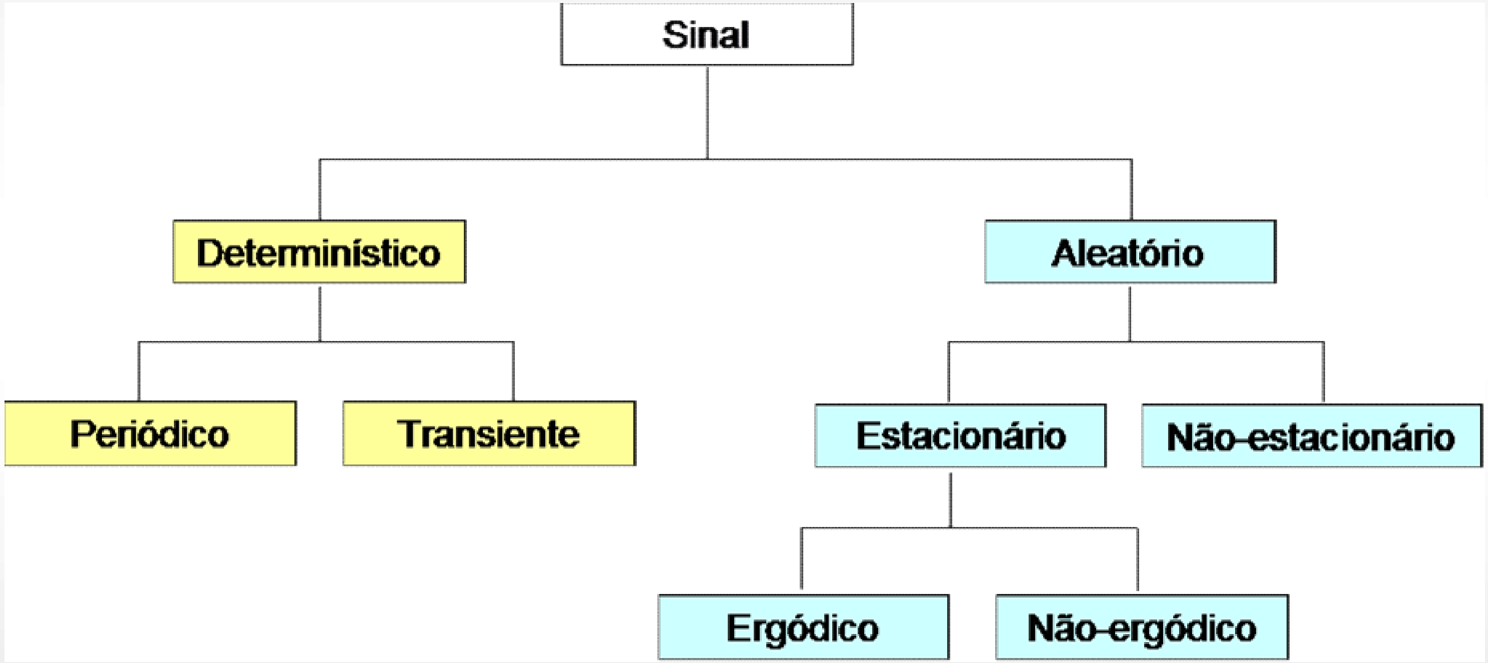
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

- O objetivo desta aula é apresentar técnicas e conceitos básicos de condicionamento e análise de sinais que são comumente empregados durante o processo de medição de grandezas físicas por meio de instrumentos.

- Para se aprofundar no tema o livro: *Random data: Analysis and Measurement Procedures, dos autores: J. S. Bendat; A. G. Piersol,* é uma boa referência para estudo.

➢ **Tipos de sinal**

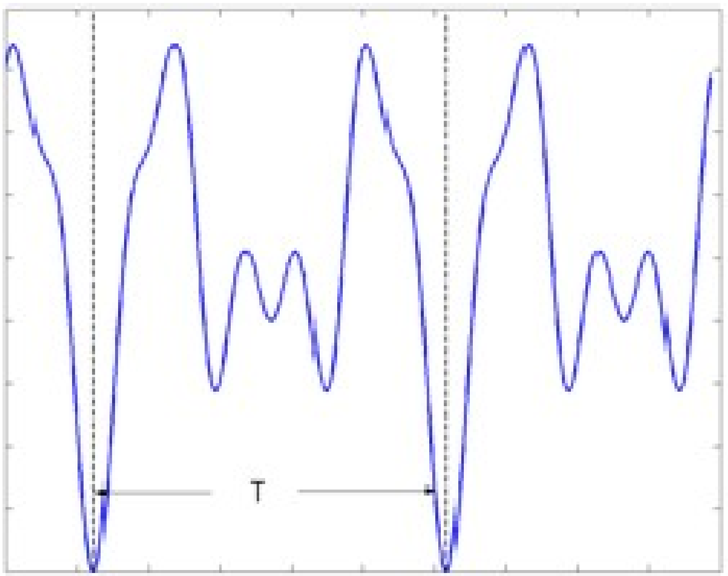


Aula de Medidas Dinâmicas

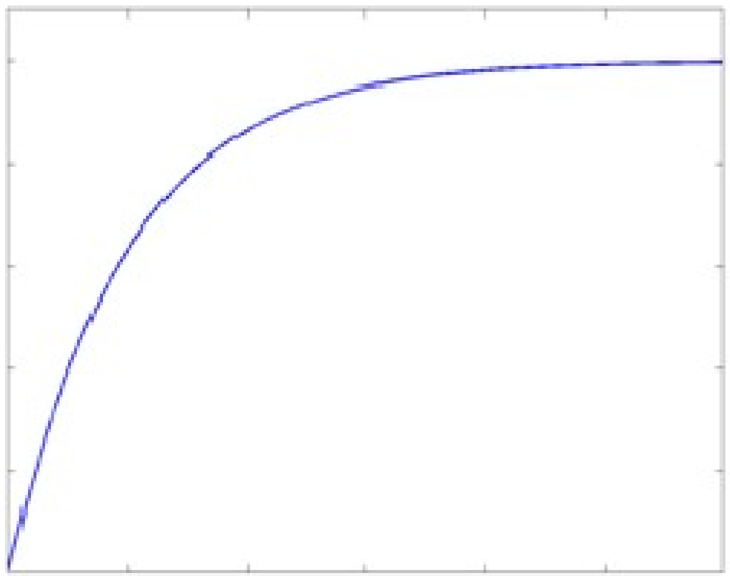
I.B De Paula

- **Tipos de sinal:**
  - Determinístico: *Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração*.

Periódico



Transiente



Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

- **Tipos de sinal:**
  - <u>Determinístico</u>:*Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração*.

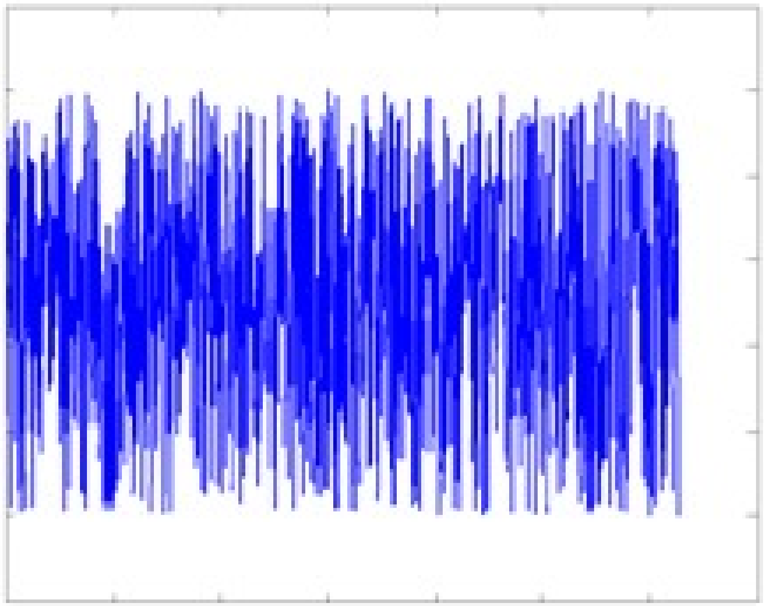
Periódico. Ex:

Transiente. Ex:

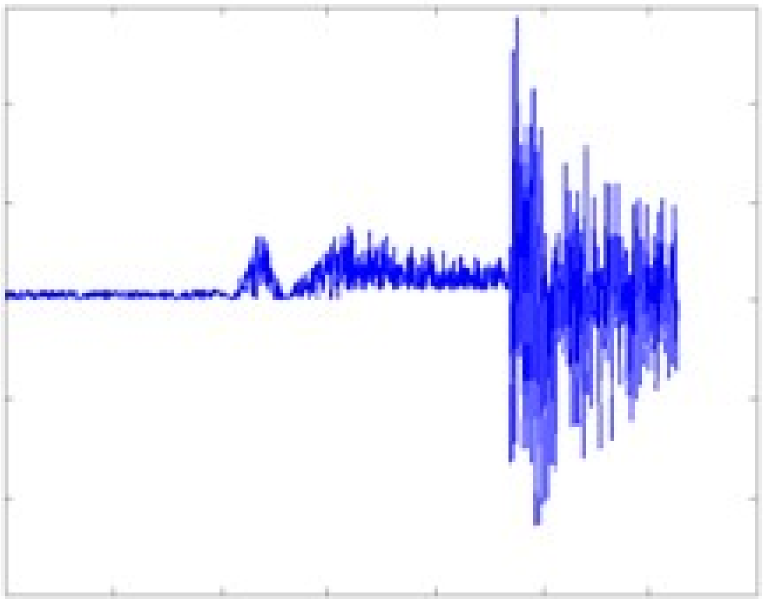
➢**Tipos de sinal:**

➢Estocástico (Aleatório): *possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário

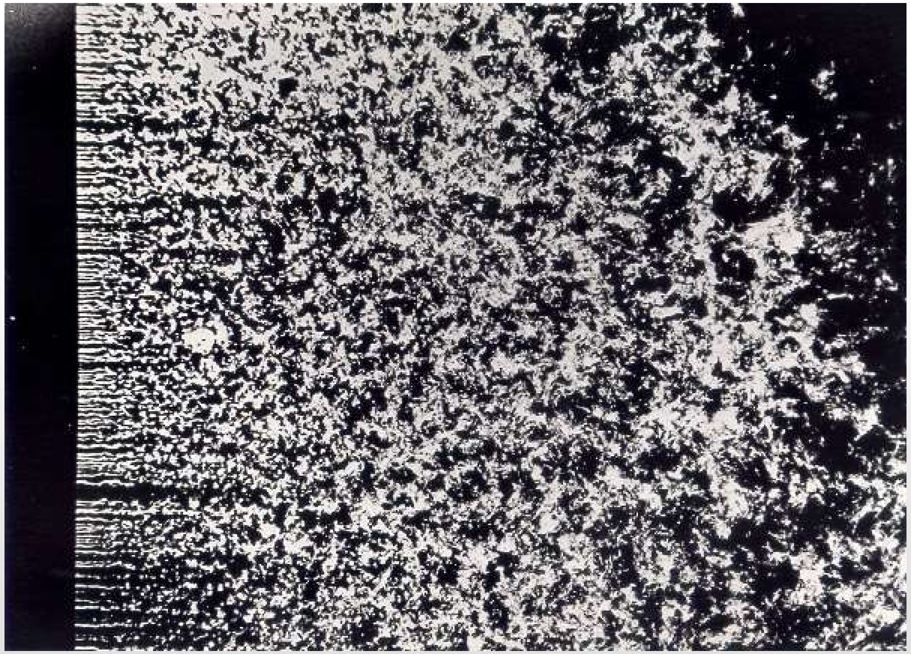


Não Estacionário

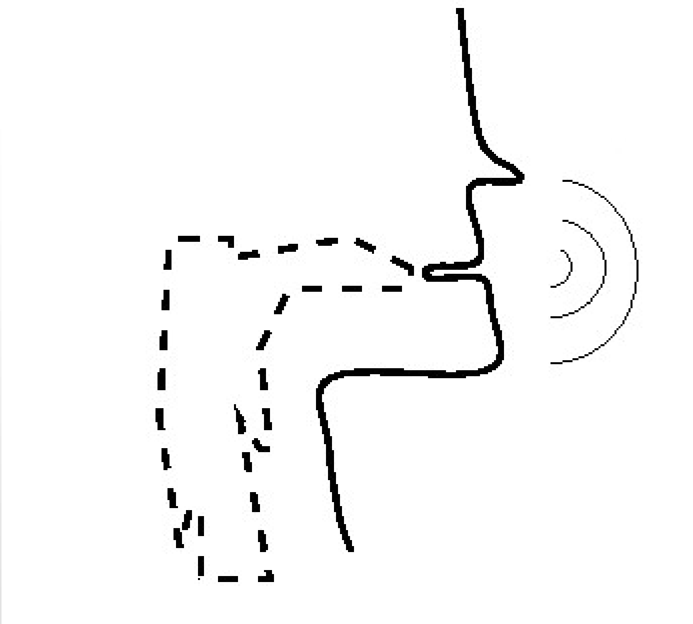


- **Tipos de sinal:**
  - Estocástico (Aleatório): *possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário. Ex:



Não Estacionário. Ex:



- **Tipos de sinal:**
  - Estocástico (Aleatório):

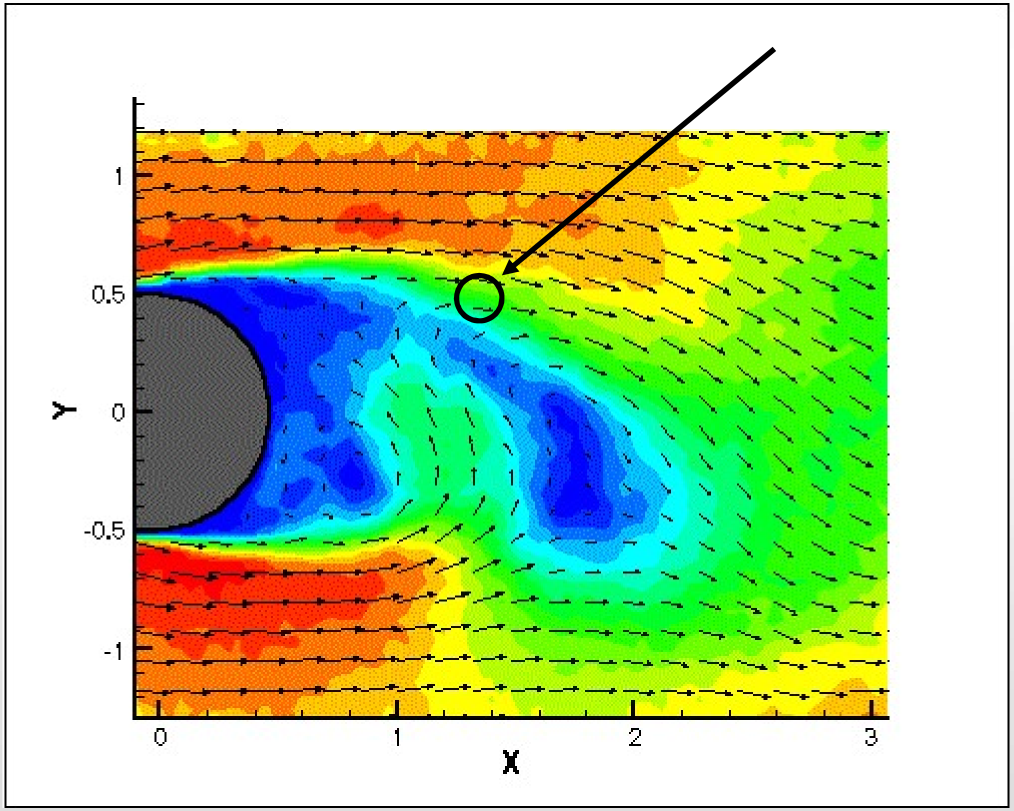
Estacionário ergódico: *propriedades estatísticas não dependem do tamanho da amostra, ou seja as médias temporais e as médias de eventos são iguais.*

Estacionário não ergódico: *somente estatísticas de ordem mais elevada apresentam invariância no tempo.*

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

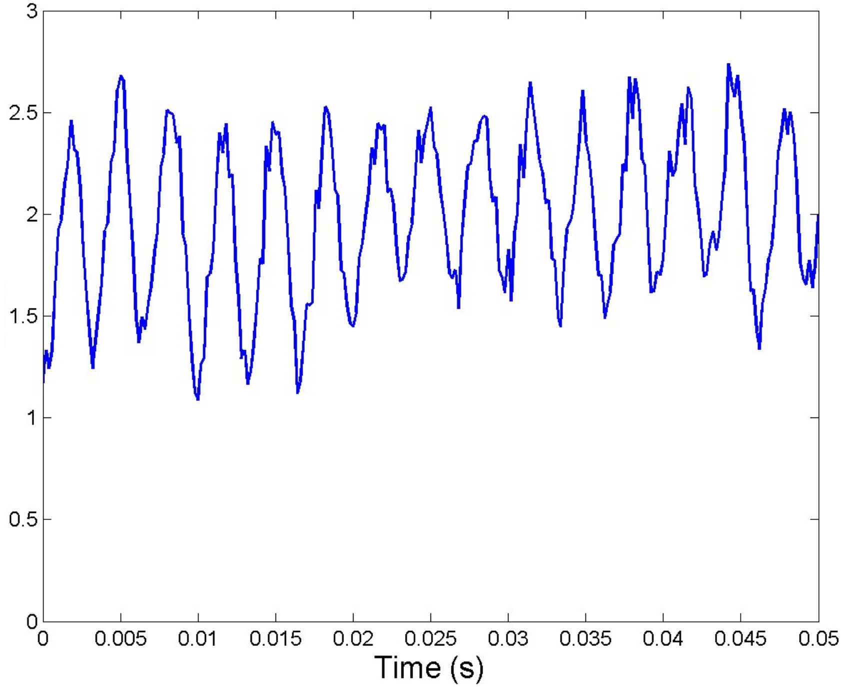
➢<u>Exemplo</u>: Escoamento na esteira de um cilindro



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

➢<u>Exemplo</u>: Escoamento na esteira de um cilindro.
Série temporal de 1 ponto no espaço medido com anemômetro a quente.



