

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro / PUC-Rio  
Departamento de Engenharia Mecânica

**MEC2344**  
Mecânica dos Fluidos I

## **Notas de Aula**

*Prof. Luis Fernando Azevedo*

*(lfaa@puc-rio.br)*

*Rio de Janeiro, 02 de agosto de 2010*



---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Mecânica do Contínuo $\times$ Teoria Cinética dos Gases	1
<b>2</b>	<b>Revisão de Análise Vetorial</b>	<b>3</b>
2.1	Escalares e Vetores	3
2.2	Operações com Vetores	3
2.3	Notação Indicial	6
2.4	Cálculo Vetorial	12
2.5	Rotação de Coordenadas e Definição de Vetor	23
2.6	Tensores Cartesianos	25
2.7	Sistemas de Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	27
2.8	Teoremas Integrais	30
<b>3</b>	<b>Cinemática dos Meios Deformáveis</b>	<b>35</b>
3.1	Descrição Material e de Campo	36
3.2	Trajetória, Linha de Corrente e Linha de Tinta	41
3.3	Dilatação e Derivada Material da Dilatação	44
3.4	Derivada Material da Dilatação $J$	47
3.5	Teorema de Transporte de Reynolds	49
3.6	Cinemática da Deformação	52
3.7	Resumo das Seções Anteriores	61
<b>4</b>	<b>Dinâmica dos Meios Deformáveis</b>	<b>62</b>
4.1	Conservação da Quantidade de Movimento Linear	63
4.2	Prova da Simetria do Tensor das Tensões	69
4.3	Aplicações da Equação de Cauchy para o Movimento	71
4.4	Resumo	76
4.5	Exercício Proposto	77
<b>5</b>	<b>Equação da Energia</b>	<b>78</b>
<b>6</b>	<b>Segunda Lei da Termodinâmica</b>	<b>83</b>
6.1	Resumo	85
<b>7</b>	<b>Equações Constitutivas</b>	<b>86</b>
7.1	Algumas Considerações sobre $\mu$ , $\lambda$ e $k$	89

<b>8</b>	<b>Equações Governando o Escoamento de Fluidos Newtonianos</b>	<b>93</b>
8.1	Derivação da Equação da Vorticidade . . . . .	98
<b>9</b>	<b>Modelos para Escoamentos Reais</b>	<b>100</b>
9.1	Fluido Perfeito . . . . .	101
9.2	Escoamentos Barotrópicos de Fluidos Perfeitos . . . . .	101
9.3	Escoamentos Potenciais . . . . .	104
9.4	Escoamentos Potenciais Bi-dimensionais . . . . .	105
9.5	Potenciais Complexos e Velocidade Complexa . . . . .	105
9.6	Solução de Alguns Problemas Clássicos . . . . .	119
9.7	Cinemática da Vorticidade . . . . .	123
9.8	Teorema de Kelvin para Circulação . . . . .	125
<b>10</b>	<b>Aplicações</b>	<b>129</b>
10.1	Escoamento Viscoso . . . . .	129
10.2	Escoamento Lento ( <i>Creeping Flow</i> ) . . . . .	148

---

# Referências Bibliográficas

- **Currie**, *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw Hill, **1974**
  - **Aris, R.**, *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice Hall, **1962**
  - **Batchelor**, *Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, **1980**
  - **Panton, R. L.**, *Incompressible Flow*, John Wiley, 2<sup>nd</sup> Ed., **1996**
- 

