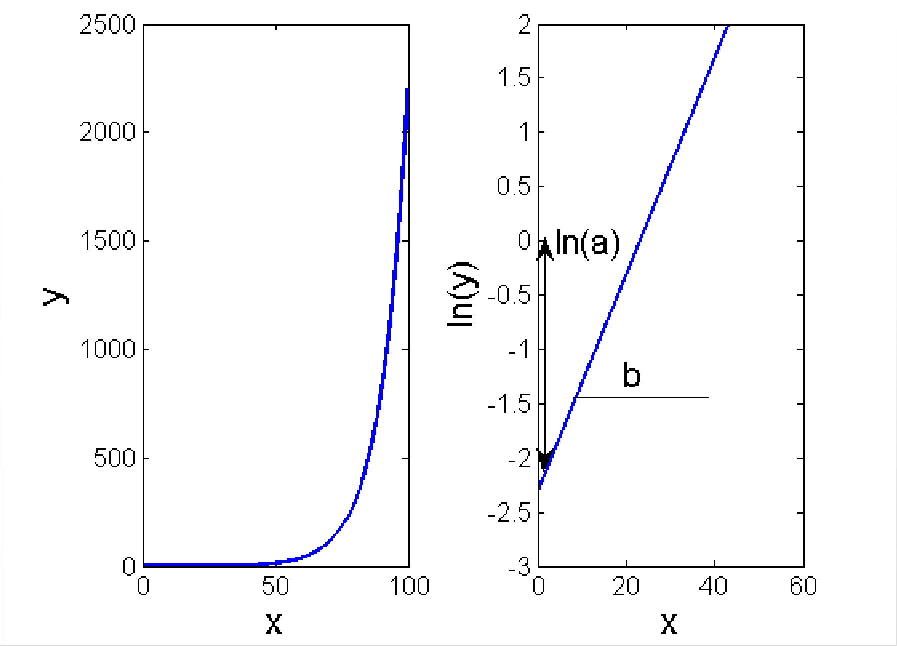
Análise de dados experimentais

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

    O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

    Ex.: $y = ae^{bx}$



Análise de dados experimentais

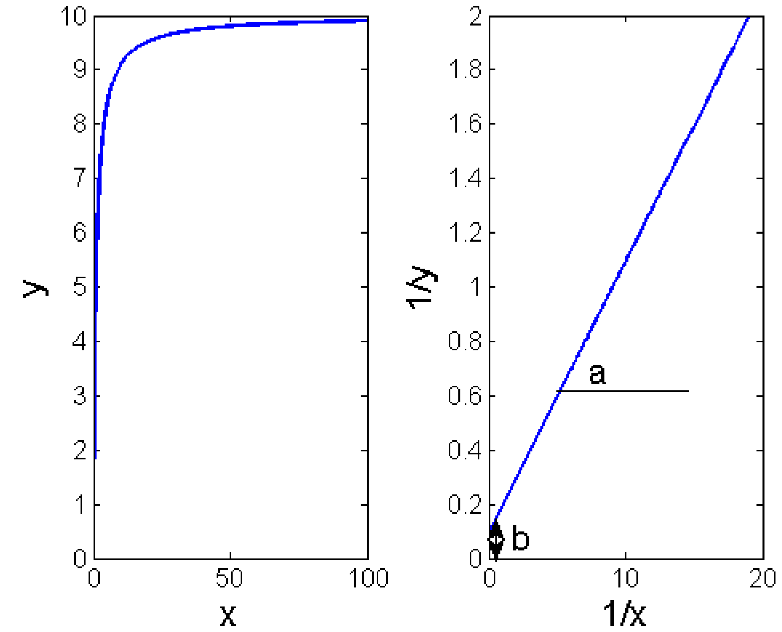
I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = \dfrac{x}{a+bx}$



Análise de dados experimentais

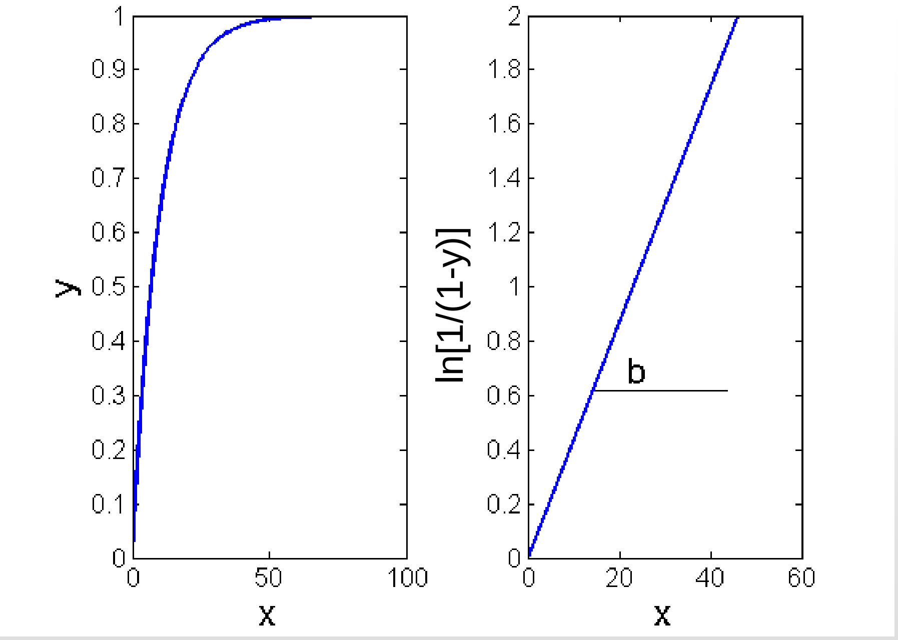
I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = 1 - e^{-bx}$



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex. $y = a + b\sqrt{x}$