Aula de Medidas Dinâmicas

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Medidas de amplitude (Distribuição Normal):

  - Componente média (DC) — Componente alternada (AC)

Valor médio

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} x_j$$

Vários estimadores
Ex.:desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\left(x_j - \mu\right)^2}$$

  - Período de integração

Não dá informação sobre características do sinal

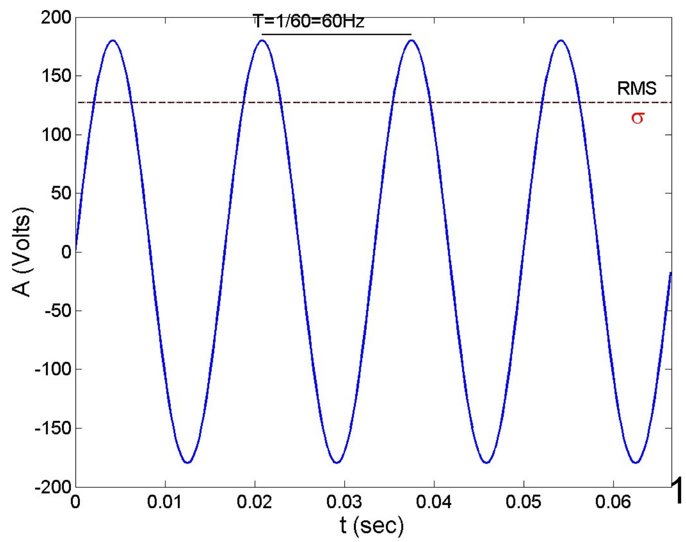
Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - <u>Medidas de amplitude</u>:
  - Em eletrônica os sinais são geralmente definidos em termos de seu valor RMS.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\left(x_j\right)^2}$$

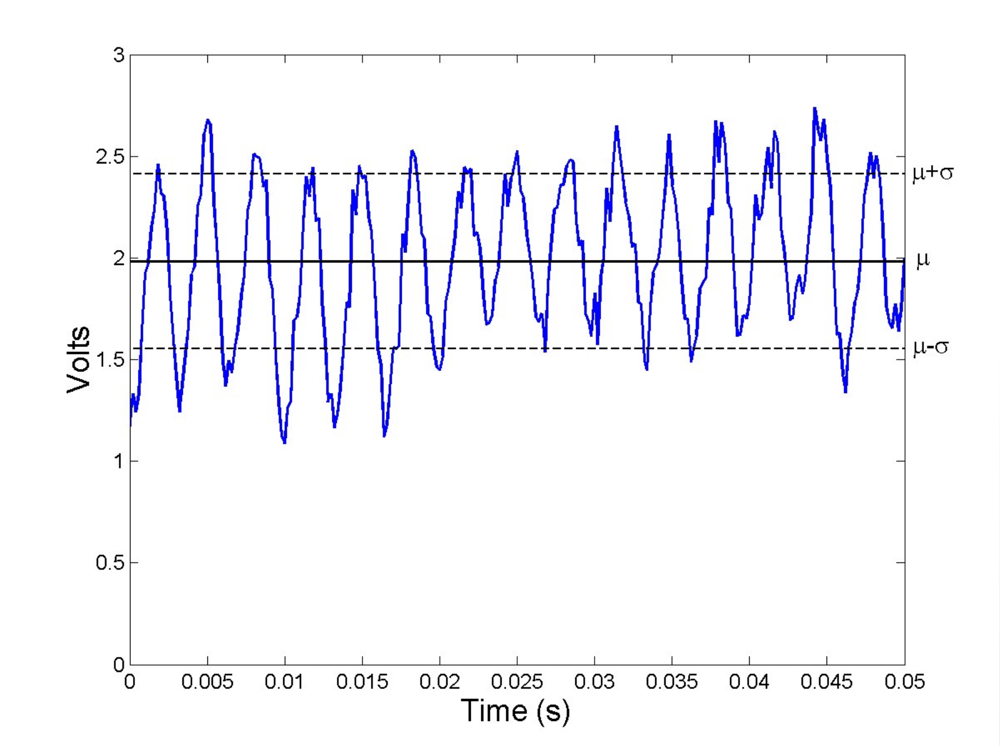
- Sinais sem componente média tem os valores RMS e de desvio padrão iguais.
- Ex: Tensão da rede
  Vpp=2*180V
  Vrms=127V



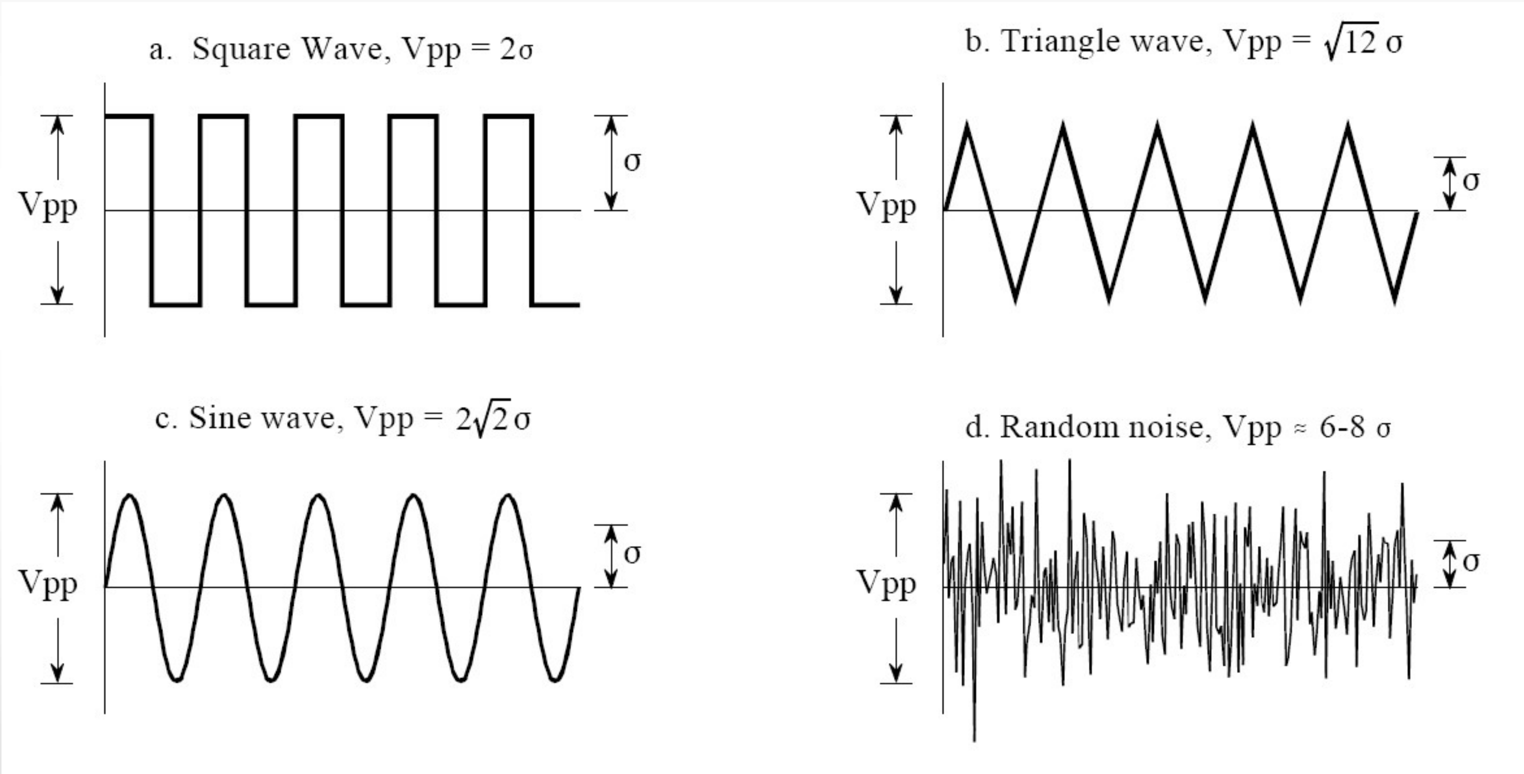
Aula de Medidas Dinâmicas

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Exemplo: Escoamento na esteira de um cilindro.
Série temporal de 1 ponto no espaço medido com anemômetro de fio quente.

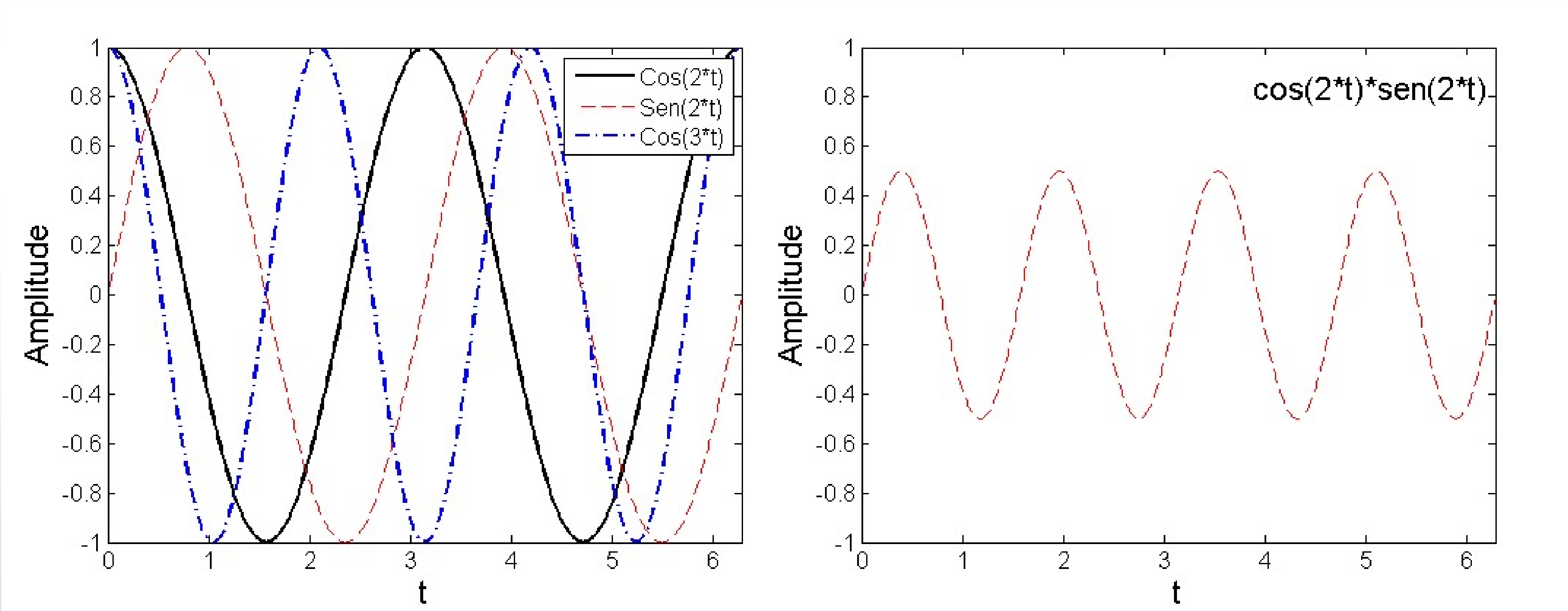


- **Análise de Sinais (introdução):**
  - <u>Exemplo</u>: Diferentes formas de onda



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

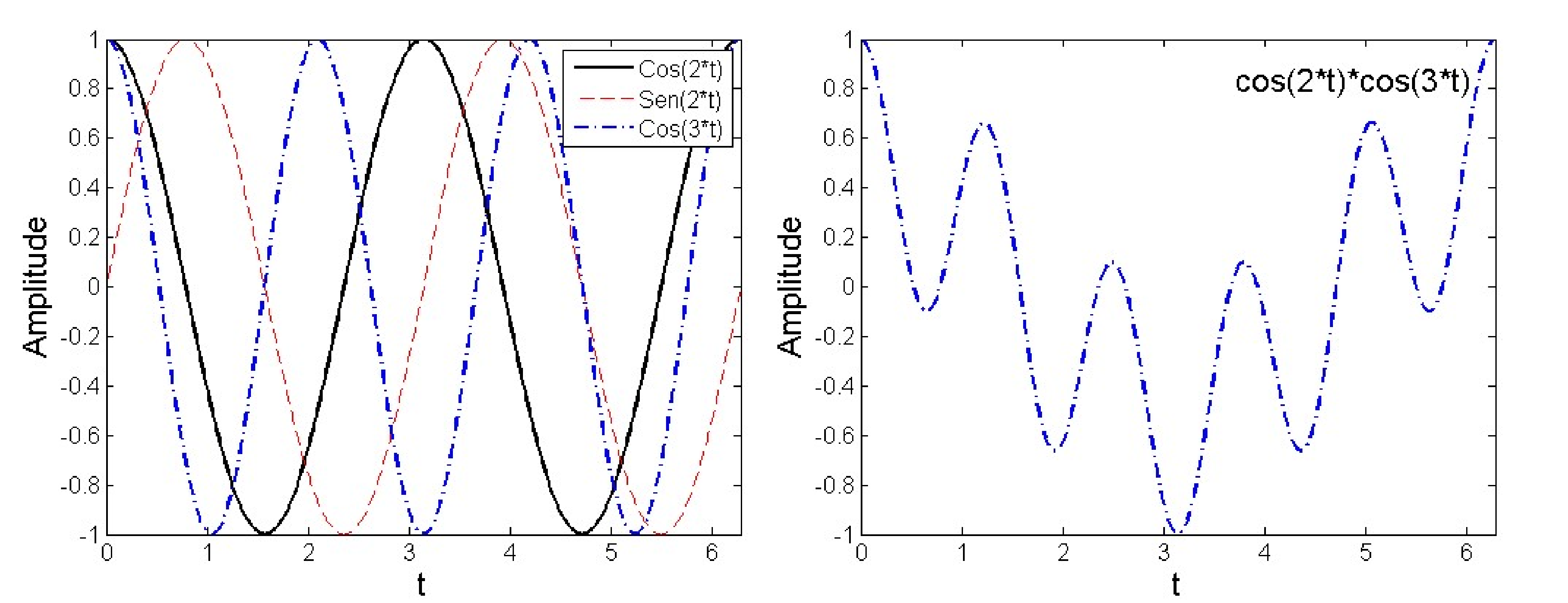
$$\mathrm{cov}(X,Y)=\sum_{j=1}^{N}\frac{(X_j-\mu_X)(Y_j-\mu_j)}{N}$$



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

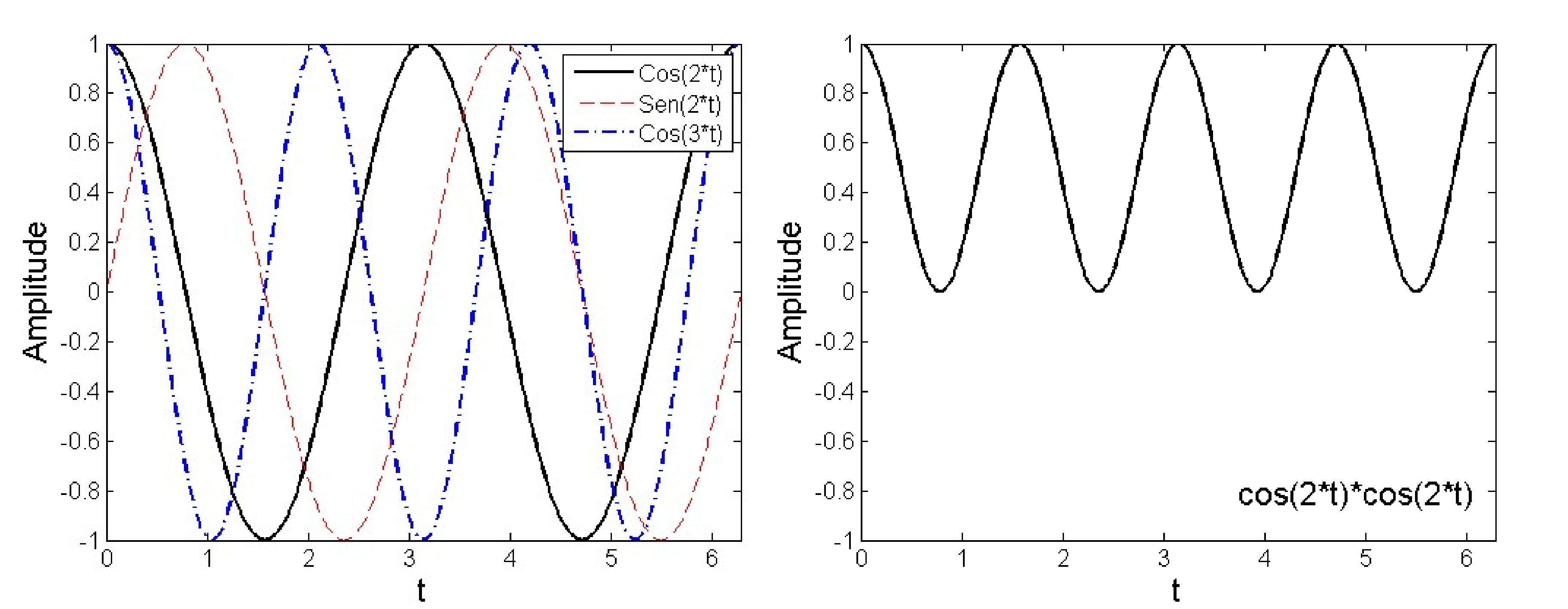
$$\mathrm{cov}(X,Y)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(X_j-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_j\right)}{N}$$



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Covariância (medida da correlação entre 2 sinais).

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\sum_{j=1}^{N}\frac{(X_j-\mu_X)(Y_j-\mu_j)}{N}$$

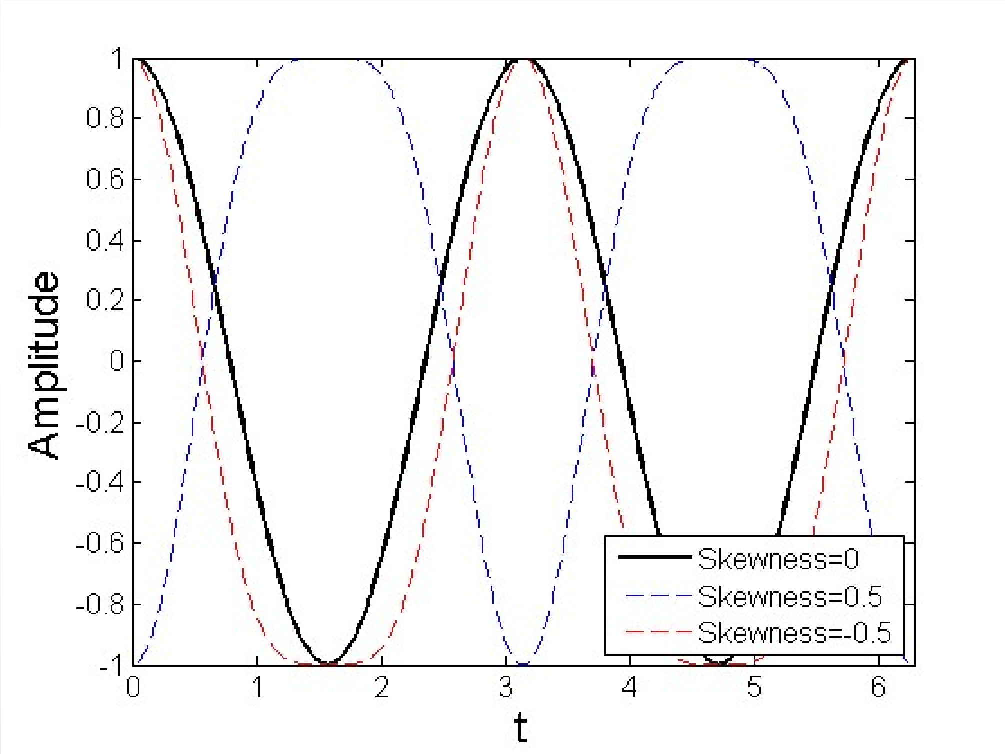


A covariância nesse exemplo só é diferente de 0 para o caso de cos(2*t)*cos(2*t)

➢Análise de Sinais (introdução):

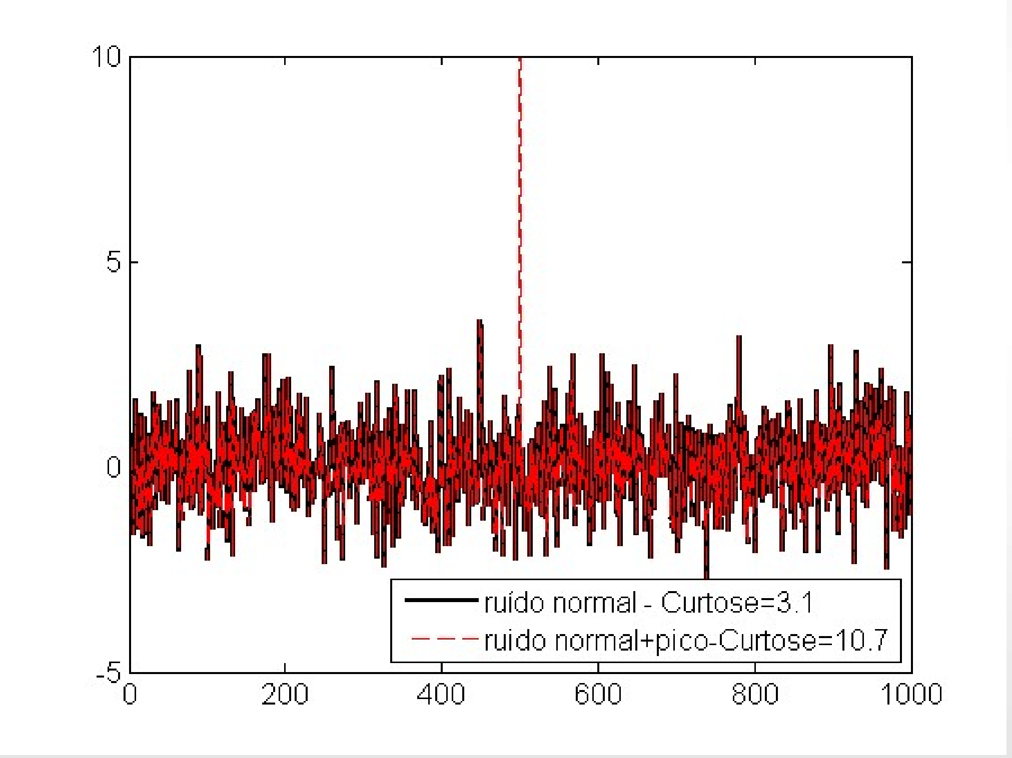
➢Coeficiente de assimetria (*skewness*).

$$skewness = \frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^2}\right)^3}$$



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Curtose (medida de forma distribuição de probabilidades).

$$Curtose = \frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^4}{\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_X\right)^2\right)^2}$$



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Razão entre sinal de interesse e ruído (*signal to noise ratio – SNR*).