# Lista de Símbolos

---

Símbolo	Descrição	Seção	Página
$\vec{A}$	Notação de vetor	2.2	3
$\hat{a}$	Vetor unitário	2.2	4
$\cos(\vec{A}, \vec{B})$	Cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$	2.2	4
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Vetores unitários nas direções dos eixos $x, y, z$	2.2	4
$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$	Representação alternativa para os vetores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	2.2	4
$\vec{A} \cdot \vec{B}$	Produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$	2.2	5
$\vec{A} \times \vec{B}$	Produto vetorial entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$	2.2	5
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker	2.3	9
$\epsilon_{ijk}$	Símbolo de permutação	2.3	10
$\vec{\nabla}(\ast)$	Operador gradiente	2.4	13
$\vec{\nabla}\psi$	Gradiente de um campo escalar	2.4	13
$div \vec{A}$	Divergente de um vetor	2.4	16
$\nabla^2(\ast)$	Operador Laplaciano	2.4	18
$rot \vec{A}$	Rotacional de um vetor	2.4	19
$\Gamma$	Circulação	2.4	20

---

<b>Símbolo</b>	<b>Descrição</b>	<b>Seção</b>	<b>Página</b>
$\overline{\overline{T}}$	Notação de tensor	2.6	25
$\overline{\overline{I}}$	Tensor identidade	2.6	25
$D(*)/Dt$	Derivada material	3.1	40
$\partial(*)/\partial t$	Derivada local	3.1	40
$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} (*)$	Derivada convectiva	3.1	40
$J = \delta V / \delta V_0$	Dilatação	3.3	44
$\overline{\overline{D}}$	Tensor de deformação	3.6	52
$\overline{\overline{\Omega}}$	Tensor de rotação ou de vorticidade	3.6	52
$\vec{w}$	Vetor vorticidade	3.6	58
$\overline{\overline{T}}$	Tensor das tensões	4.1	63
$p$	Pressão hidrostática	4.3	71
$\overline{\overline{\tau}}$	Tensor das tensões viscosas	4.3	73
$\varepsilon$	Energia interna por unidade de massa	5	78
$\vec{q}$	Vetor densidade de fluxo de calor	5	78
$S$	Entropia do material	6	83
$s$	Entropia por unidade de massa	6	83
$k$	Coefficiente da Lei de Fourier	7	86
$\lambda$	Segundo coeficiente de viscosidade	7	86
$\mu$	Viscosidade dinâmica	7	86
$\beta$	Viscosidade global	7.1	91
$\overline{p}$	Tensão normal média	7.1	92
$\mathcal{K}$	Fator de compressibilidade isotérmica	8	93
$\beta^*$	Coefficiente de expansão volumétrica	8	93
$\nu$	Viscosidade cinemática	8.1	98
$\phi$	Potencial de velocidade	9.3	104
$\psi$	Potencial de velocidade	9.4	105
$F(z)$	Função analítica	9.5	105
$Re$	Número de Reynolds	10.1	130
$Ec$	Número de Eckert	10.1	131
$Pr$	Número de Prandtl	10.1	131
$Re Pr$	Número de Péclet	10.1	131
$Gr$	Número de Grashof	10.1	131
$Nu$	Número de Nusselt	10.1	132
$C$	Número de Cavitação	10.1	132
$Fr$	Número de Froude	10.1	132
$W$	Número de Weber	10.1	132
$c_f$	Coefficiente de atrito de Fanning	10.1	136
$C_D$	Coefficiente de arraste	10.2	149
$Re^*$	Número de Reynolds reduzido	10.2	154

---

# Capítulo 1

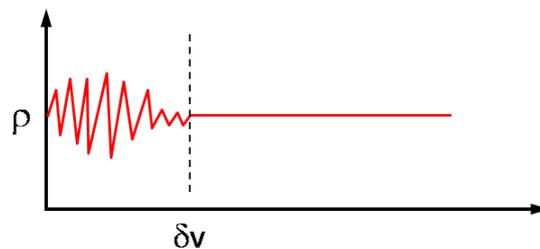
## Introdução

### 1.1 Mecânica do Contínuo × Teoria Cinética dos Gases

Toda matéria é composta de átomos ou moléculas em constante movimento (função da temperatura). Uma teoria de mecânica dos fluidos completa e rigorosa deveria considerar esta estrutura da matéria para obter as equações que governam o escoamento. Este tipo de enfoque, no entanto, é extremamente complexo, exceto em casos especiais de gases monoatômicos rarefeitos. Este enfoque é considerado na teoria cinética dos gases.