$$SNR = \frac{P_{\text{sinal}}}{P_{ruido}} = \left(\frac{A_{RMS\text{sinal}}}{A_{RMSruído}} \right)^2$$

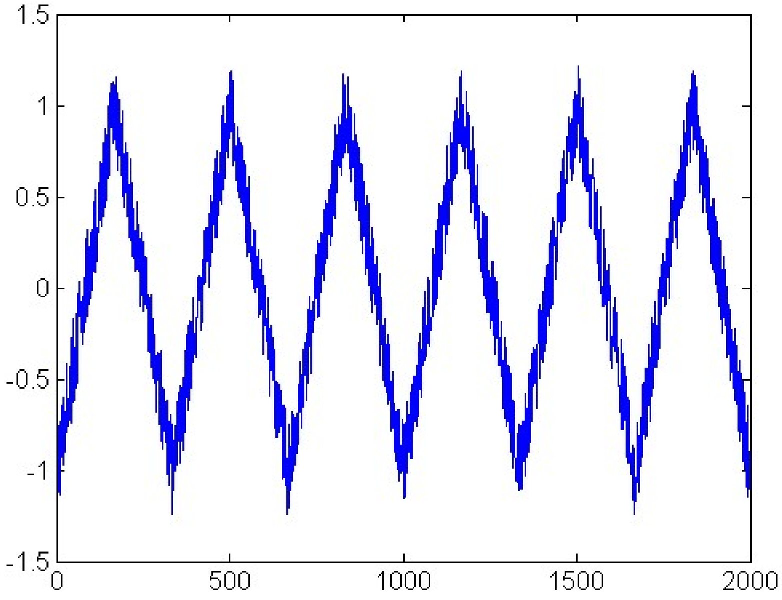
➢No caso onde o sinal de interesse é a média, uma definição alternativa pode ser utilizada.

$$SNR = \frac{\mu}{\sigma}$$

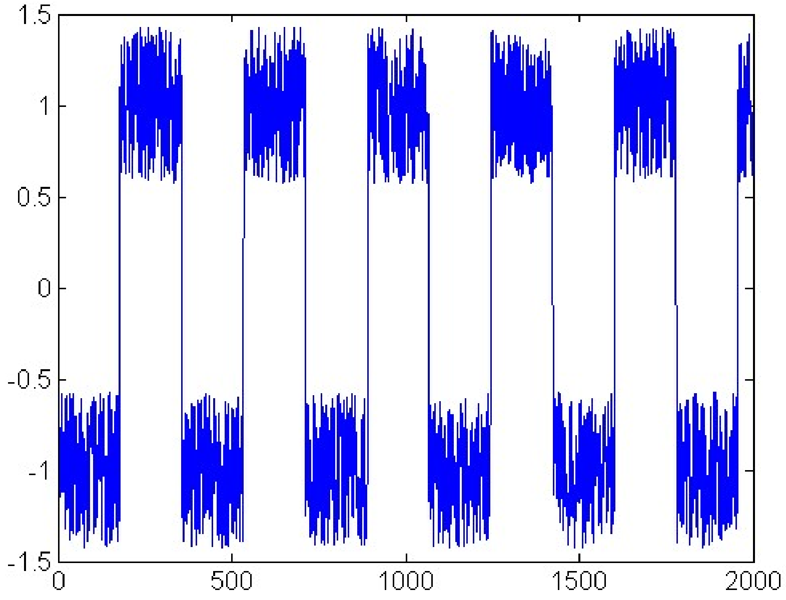
Aula de Medidas Dinâmicas

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Razão entre sinal de interesse e ruído. Qual tem maior?



SNR=4.03



SNR=4.06

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

-É a frequência em que uma variável medida adquire um valor ou uma faixa de valores.

Ex.: Medição de uma variável qualquer

Nº Medição	Valor Medido
1	5.3054
2	5.0934
3	4.9581
4	5.125
5	5.0366
6	4.794
7	5.1898
8	5.0614
9	5.027
10	5.103
11	5.0523
12	4.8117
13	4.9675
14	4.9708
15	4.8936

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

Organizando os dados em intervalos de ocorrência das medidas temos: (o número de intervalos pode ser estimado usando a relação $n_{\text{intervalos}} = 1.87 \cdot (N-1)^{0.4} + 1$)

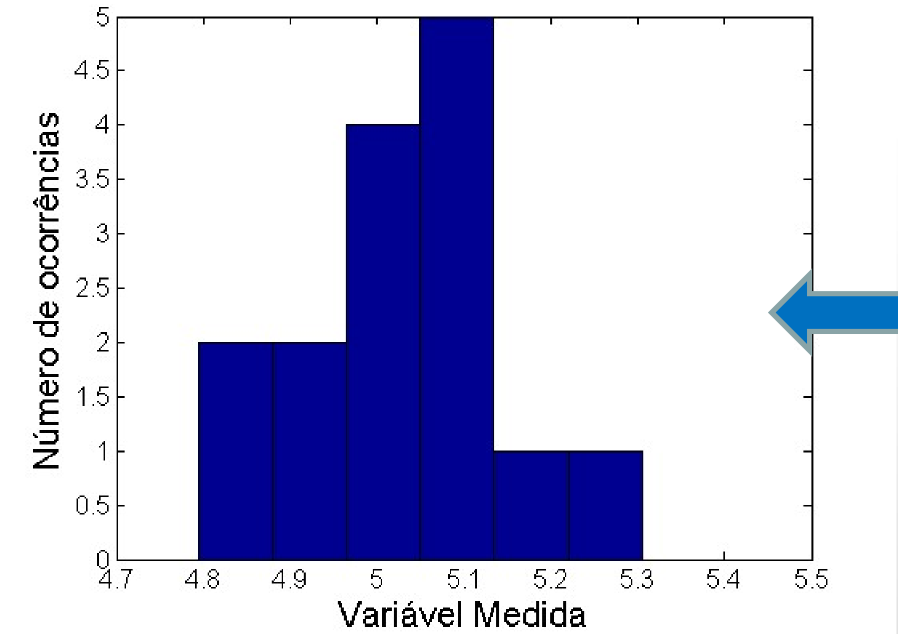
Nº Medição	Valor Medido
1	5.3054
2	5.0934
3	4.9581
4	5.125
5	5.0366
6	4.794
7	5.1898
8	5.0614
9	5.027
10	5.103
11	5.0523
12	4.8117
13	4.9675
14	4.9708
15	4.8936

Nº Intervalo	Intervalo	nº ocorrências	nº ocorrências/N $f(n_i)$
1	$4.8 \le x_i < 4.885$	2	0.13
2	$4.885 \le x_i < 4.97$	2	0.13
3	$4.97 \le x_i < 5.055$	4	0.27
4	$5.055 \le x_i < 5.14$	5	0.33
5	$5.14 \le x_i < 5.225$	1	0.07
6	$5.225 \le x_i < 5.31$	1	0.07

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

Organizando os dados em intervalos de ocorrência das medidas temos: (o número de intervalos pode ser estimado usando a relação $n_{\text{intervalos}} = 1.87 \cdot (N-1)^{0.4} + 1$)

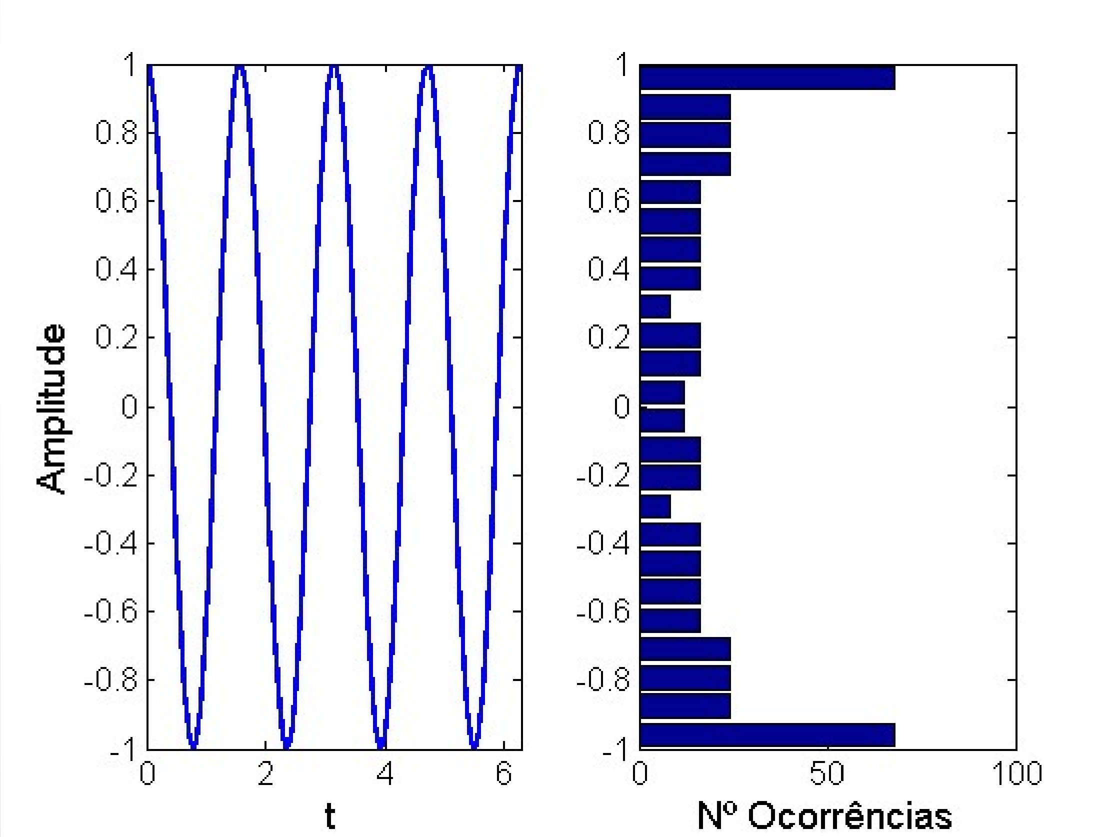


Nº Intervalo	Intervalo	nº ocorrências	nº ocorrências/N $f(n_i)$
1	$4.8 \leq x_i < 4.885$	2	0.13
2	$4.885 \leq x_i < 4.97$	2	0.13
3	$4.97 \leq x_i < 5.055$	4	0.27
4	$5.055 \leq x_i < 5.14$	5	0.33
5	$5.14 \leq x_i < 5.225$	1	0.07
6	$5.225 \leq x_i < 5.31$	1	0.07

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Densidade de Probabilidade

Exemplos de sinais: cos(4*t)

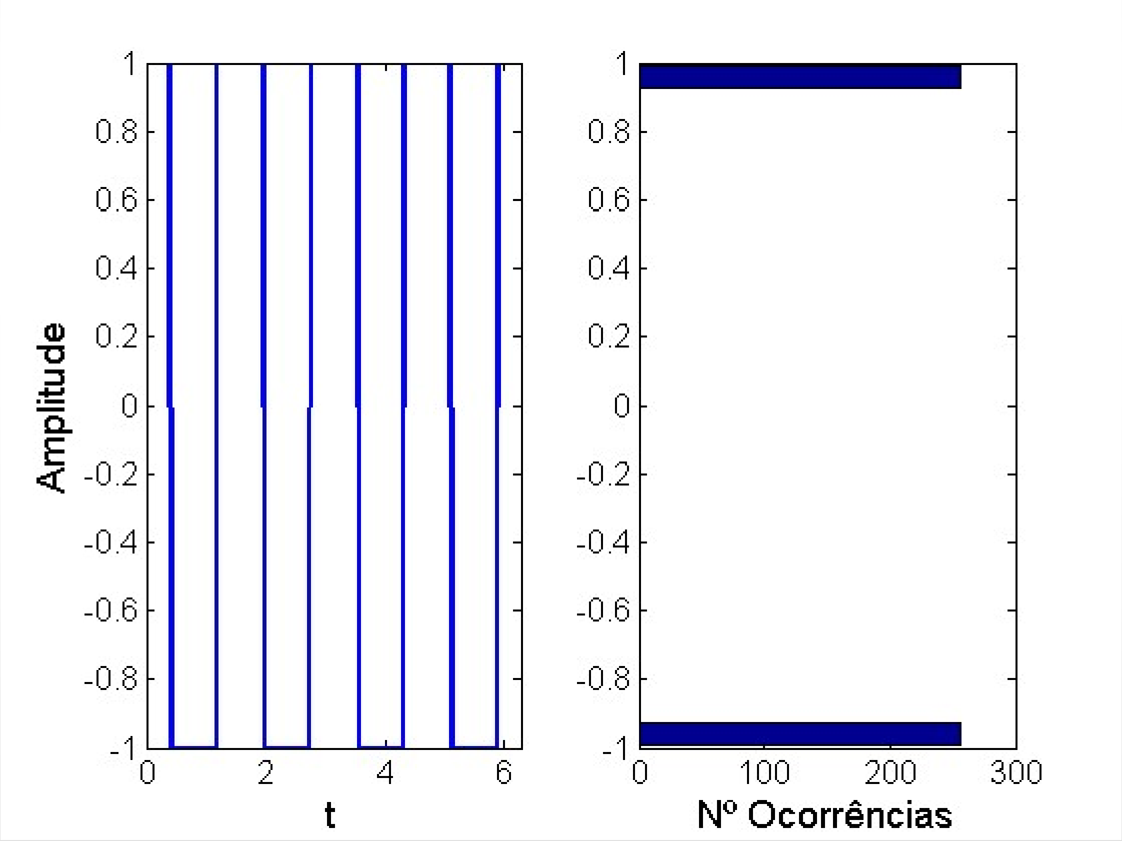


Aula de Medidas Dinâmicas

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Densidade de Probabilidade

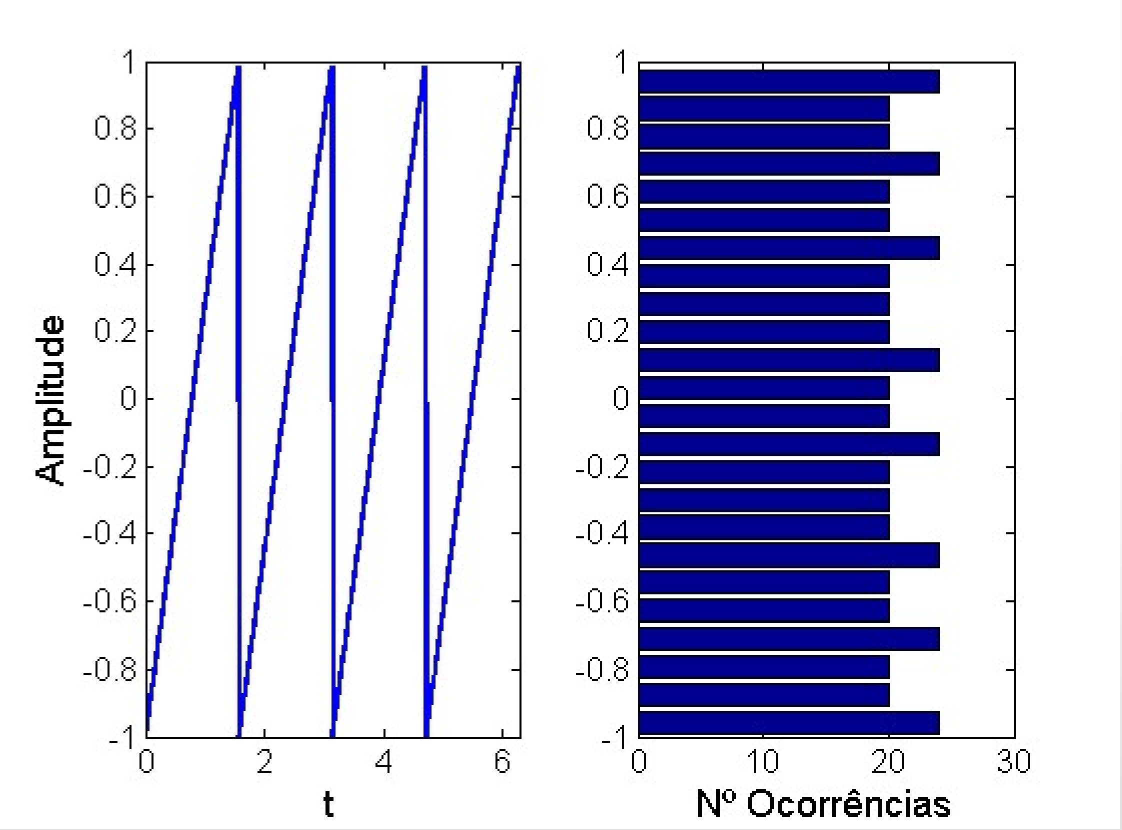
Exemplos de sinais: Onda quadrada



Aula de Medidas Dinâmicas

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Densidade de Probabilidade

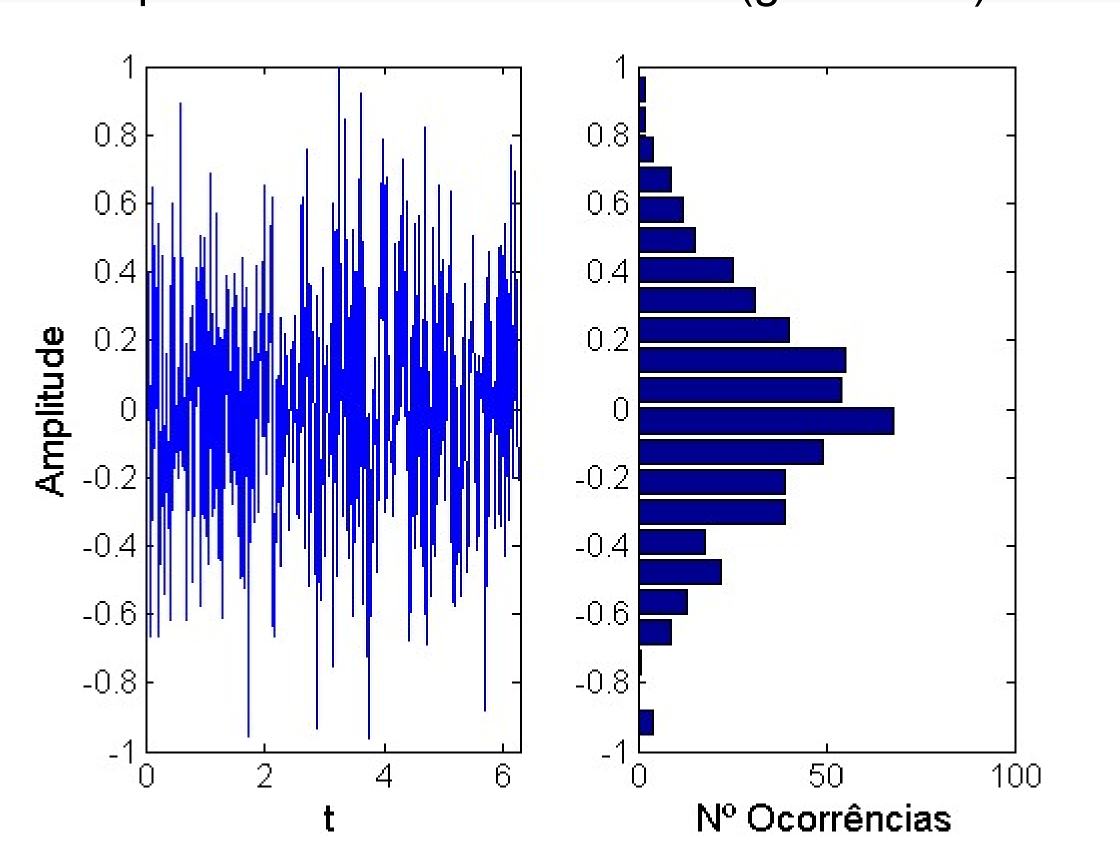
    Exemplos de sinais: cos(4*t)



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Densidade de Probabilidade

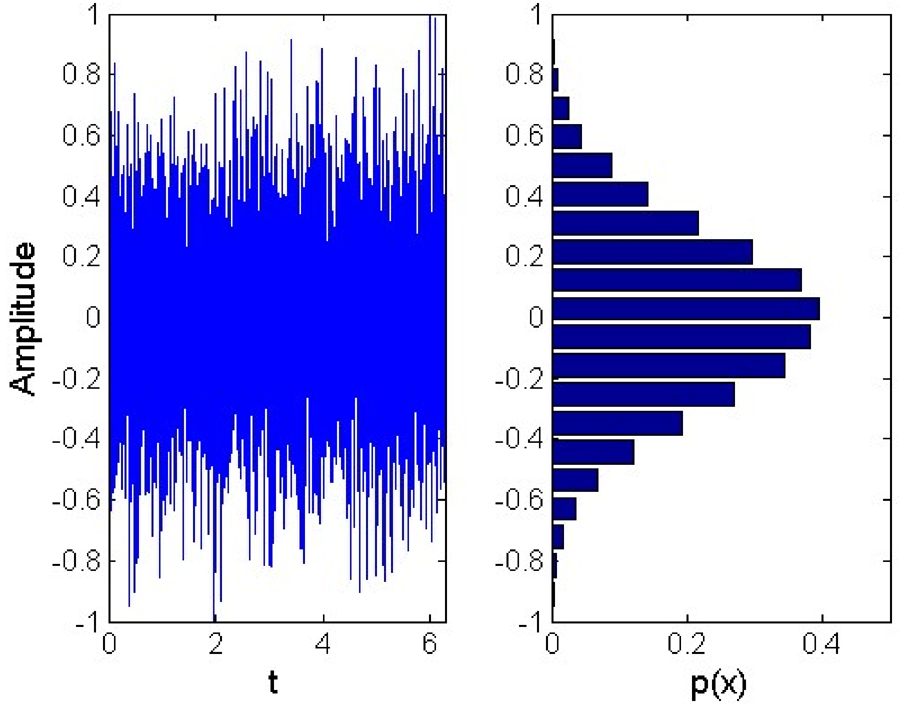
Exemplos de sinais: ruído normal (gaussiano)



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Função Densidade de Probabilidade (PDF)

    A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{intervalos} \rightarrow \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty, \delta x \rightarrow 0} n_{ocorrências} / N(\delta x)$$



Aula de Medidas Dinâmicas

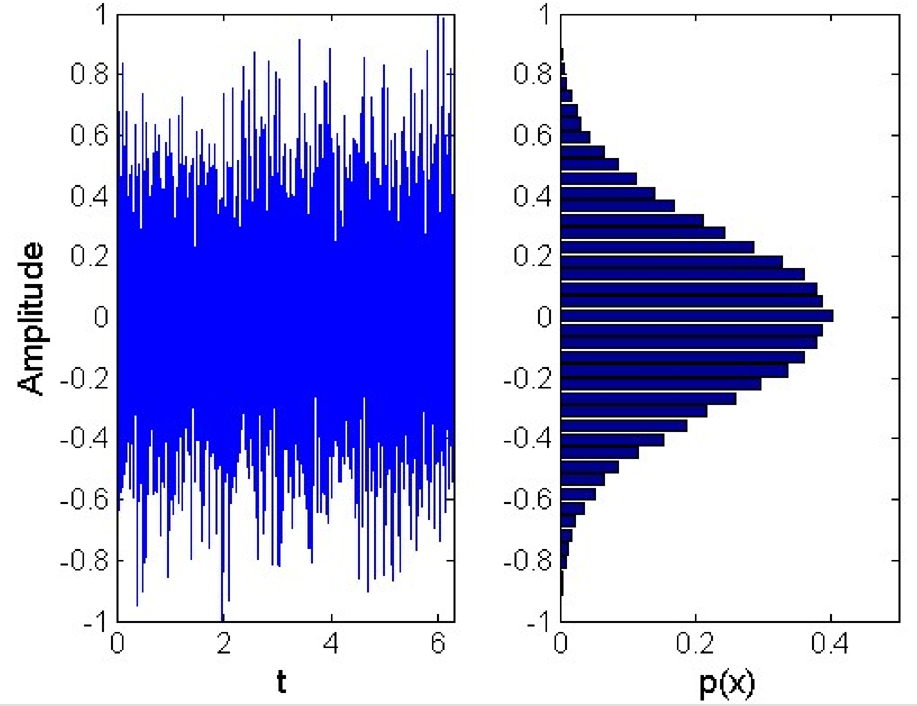
I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{intervalos} \rightarrow \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{\text{intervalos}} \rightarrow \infty, \delta x \rightarrow 0} n_{ocorrências} / N(\delta x)$$

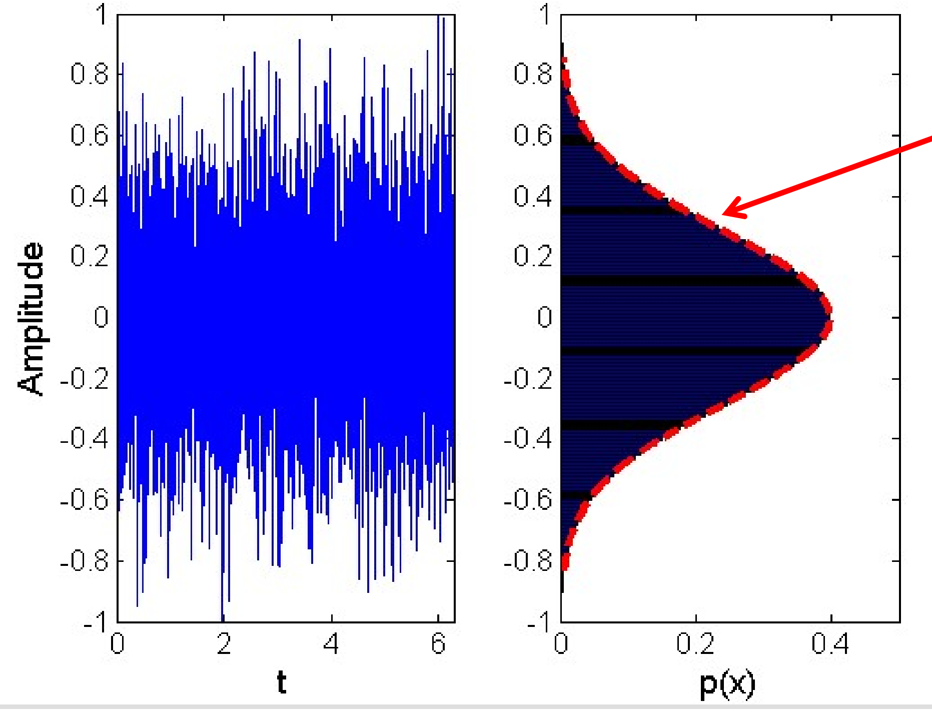


➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é resultado do histograma de ocorrências, no limite quando $n_{intervalos} \rightarrow \infty$

$$p(x) = \lim_{n_{\text{intervalos}} \to \infty, \delta x \to 0} \frac{n_{ocorrências}}{N(\delta x)}$$

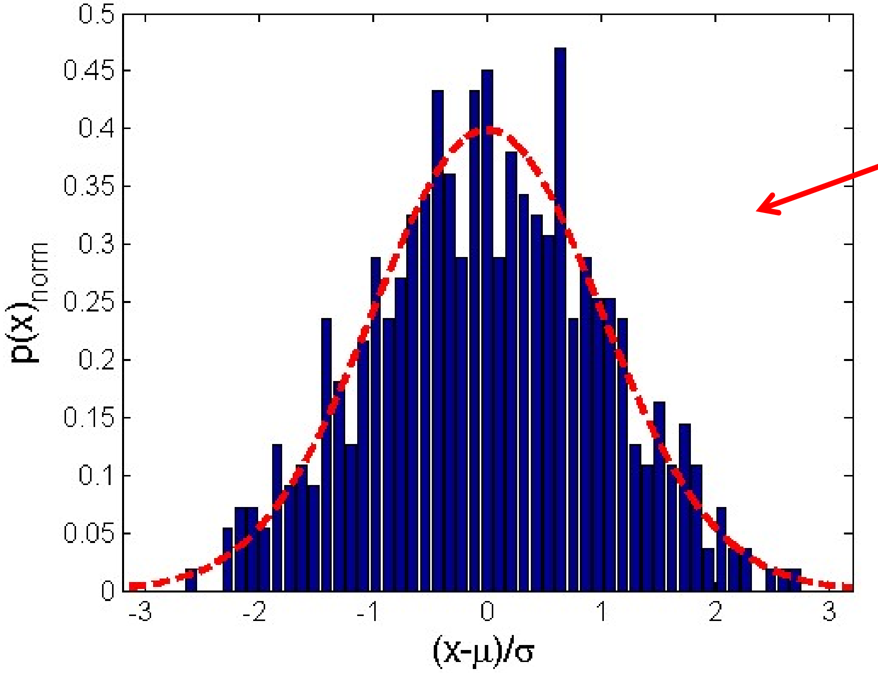


Distribuição Normal ou gaussiana

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Função Densidade de Probabilidade (PDF) – dados discretos

$$p(x) = \left(\frac{n_{ocorrências}}{N_{amostras}}\right) \Big/ \Delta x \quad ; \quad p(x)_{Normalizada} = p(x) \cdot \sigma$$

$$x_{normalizado} = (x-\mu) \big/ \sigma$$



PDF – área sob a curva =1

Aula de Medidas Dinâmicas

➢ **Análise de Sinais (introdução):**

➢ Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Aproximação polinomial de ordem *m* dos dados:

$$f(x) = y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 ... a_m x^m$$

A relação polinomial deve ser encontrada para um conjunto de N pontos de dados [da forma (x_i, y_i)].

Dedução para eq. do 1º grau:

$$f(x) = y = a_0 + a_1 x$$

onde y é a resultado da equação de ajuste e a_0 e a_1 são, respectivamente, os coeficientes linear e angular.

O desvio do ajuste pode ser dado por:

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

onde Y_i é um dos pontos medidos e y_i o ponto fornecido pelo ajuste

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

O objetivo é obter coeficientes que minimizem a soma dos erro quadrados, de modo que:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i - y)^2 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum (Y_i - a_1 x - a_0)^2 = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_1} \sum \left(Y_i^2 - 2Y_i a_1 x - 2Y_i a_0 + a_1^2 x^2 + 2a_1 x a_0 + a_0^2 \right) = 0$$

$$= 2\sum (Y_i - a_1 x - a_0)(-x) = 0$$

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

$$\Delta^2 = \sum (Y_i - y)^2$$

O objetivo é obter coeficientes que minimizem a soma dos erro quadrados, de modo que:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum (Y_i - y)^2 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum (Y_i - a_1 x - a_0)^2 = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_0} \sum \left(Y_i^2 - 2Y_i a_1 x - 2Y_i a_0 + a_1^2 x^2 + 2a_1 x a_0 + a_0^2\right) = 0$$

$$= 2\sum (Y_i - a_1 x - a_0)(-1) = 0$$

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Resolvendo para a_0:

$$\sum Y_i - a_1 \sum x - n a_0 = 0$$

$$a_0 = \frac{\sum Y_i - a_1 \sum x}{n}$$

E substituindo para encontrar a_1 :

$$\sum Y_i x - a_1 \sum x^2 - a_0 \sum x = 0$$

$$\sum Y_i x - a_1 \sum x^2 - \frac{\left(\sum Y_i - a_1 \sum x\right)}{n} \sum x = 0$$

$$a_1 = \frac{\sum Y_i \sum x - n \sum Y_i x}{\left(\sum x\right)^2 - n \sum x^2}$$

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

    Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Onde o expoente T se refere a transposta da matriz e -1 a inversa, com as matrizes *x,y* e *a* sendo :

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$x^T x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix}$$

$$x^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$\left(x^T x\right)^{-1} = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix}$$

Substituindo:

$$\left(x^T x\right)^{-1} x^T y = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

$$\left(x^T x\right)^{-1} x^T y = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy \\ -\sum x \sum y + n \sum xy \end{bmatrix}$$

Aula de Medidas Dinâmicas

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

    Existe uma solução para o problema envolvendo produto de matrizes, na forma:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

Prova :

$$\left(x^T x\right)^{-1} x^T y = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy \\ -\sum x \sum y + n \sum xy \end{bmatrix}$$

Equação encontrada anteriormente:

$$a_1 = \frac{\sum Y_i \sum x - n \sum Y_i x}{\left(\sum x\right)^2 - n \sum x^2}$$

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

    Operações matriciais podem ser utilizadas para ajustar funções a um conjunto de dados usando a operação:

$$a = \left(x^T x\right)^{-1} x^T y$$

As matrizes ficam:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^m \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix}$$

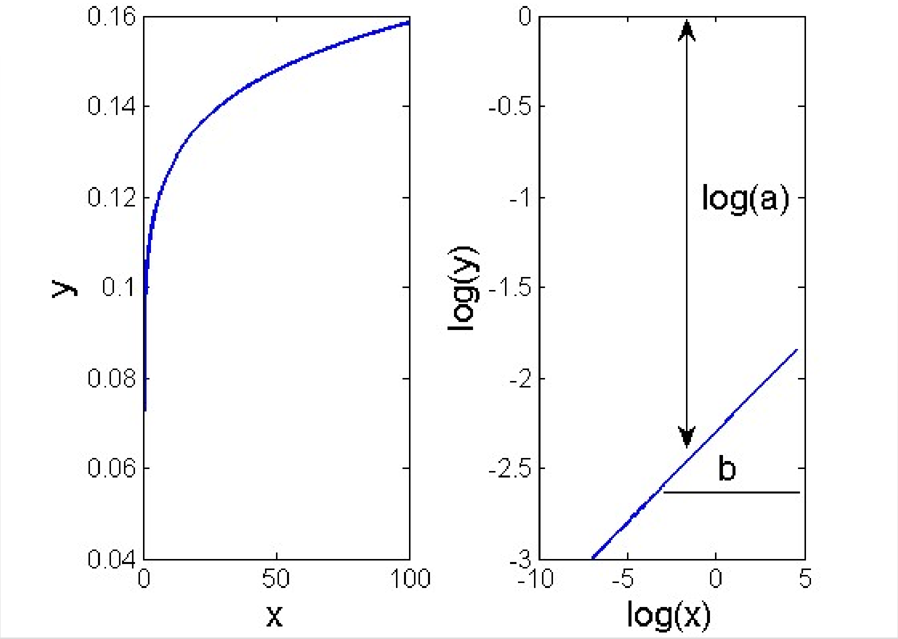
Regressões de múltiplas variáveis também podem ser obtidas

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método simples para um polinômio de ordem 1pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada

Ex.: $y = ax^b$

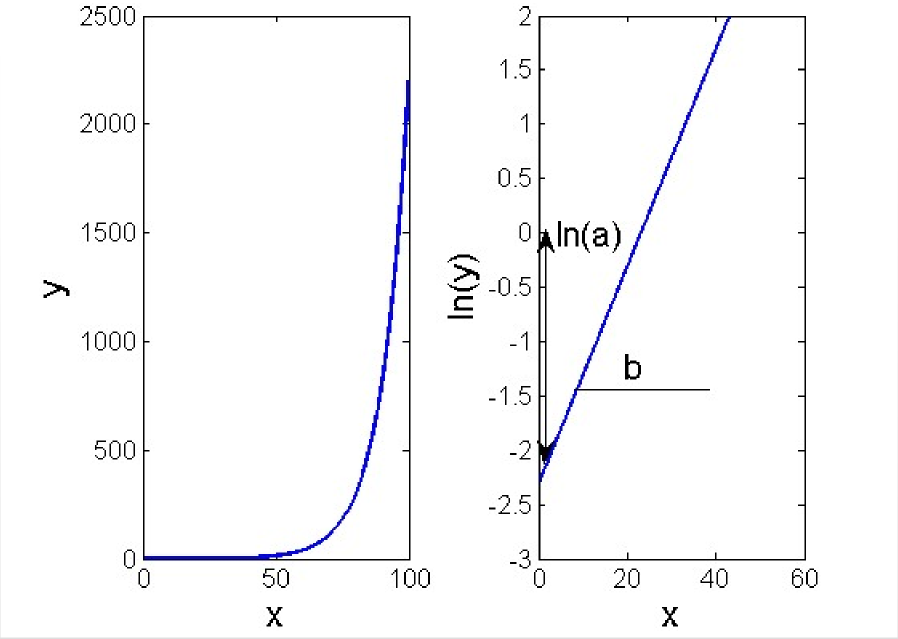


➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

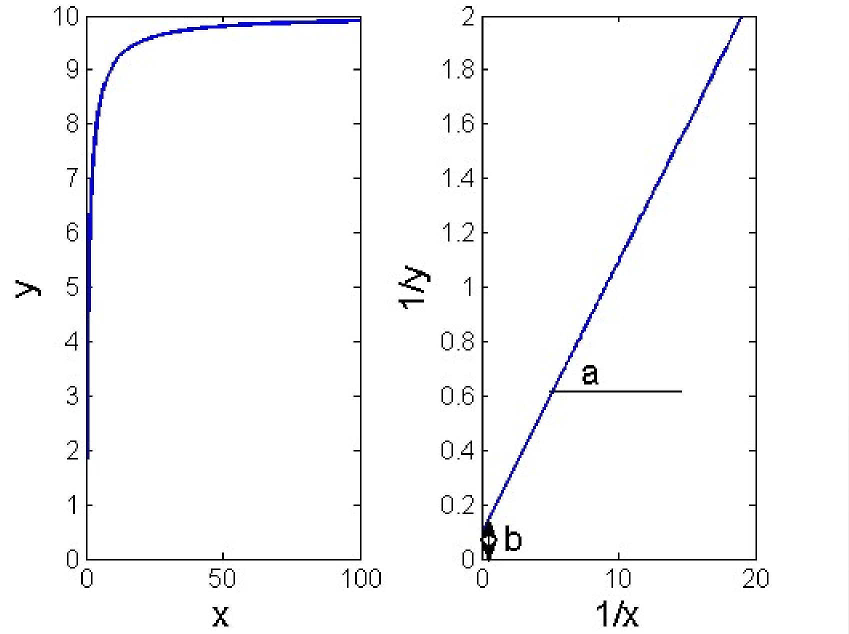
Ex.: $y = ae^{bx}$



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

    O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

    Ex.: $y = \dfrac{x}{a + bx}$

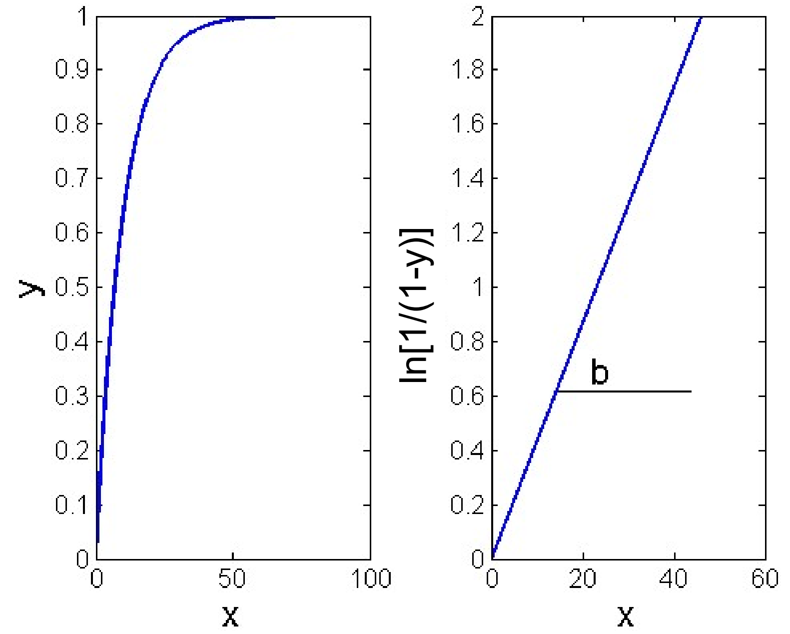


➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = 1 - e^{-bx}$

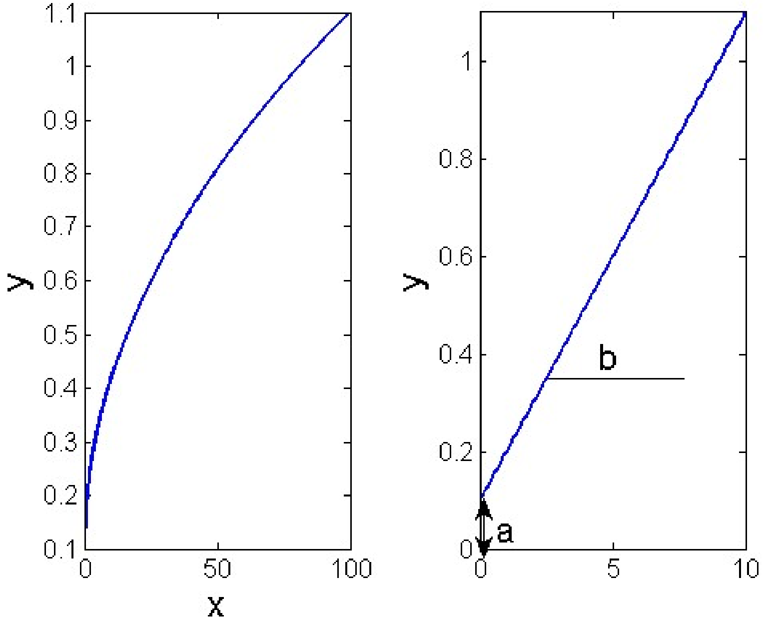


➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

O método pode ser aplicado para a regressão de diversas funções, para isso é necessário somente encontrar uma escala adequada para os dados.