Felizmente para fluidos sob condições normais de pressão e temperatura existe uma formulação que tem demonstrado ser útil na solução de problemas. Trata-se do modelo contínuo do fluido. Neste modelo *assume-se* que qualquer propriedade local do fluido permanece inalterada não importando o tamanho da amostra de fluido examinada.

Por exemplo, se  $\delta v$  é um pequeno volume de fluido em algum ponto do espaço, assumimos que a massa específica, definida como  $\rho = \frac{\text{massa em } \delta v}{\delta v}$ , é independente de  $\delta v$ .



Obviamente, esta hipótese vai falhar quando  $\delta v$  se tornar da ordem do volume de uma molécula.

Para se ter uma ideia da validade da hipótese do contínuo, considere um volume de gás de  $10^{-6} \text{ cm}^3$ . Este volume é certamente menor que o volume dos menores instrumentos utilizados no laboratório para medidas locais. Um volume pequeno como este contém da ordem de  $10^{16}$  moléculas, o que é suficiente para garantir a aplicação com sucesso do modelo contínuo para o fluido.

Este modelo contínuo de fluido falha em qualquer região do espaço onde as propriedades macroscópicas do fluido variem rapidamente em uma região comparável ao caminho livre médio entre colisões ( $\approx 10^{-5} \text{ cm}$  nas CNTP).

Exemplos onde o modelo contínuo pode falhar:

- ondas de choque
- arraste em um satélite na atmosfera onde o número de moléculas por unidade de volume é pequeno
- movimento de aerossóis

---

## Capítulo 2

# Revisão de Análise Vetorial

### 2.1 Escalares e Vetores

Existem muitas grandezas físicas que estão associadas à uma única magnitude. Por exemplo, a massa específica de um fluido em um ponto é determinada por uma única grandeza. Não há sentido em associar-se uma direção à massa específica. Estas grandezas são chamadas **escalares**.

Se a unidade na qual a grandeza escalar é expressa muda, o número real associado à grandeza vai mudar, mas não a entidade física. Desta forma, a massa específica da água à  $4^{\circ}C$  é  $1 \frac{g}{cm^3}$  ou  $62.4 \frac{lbm}{ft^3}$ . Os dois números expressam a mesma massa específica.

Existem outras grandezas associadas com um ponto que têm magnitude e direção. Esta quantidade física é chamada **vetor**. Uma mudança de unidades muda a magnitude do vetor, da mesma forma que ocorre no caso do escalar. A direção do vetor deve ser especificada em relação a um sistema de referência que é tão arbitrário quanto a escolha das unidades nas quais a magnitude é definida. Uma rotação do sistema de referência utilizado muda o valor dos componentes do vetor no sistema de coordenadas. A entidade física representada pelo vetor, no entanto, permanece inalterada.

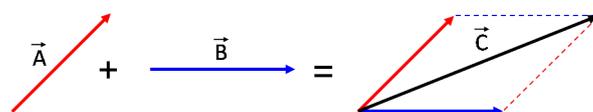
O conjunto de componentes do vetor não tem sentido se o sistema de referência utilizado não for especificado, assim como, no caso do escalar, 62.4 não significa a massa específica até que as unidades sejam especificadas.