Ex.: $y = a + b\sqrt{x}$



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Regressão (Método dos Mínimos Quadrados)

Erro padrão do ajuste (1ª ordem):

$$S = \sqrt{\frac{\Delta^2}{N-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum\left(Y_i - y\right)^2}{N-1}}$$

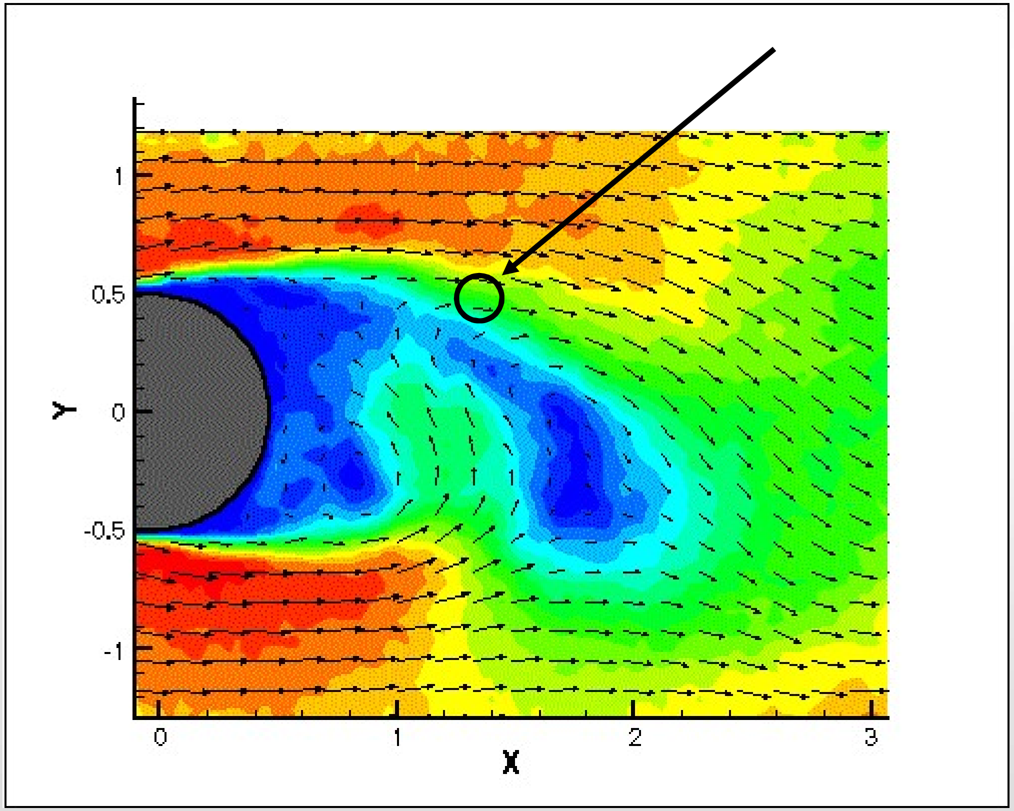
A partir do erro padrão é possível estimar um intervalo de confiança para os dados em torno do ajuste

$$\pm t_{N-1,P}\,\frac{S}{\sqrt{N}}\ (\%P)$$

➢**Análise de Sinais (introdução):**

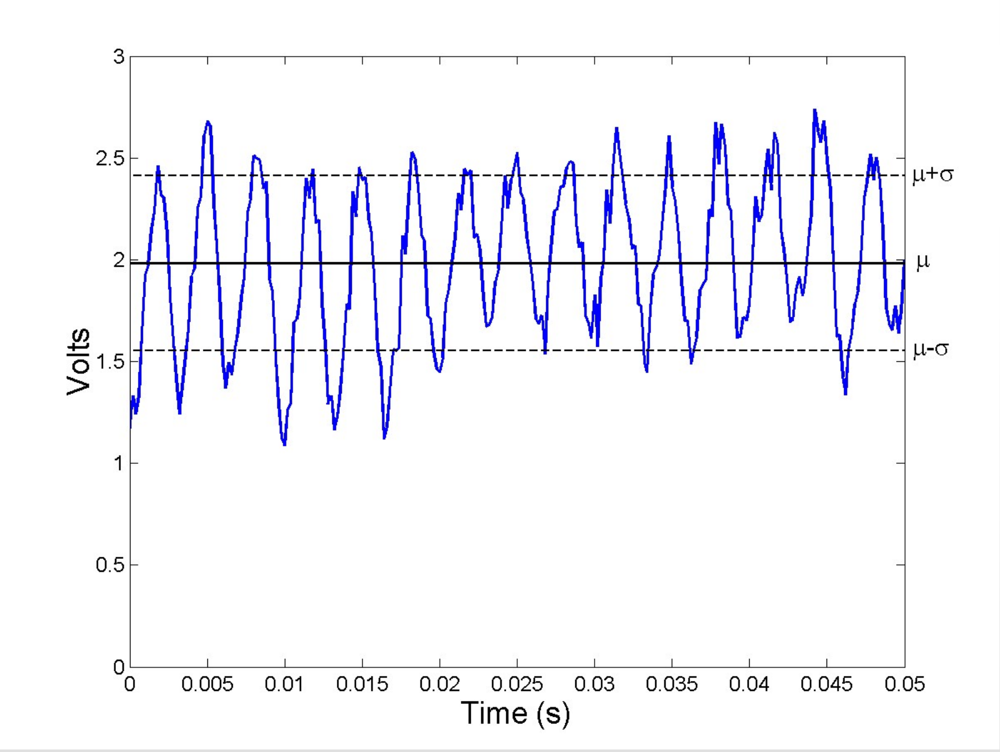
➢Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

➢<u>Exemplo</u>: Escoamento na esteira de um cilindro



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢<u>Exemplo</u>: De volta ao sinal do anemômetro de fio quente. Estimadores simples do tipo média e desvio padrão, não permitem que sinais determinísticos e aleatórios de diferentes tipos sejam separados e analisados individualmente.

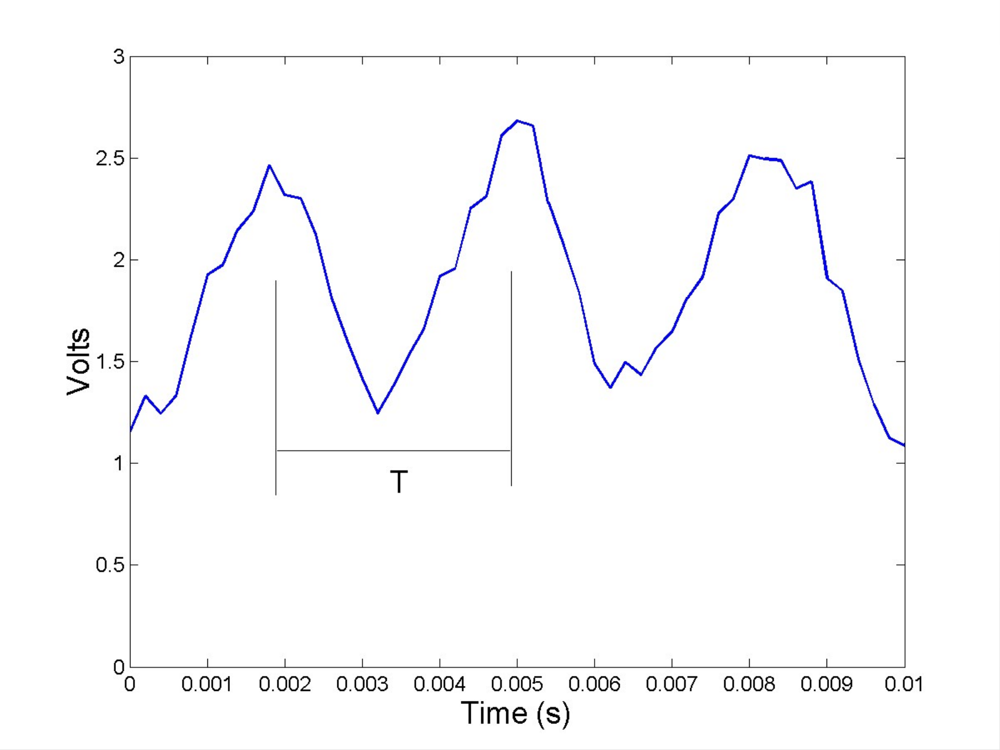


Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - <u>Exemplo</u>: De volta ao sinal do anemômetro de fio quente.

    Dificuldade na definição do período do sinal através da análise no tempo.



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k sen\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k sen(\omega_0 kt)\right]$$

onde T é o período fundamental do sinal x(t), ω0 (=2π/T) a freqüência fundamental, k o número do harmônico usado na composição do sinal,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

e

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t) sen\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)+b_k sen\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(\omega_0 kt)+b_k sen(\omega_0 kt)\right]$$

para *k=0* o valor de b_k é *0* e o valor do cosseno presente na integral de a_k fica constante e igual a *1*. Assim o coeficiente a para *k=0* pode ser reescrito como,

$$a_0=\frac{2}{T}\int_T x(t)dt, \qquad k=0$$

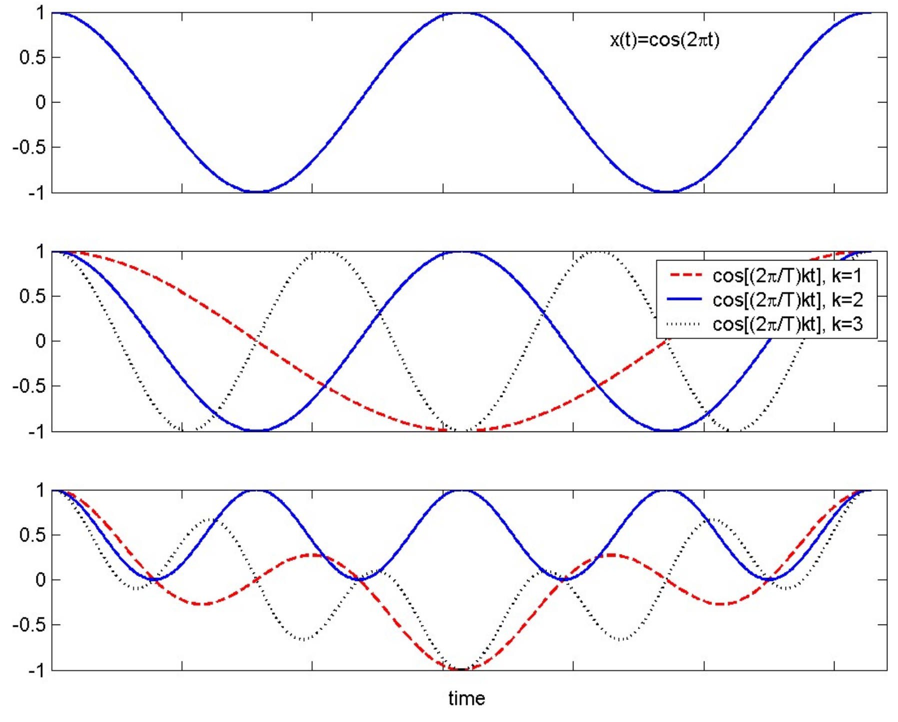
Termo refere-se a média da série em um periodo de tempo T. Não tem fase pois nao depende de valores de *sen* ou *cos*

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad k = 0,1,2,...$$

Como funciona?
Ex: Caso: cos(2πt)

a_k



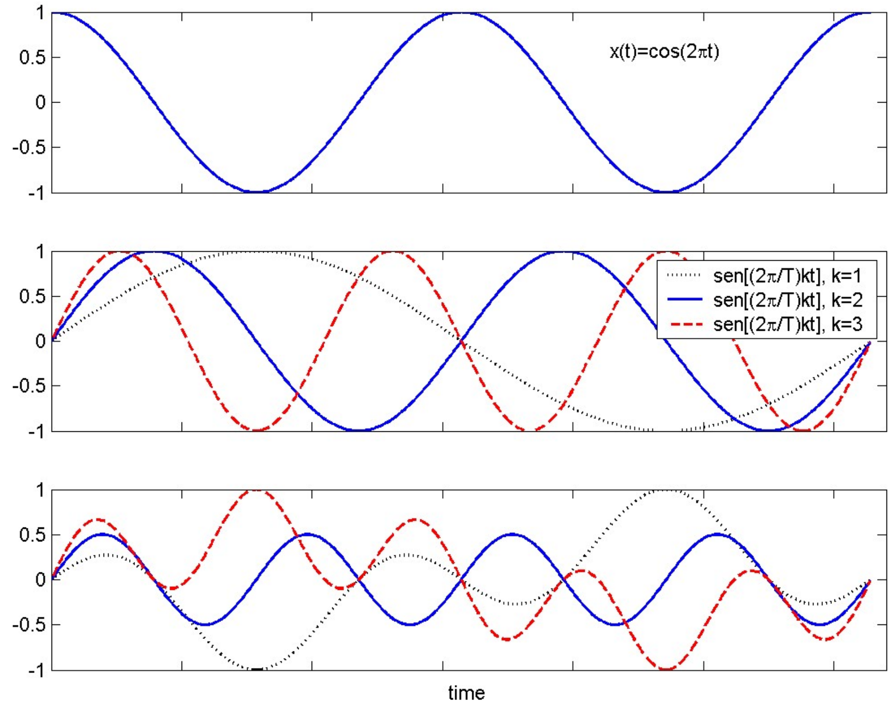
➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad k = 0,1,2,...$$

Como funciona?
Ex: Caso: cos(2πt)

b_k



➢Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad k = 0,1,2,...$$

Como funciona?
Ex:

Visualização da representação em série de Fourier. Extraído de Wikimedia Commons

Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢<u>Representação de sinais em séries de Fourier</u>:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \qquad k = 0,1,2,...$$

➢Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Aula de Medidas Dinâmicas

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Amplitude e Fase do sinal

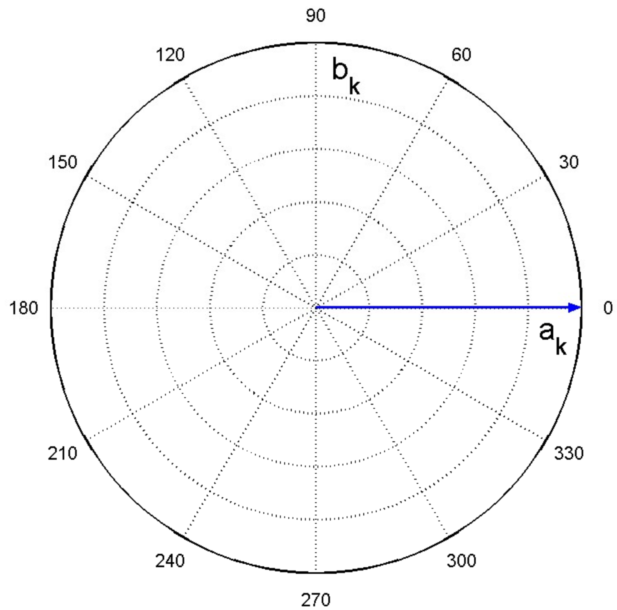
$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:
Continuando com ex: cos(2πt)

$a_k=1$; $b_k=0$;

logo, $\varphi=0$



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

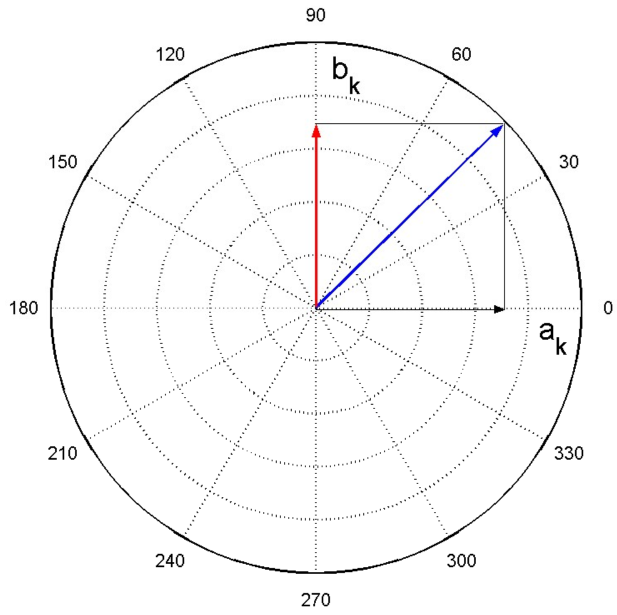
Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:
Continuando com
ex: cos(2πt+φ)
com φ=45°

$a_k>0$; $b_k>0$;



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

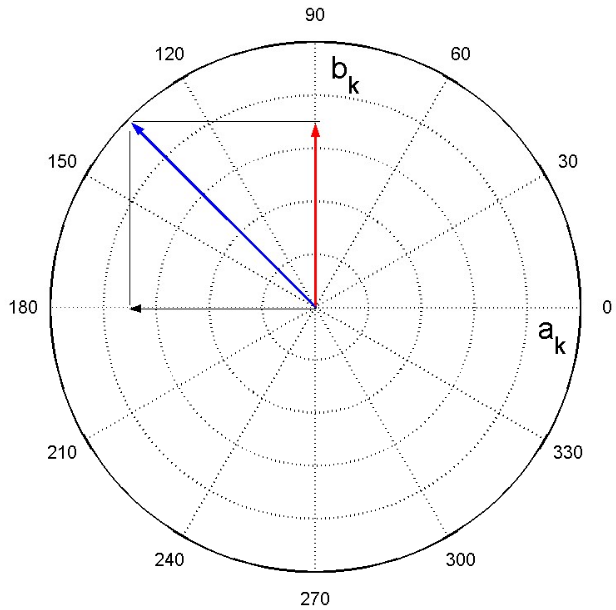
Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:
Continuando com
ex: cos(2πt+φ)
com φ=135°

$a_k<0$; $b_k>0$;



Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

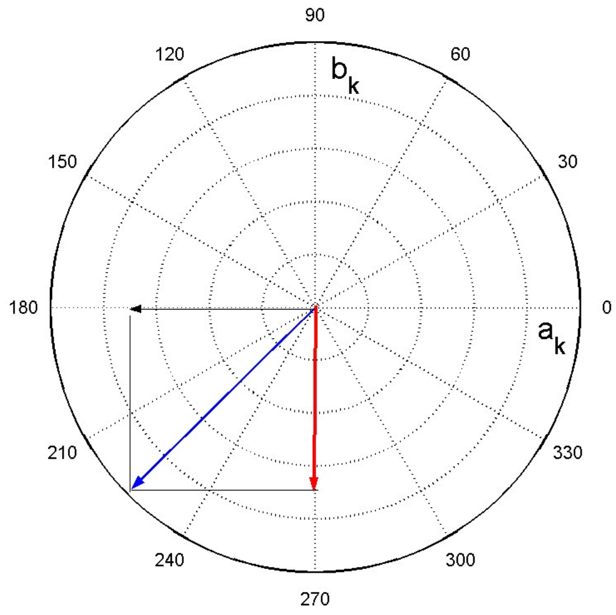
Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:
Continuando com
ex: $\cos(2\pi t+\varphi)$
com $\varphi=225°$

$a_k<0$; $b_k<0$;



Aula de Medidas Dinâmicas

I.B De Paula

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

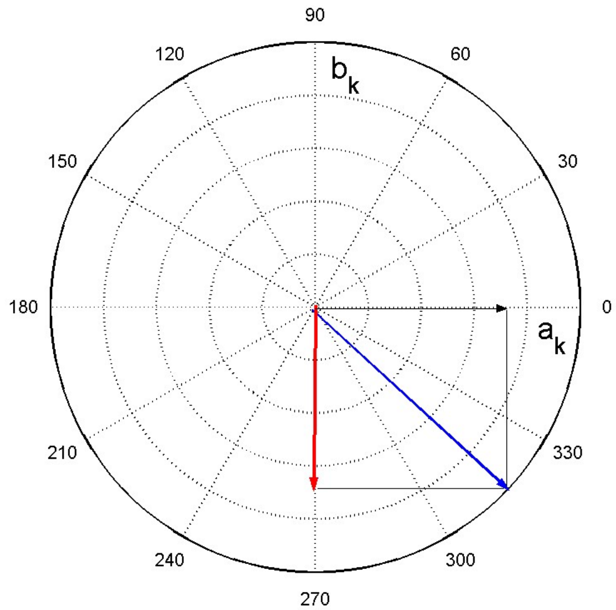
Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:
Continuando com ex: cos(2πt+φ) com φ=315°

$a_k>0$; $b_k<0$;

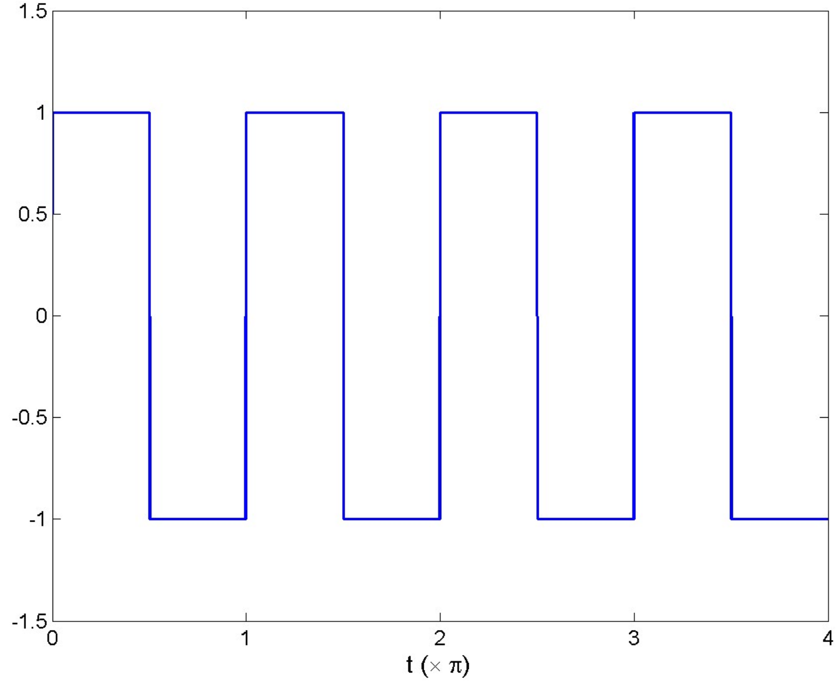


- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo)

- Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

onde sign é o sinal da função sen(t) e que assume -1 para valores negativos de seno(t) e +1 para positivos.



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Calculando-se os termos da série de Fourier dessa função, temos:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int x(t)dt = \int_0^{\pi} 1dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int x(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{k\pi}\left[1 \cdot sen(kt)\Big|_0^{\pi} + (-1)sen(kt)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 0, \qquad k = 1,2,3...$$

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Calculando-se os termos da série de Fourier dessa função, temos:

$$b_k = \frac{2}{T}\int x(t)sen(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 1\cdot sen(kt)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot sen(kt)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\cos(kt)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi}, & \text{para k impar} \\ 0, & \text{para k par} \end{cases}$$

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign\left[sen(t)\right]$

Com os coeficientes $a_k = a_0 = 0$

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi}, & para\ \ k\, impar \\ 0 \quad , & para\ k\ \ par \end{cases}$$

A série de Fourier dessa função fica:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}sen(t) + \frac{4}{3\pi}sen(3t) + \frac{4}{5\pi}sen(5t) + \frac{4}{7\pi}sen(7t) + ...$$

➢Análise de Sinais (introdução):

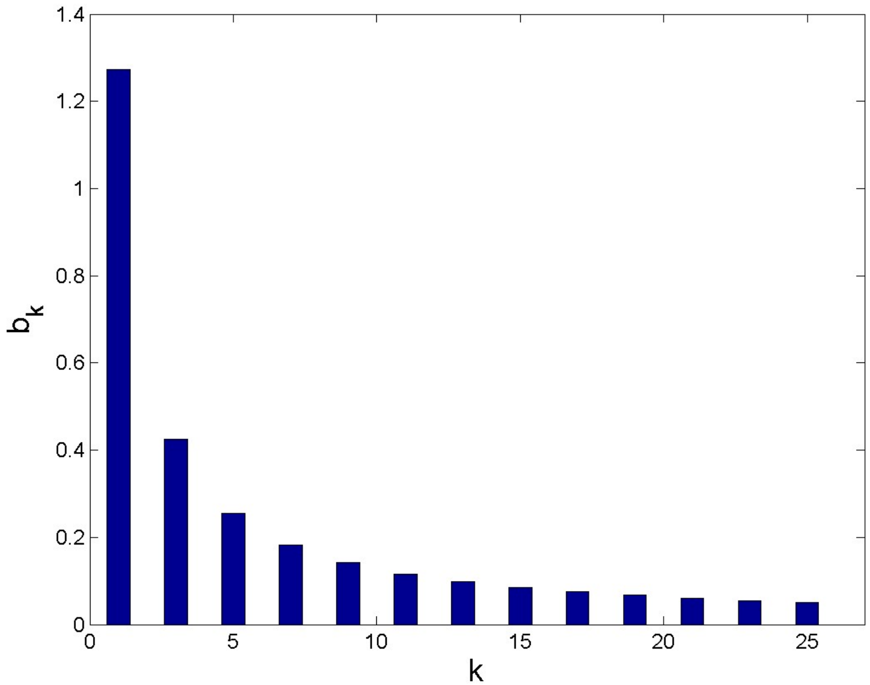
➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Representação espectral (no domínio das freqüências) da série



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

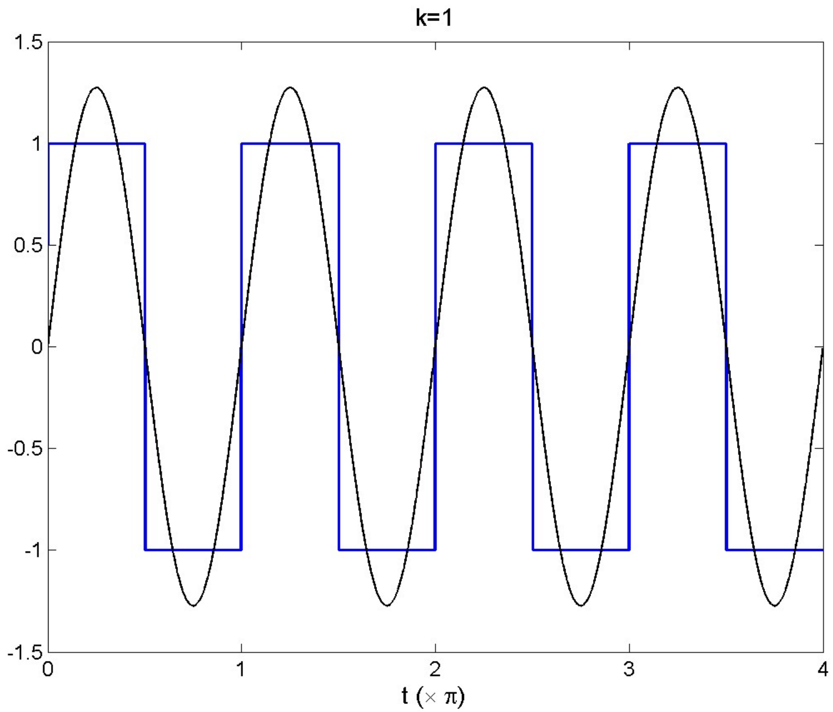
Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

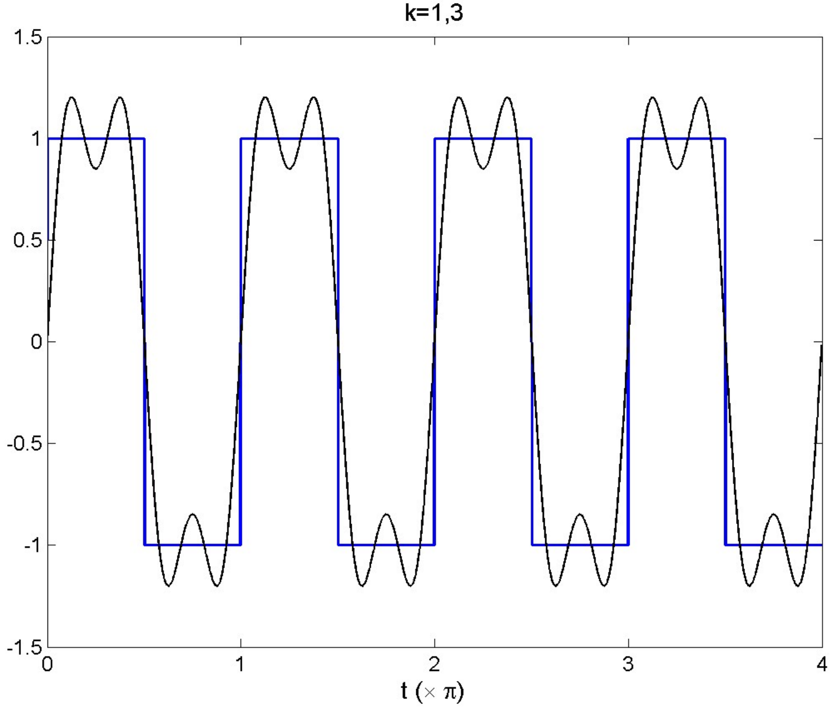
Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,3



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Representação de sinais em séries de Fourier:

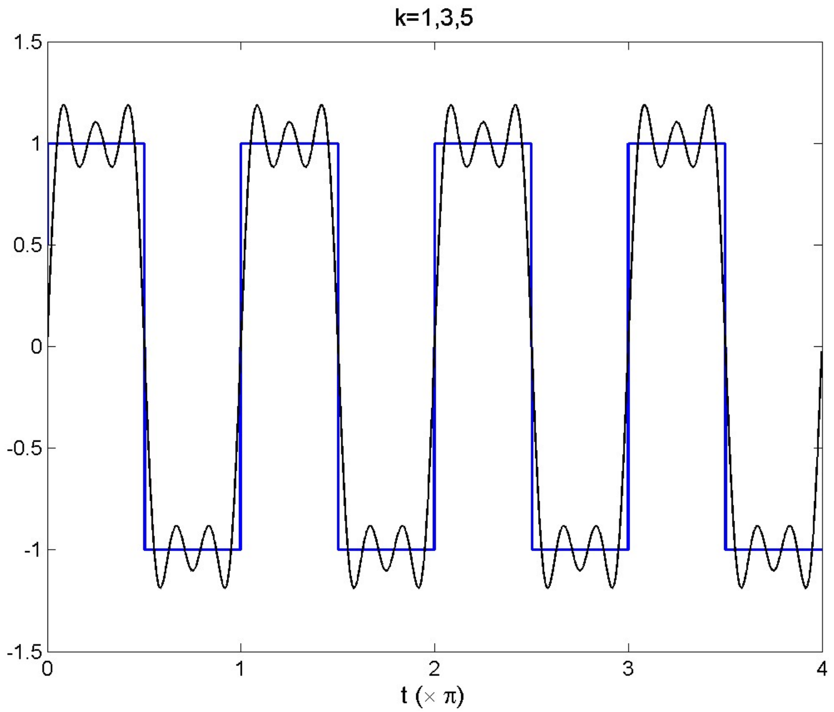
Exemplo)

;

- Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,3,5



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

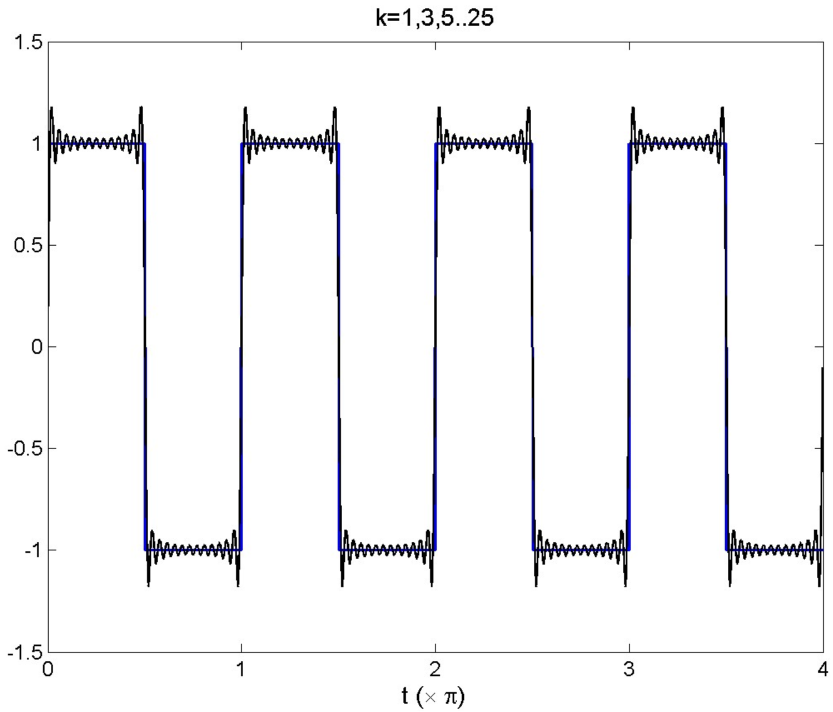
Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,3,5..25



➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

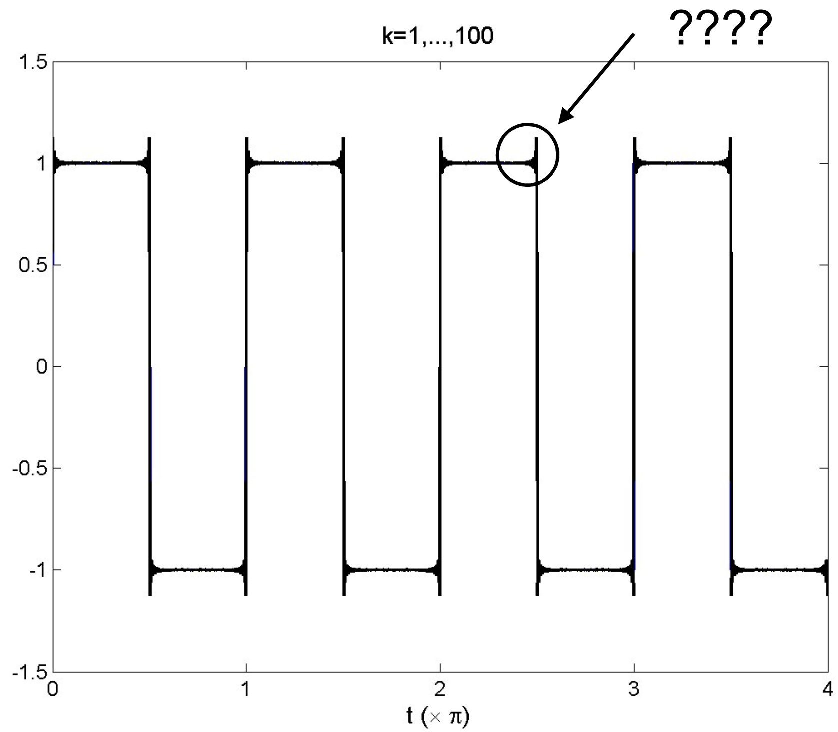
Exemplo)

;

➢ Onda quadrada: $x(t) = sign[sen(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,...,100



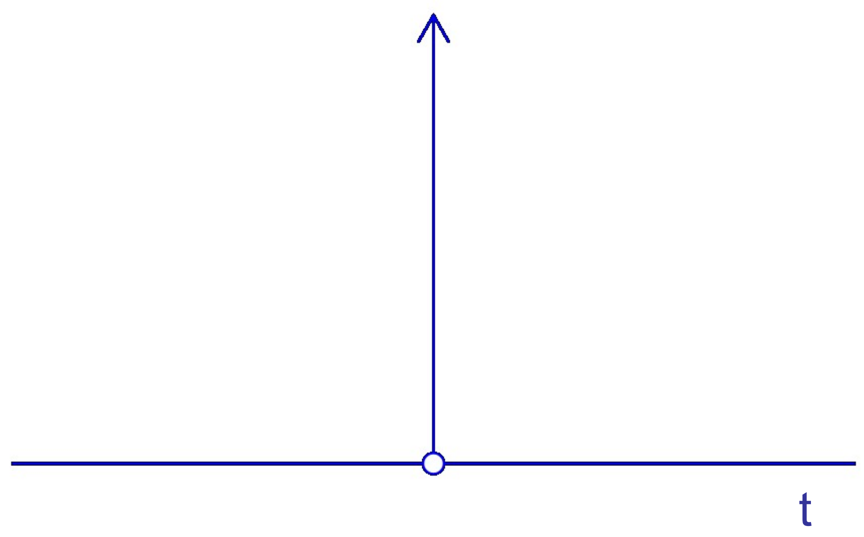
➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo 2)

➢ Delta de Dirac $\delta(t)$:

Função pulso.



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo 2)

- Delta de Dirac δ(t):

Antes de calcular a série de Fourier é necessário relembrar algumas propriedades fundamentais da função delta de Dirac.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1;$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-a) f(t)dt = f(a)$$

E também definir um período para a função: -π<t<π .

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo 2)

➢ Delta de Dirac δ(t):

Os coeficientes da serie de Fourier dessa função são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)dt = \frac{1}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\cos(k\cdot 0) = \frac{1}{\pi}, \qquad k = 1,2,3...$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)sen(kt)dt = \frac{1}{\pi}sen(k\cdot 0) = 0, \qquad k = 1,2,3...$$

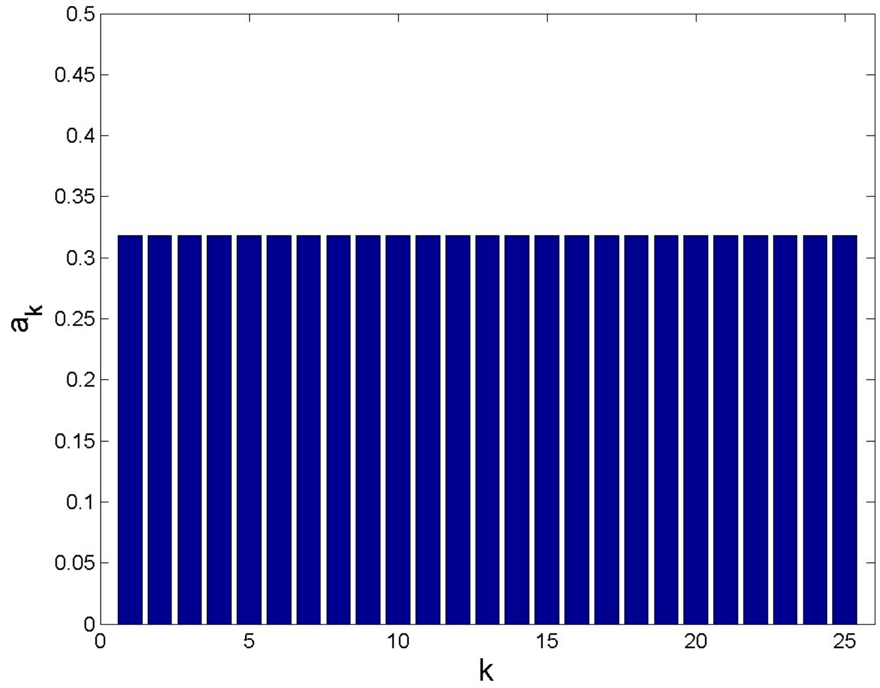
➢Análise de Sinais (introdução):

➢<u>Representação de sinais em séries de Fourier</u>:

Exemplo 2)

;

➢ Delta de Dirac:
Representação espectral da série



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

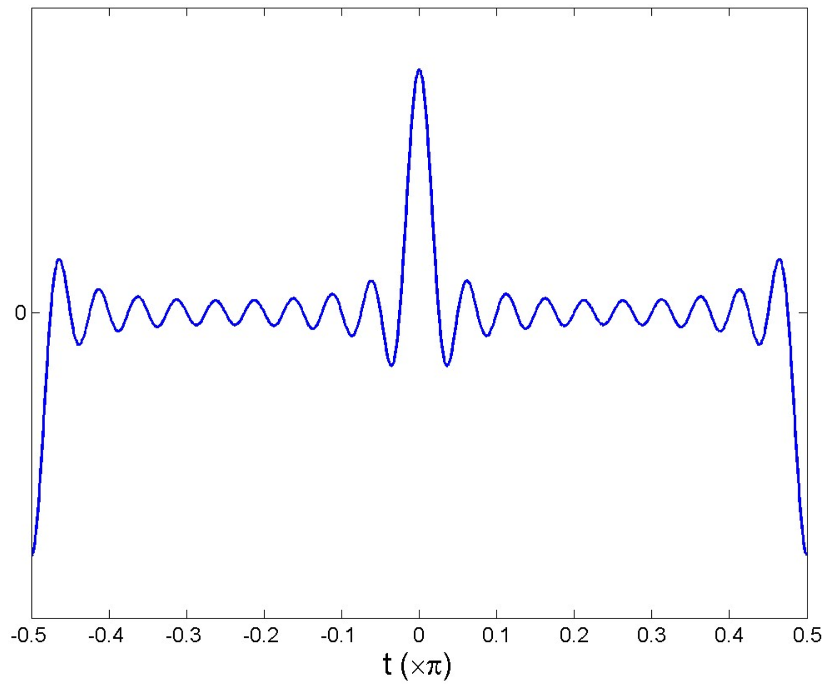
Exemplo 2)

;

➢ Delta de Dirac:

Representação da série truncada a um número finito de modos

k=1...10



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

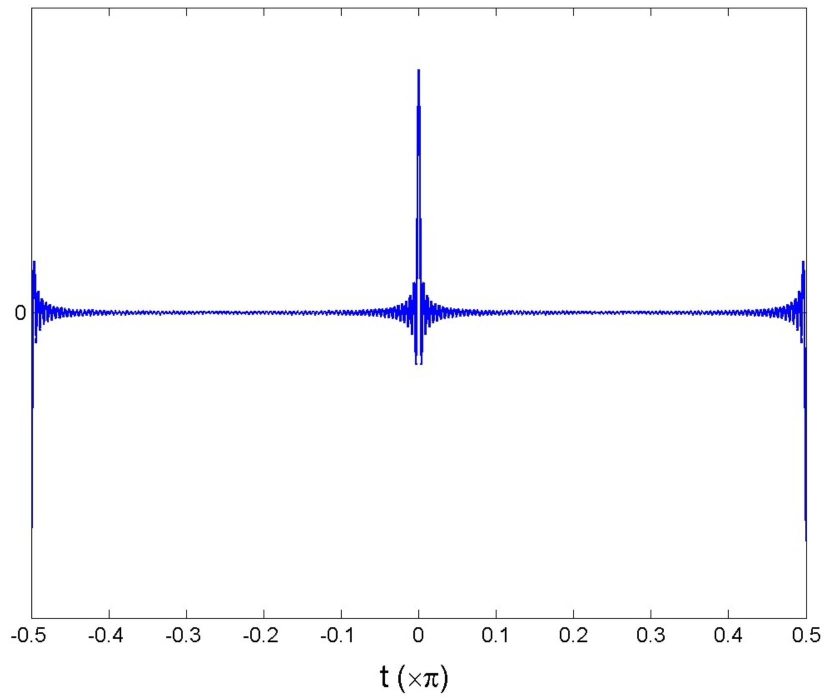
Exemplo 2)

;

➢ Delta de Dirac:

Representação da série truncada a um número finito de modos

k=1...100



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Representação de sinais em séries de Fourier:

Exemplo 2)

;

➢ Delta de Dirac:

➢*Com base na representação da função delta de Dirac nota-se que um evento localizado no tempo distribui energia para todos os modos no domínio da freqüência*;

➢*Regiões onde existe descontinuidade no tempo necessitam de um grande número de termos para um representação razoável da série temporal*.

➢*Esse efeito devido ao truncamento da série a um número finito de modos é conhecido como **efeito de Gibbs***

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Transformada de Fourier (FT):

A representação de sinais através da série de Fourier é limitada, pois a série só pode ser calculada para sinais periódicos e de período conhecido.

Para criar um método mais robusto que pudesse ser aplicado a quase todos os tipos de sinais Fourier desenvolveu uma transformada baseada no mesmo princípio de representação em series de senos e cossenos

A transformada de Fourier permite que sinais que ocorrem sem periodicidade também tenham uma representação no domínio das freqüências.

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Transformada de Fourier (FT):

Relembrando a formulação da representação em freqüências da série de Fourier :

$$F(\omega_0 k) = \begin{cases} a_k & \text{, termos cosseno} \\ b_k & \text{, termos seno} \end{cases}$$

utilizando a notação exponencial: $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i sen(\omega t)$

$$F(\omega_0 k) = \begin{cases} c_{kREAL} & \text{, relacionado a termos cosseno} \\ c_{kIMAG} & \text{, relacionado a termos seno} \end{cases}$$

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Transformada de Fourier (FT):

A série pode ser reescrita como: $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i2\pi\omega_0 kt}$$

Com os coeficientes c_k dados por: $$c_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)e^{-i2\pi\omega_0 kt}dt$$

Para um domínio de –∞ a +∞, o período T tende a ∞ enquanto que a a freqüência fundamental (ω_0) tende para 0. Assim as componentes c_k's formam um contínuo.

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada de Fourier (FT):

O somatório da série de c_k's se converte em uma integral, obtendo-se assim a transformada de Fourier.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi\omega t}dt$$

onde *X(ω)* é o sinal *x(t)* no domínio da freqüência. A operação inversa para transformar o sinal *X(ω)* do domínio para o tempo é dada pela transformada inversa (IFT)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i2\pi\omega t}d\omega$$

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Transformada de Fourier (FT):

FT

Tempo, espaço

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i2\pi\omega t}\,d\omega \qquad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi\omega t}\,dt$$

Freqüência, número de onda

IFT

A transformada permite que o mesmo sinal possua representação tanto no tempo quanto na freqüência.

Ao longo dos anos essa provou ser uma das ferramenta mais utilizadas nos mais diversos campos de estudo.

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada de Fourier (FT):

Tempo, espaço

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2\, dt \iff \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)^2\, d\omega$$

Freqüência, número de onda

De acordo com o teorema de Rayleigh a potência dos sinais é a mesma não importando o domínio (muito útil para sinais).

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Transformada de Fourier (FT):

Diferença em relação a série:

Na série de Fourier o intervalo de amostragem no tempo (Δt) tende a zero o que resulta em infinitos modos harmônicos no domínio da freqüência.

Na transformada de Fourier o período de amostragem tende a infinito, de modo que a resolução no domínio da freqüência ($\Delta\omega$) tende a 0.

Isso implica que a transformada é uma função contínua no domínio da freqüência.

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Transformada Discreta de Fourier (DFT):

Para o uso da transformada no processamento digital de sinais é necessário a utilização da transformada discreta de Fourier (DFT).

Para restringir os limites de integração da transformada a um número finito de pontos assume-se que o sinal amostrado seja periódico e de período igual ao período de amostragem.

Isso equivale a dizer que para a transformada a série temporal de dados se repete periodicamente, em um intervalo de tempo igual a $N \cdot \Delta t$, até um tempo infinito.

A versão da transformada para pontos discretos é dada em termos de somatório de pontos:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\frac{j2\pi}{N}k}, \qquad para \;\; k = 0,1,\ldots,N-1$$

➤**Análise de Sinais (introdução):**

➤Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\frac{j2\pi}{N}k}, \qquad para \;\; k = 0,1,\ldots,N-1$$

Transformada Inversa (IDFT):

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{j2\pi}{N}k}, \qquad para \;\; k = 0,1,\ldots,N-1$$

Para cada freqüência correspondente a k um somatório deve ser computado.

Isso resulta em N^2 operações, o que torna o processo caro do ponto de vista computacional.

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Para reduzir o número de operações e aumentar a eficiência no cálculo da transformada foram criados algoritmos chamados de transformadas rápidas de Fourier (Fast Fourier Transform- FFT).

Nesses métodos o número de operações realizadas para o cálculo da transformada é reduzido para O(Nlog(N)) operações.

Ex: Para uma série de 1024 dados:

N^=1048576;

Nlog(N)~3083!!!

Esses métodos são extremamente úteis mesmo com o atual aumento da capacidade de processamento dos computadores

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Os coeficientes da FFT permitem que a amplitude e a fase do sinal sejam obtidos para cada modo k de maneira análoga à série de Fourier

$$A_k = \sqrt{real(X_k^2) + imag(X_k^2)};$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{imag(X_k)}{real(X_k)}\right).$$

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Os limites de integração da FFT são finitos, consequentemente a resolução no domínio das freqüências fica limitada ao período de amostragem do sinal

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T} = \frac{f}{N}$$

A freqüência de cada modo k da FFT é dada por:

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{kf}{N}$$

➢Análise de Sinais (introdução):

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

A discretização dos dados no tempo também acarretam limitação na FFT.

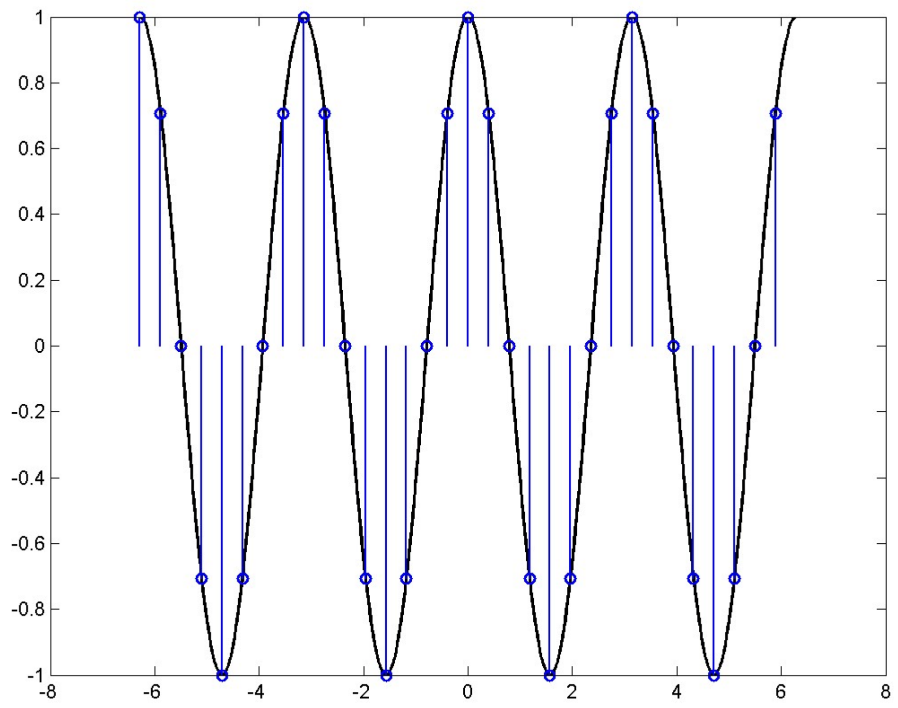
A relação entre intervalo de amostragem e a freqüência máxima do espectro é dada pela teoria de amostragem de Shannon-Nyquist.

A frequencia máxima que pode ser resolvida é igual a metade da freqüência de amostragem fs, onde fs = $1/\Delta t$.

Essa freqüência limite é chamada de freqüência de **Nyquist.**
(Demonstração detalhada na aula de laboratório)

- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Transformada Rápida de Fourier (FFT):

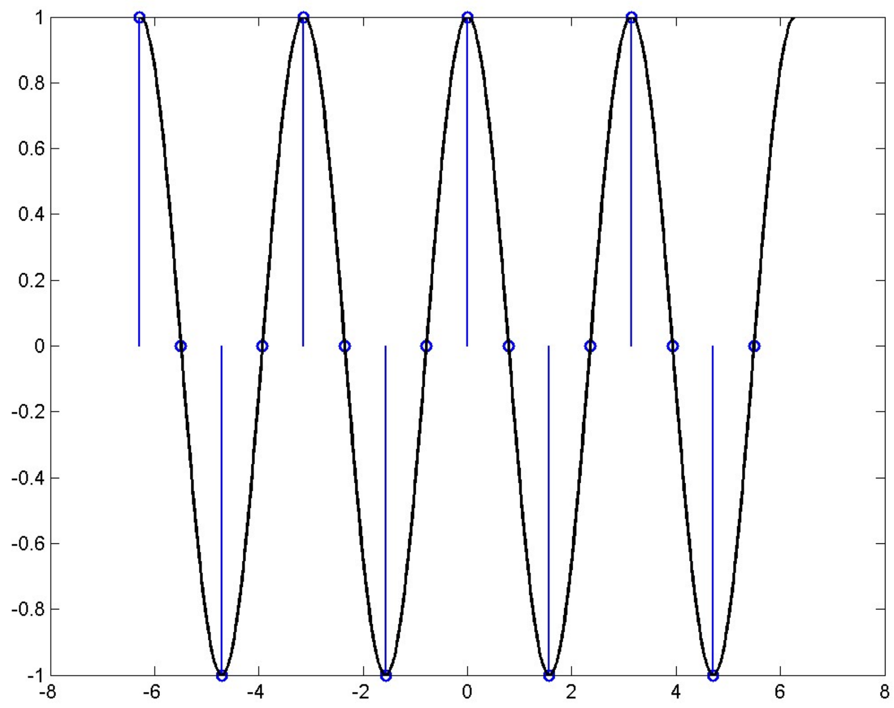
Freqüência de **Nyquist.** (Demonstração detalhada na aula de laboratório)



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Freqüência de **Nyquist.** (Demonstração detalhada na aula de laboratório)

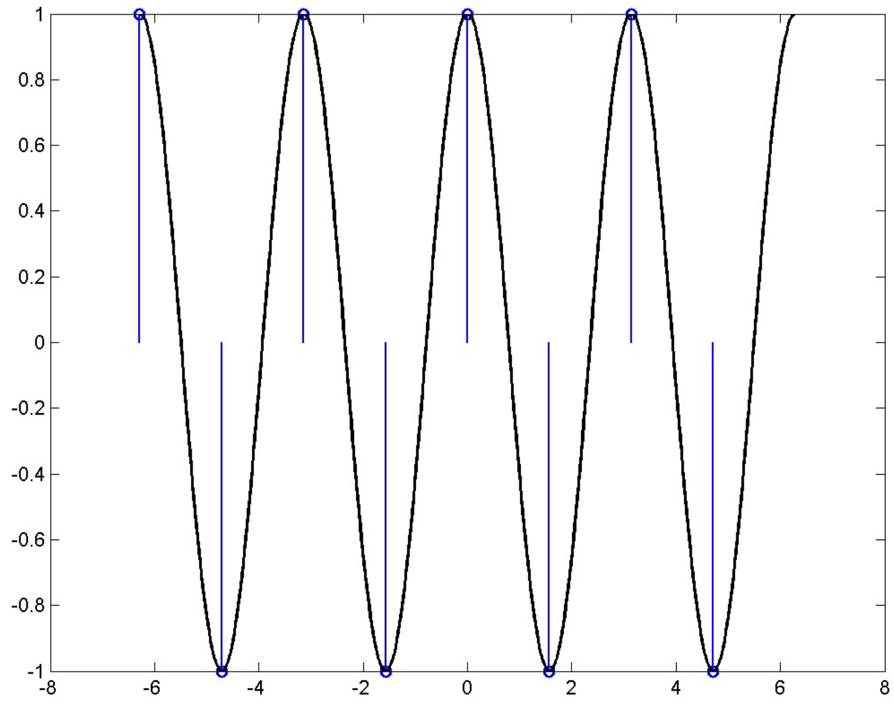


Aula de Medidas Dinâmicas

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Freqüência de **Nyquist.** (Demonstração detalhada na aula de laboratório)

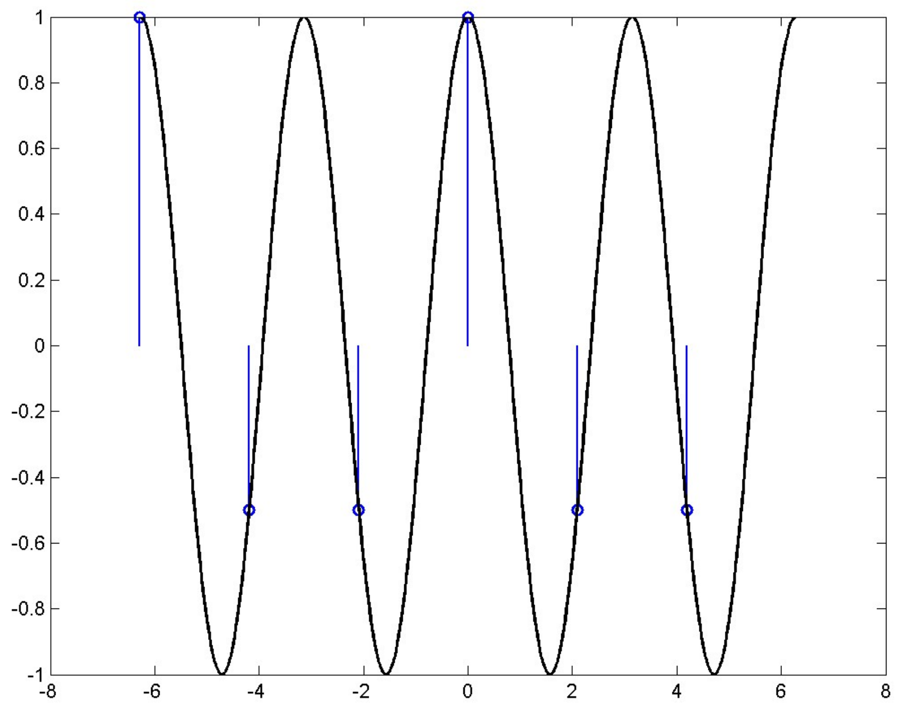


Aula de Medidas Dinâmicas

➢**Análise de Sinais (introdução):**

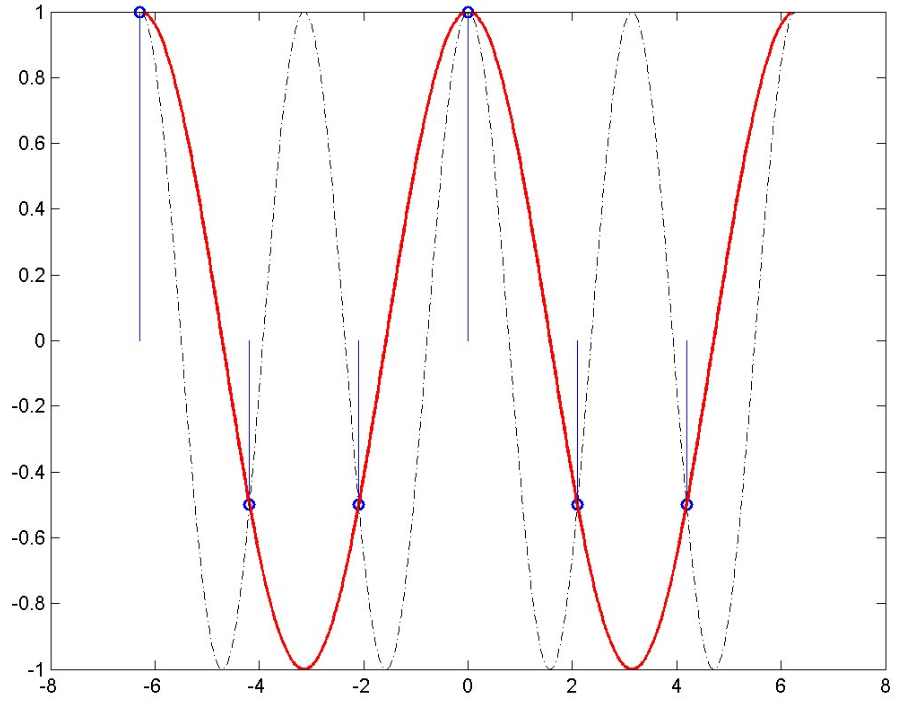
➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Freqüência de **Nyquist.** (Demonstração detalhada na aula de laboratório)



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Freqüência de **Nyquist.** (Demonstração detalhada na aula de laboratório)



- **Análise de Sinais (introdução):**
  - Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Algoritmos e funções para o cálculo da transformada rápida de Fourier encontram-se disponíveis em várias bibliotecas para diferentes linguagens de programação.

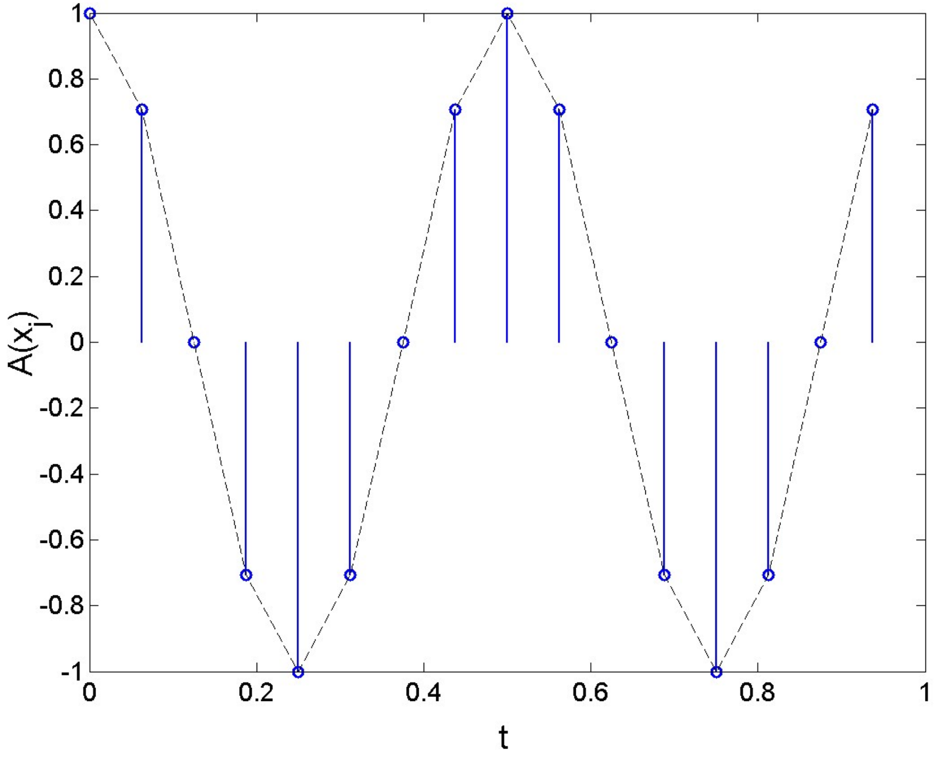
Uma compilação dessas rotinas pode ser encontrada no endereço http://www.nr.com/ (numerical recipes).

Aula de Medidas Dinâmicas

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

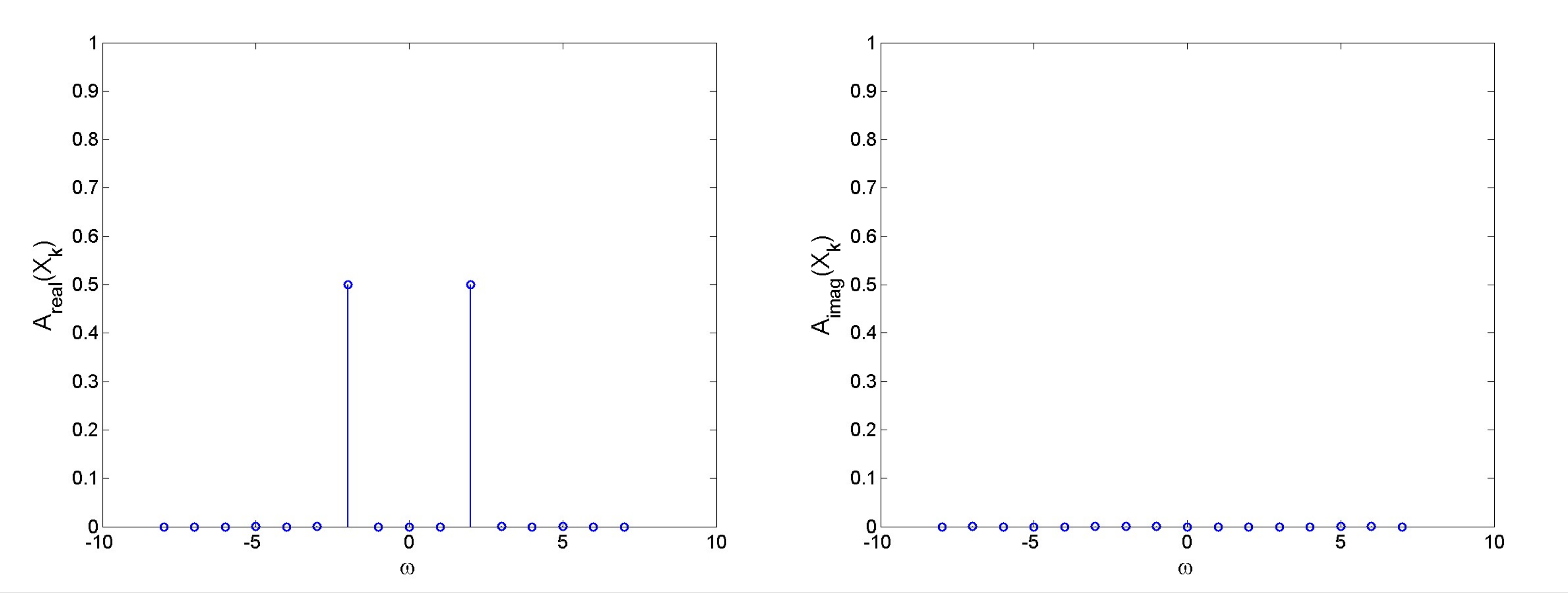
➢**Exemplo 3)** cos(2*π*(2*t)) com t=[0,1| e com N=16



➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Exemplo 3) cos(2*π*t) com t=[0,1| e com N=16



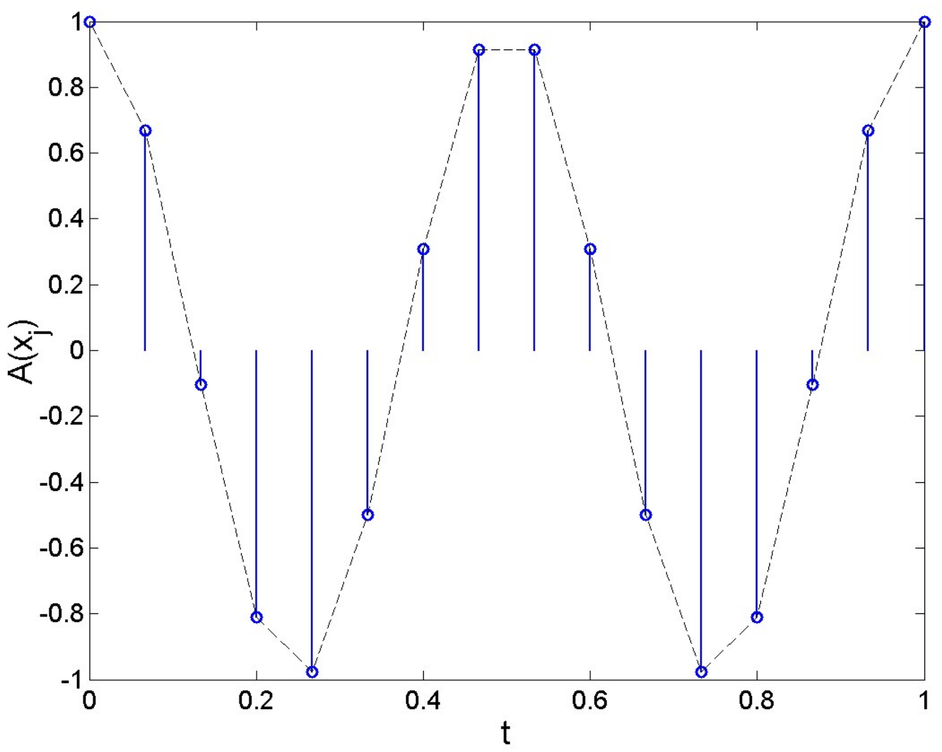
Freqüências positivas e negativas!?! FT assume periódico de –: a +:.

A transformada inclui também os valores do conjugado complexo dos coeficientes X_k, de modo que para uma série de dados real X_k=-i*X_{-k}.

➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

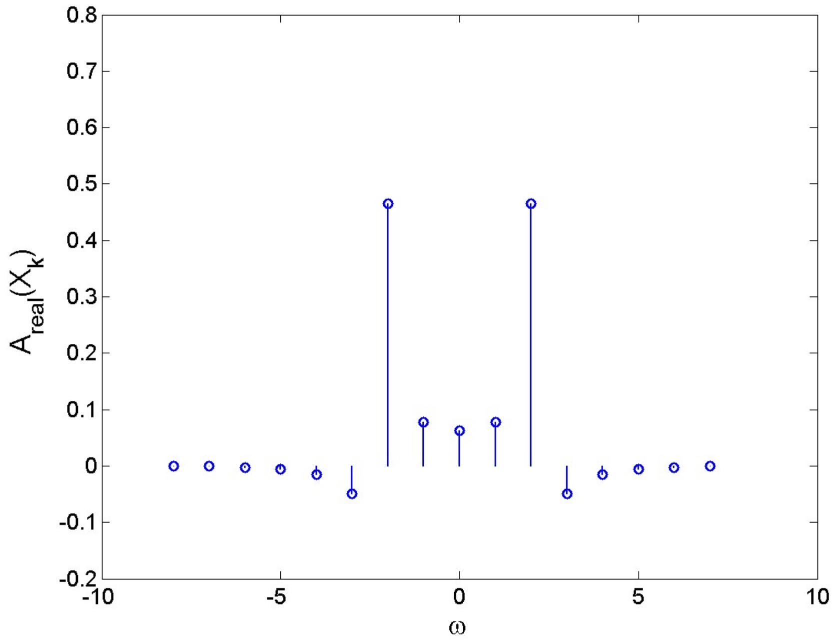
➢**Exemplo 3)** cos(2*π*(2*t)) com t=[0,1**]** e com N=16

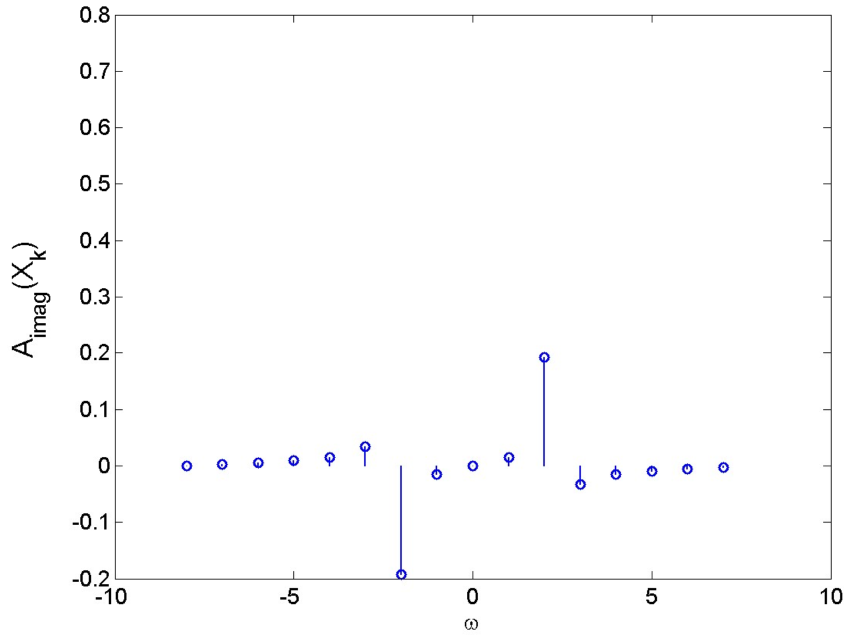


➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢<u>Transformada Rápida de Fourier (FFT)</u>:

Exemplo 3) cos(2*π*t) com t=**[**0,1**]** e com N=16





Espalhamento em vários modos

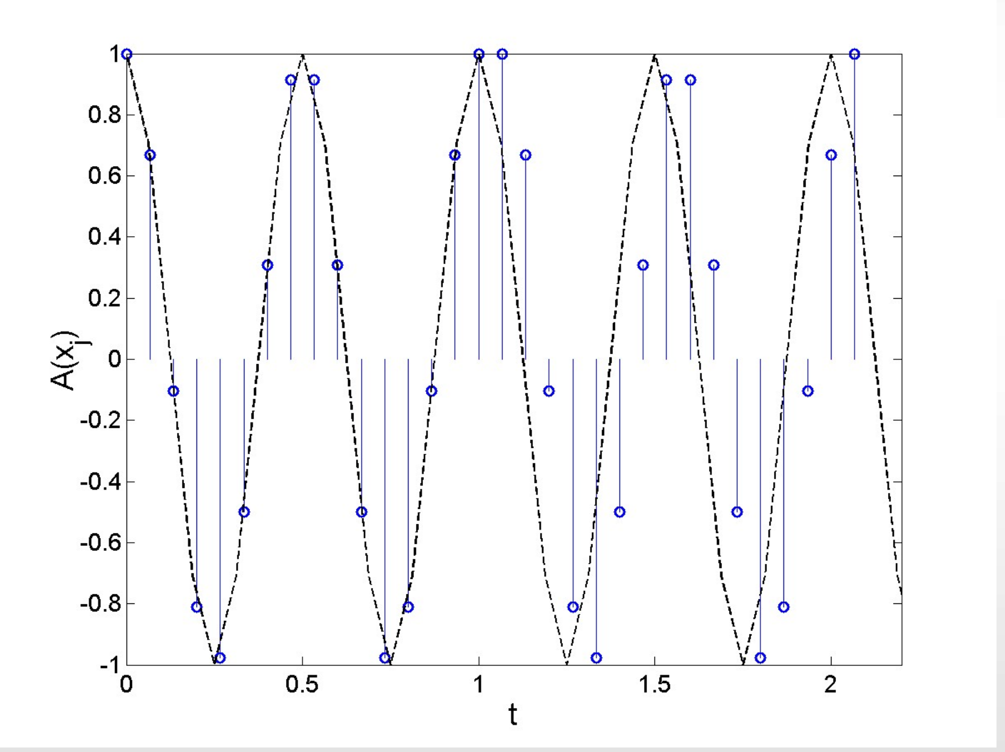
➢**Análise de Sinais (introdução):**

➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Exemplo 3) cos(2*π*t) com t=[0,1**]** e com N=16

Espalhamento em vários modos ocorre devido a não periodicidade do sinal com relação ao período de amostragem.

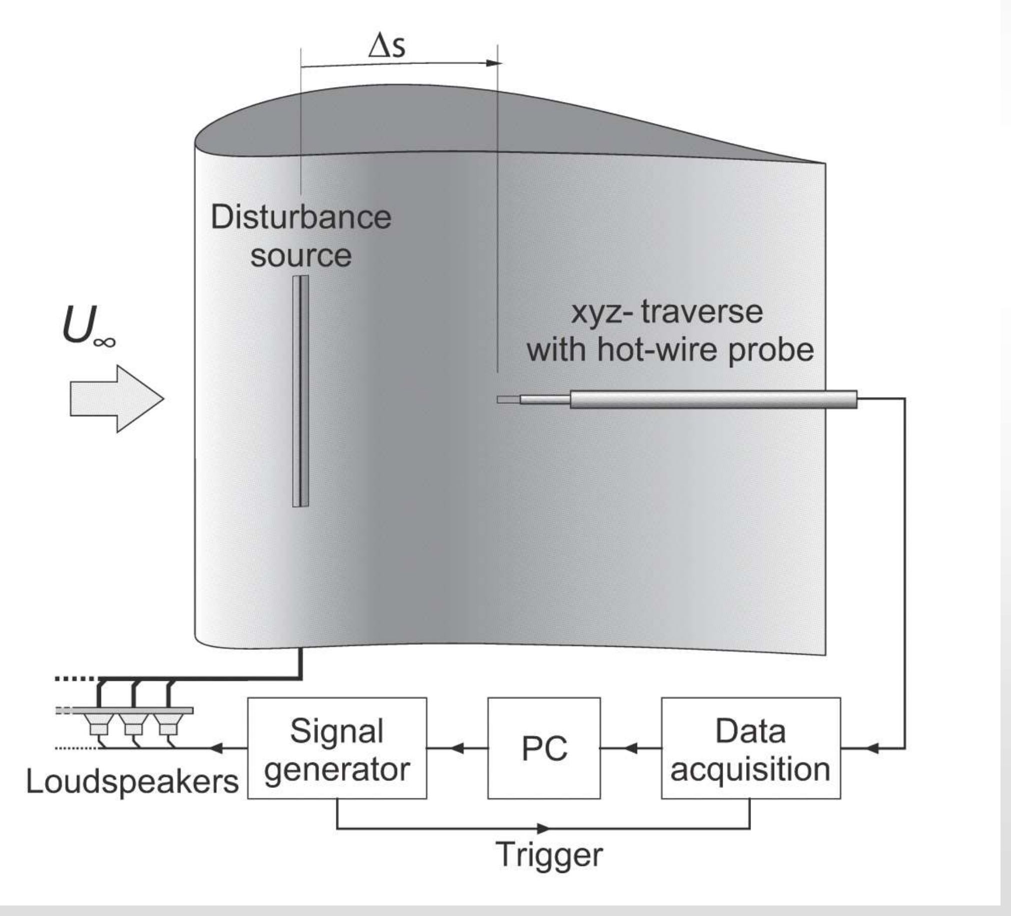
Causa descontinuidade e tem efeito semelhante ao observada na série de Fourier



➢**Análise de Sinais (introdução):**

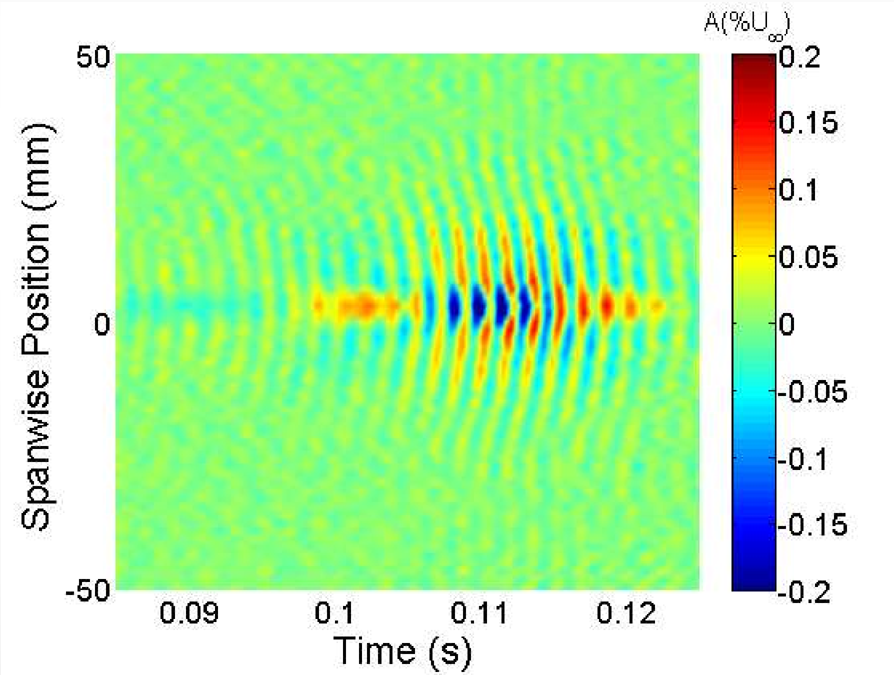
➢Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Exemplos de aplicação: Medição de flutuações em camada limite

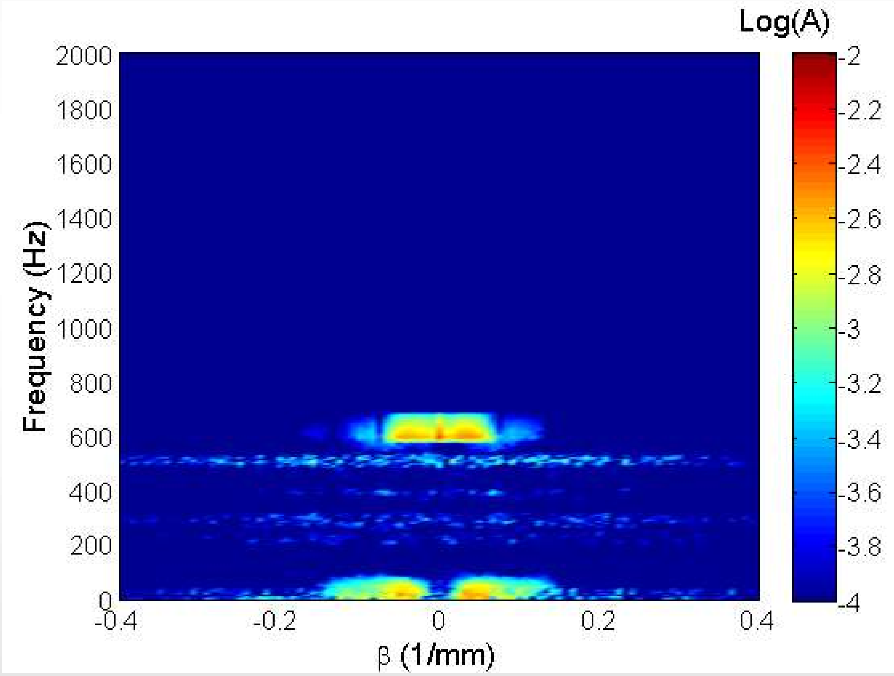


- **Análise de Sinais (introdução):**
  - <u>Transformada Rápida de Fourier (FFT)</u>:

Exemplos de aplicação:



Ondas no plano paralelo a superfície



Espectro de Frequências e números de onda na direção transversal