Podemos então definir um vetor:

*“vetor é uma entidade que tem magnitude e direção e é invariante com relação à uma transformação de coordenadas (i.e., os componentes do vetor podem mudar mas não o vetor propriamente dito).”*

### 2.2 Operações com Vetores

#### Soma de Dois Vetores



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

### Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Multiplica-se a magnitude do vetor pelo escalar mantendo-se a direção (ou revertendo-a, caso o escalar seja negativo):

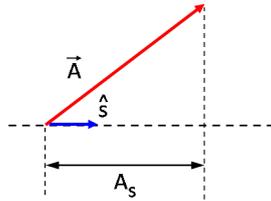
$$\vec{B} = \alpha \vec{A}$$

### Vetores Unitários

Vetor unitário na direção de  $\vec{A}$ :

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

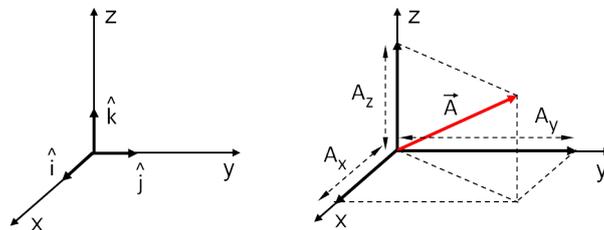
### Componentes de um Vetor em uma dada Direção



$$A_s = |\vec{A}| \cos(\vec{A}, \hat{s})$$

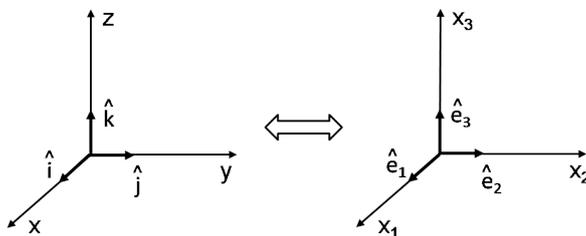
### Representação de um Vetor em Termos de seus Componentes

Usando um sistema de coordenadas formado por um conjunto de três vetores unitários mutuamente ortogonais, podemos representar um vetor  $\vec{A}$  em termos de seus componentes:



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

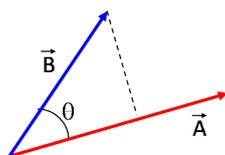
Para facilitar o desenvolvimento da notação indicial, podemos fazer a seguinte associação:



$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$$

### Produtos de Vetores

**Produto Escalar** (“o resultado é um escalar”)



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) \quad \text{ou:} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos(\theta)$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

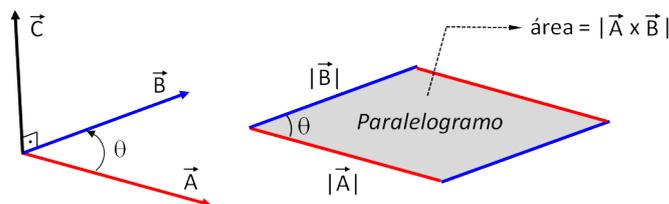
Em função dos componentes dos vetores, o produto escalar é dado por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

Notar que:

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$

**Produto Vetorial** (“o resultado é um vetor”)



$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta) \hat{n}$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário normal ao plano formado por  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  e direcionado de acordo com a *regra da mão direita*.

Em função dos componentes dos vetores, o produto vetorial é dado por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{e}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \hat{e}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \hat{e}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

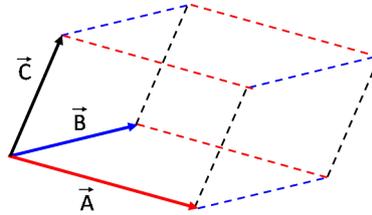
Note que a expressão acima é a expansão do seguinte determinante:<sup>1</sup>

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Pode ser demonstrado que:

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

**Produto Triplo (“o resultado é um escalar”)**



$$|\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}| = \text{volume do paralelepípedo}$$

Notar que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}$$

## 2.3 Notação Indicial

Uma alternativa muito usada para a notação simbólica, adotada até agora, é a chamada *notação indicial*.

<sup>1</sup>Esta forma de determinante só é válida para um sistema de coordenadas retangulares.

### Notação e Convenções

Para representar os componentes de um vetor no espaço  $3D$ , usaremos a mesma letra para cada componente, que serão diferenciadas umas das outras pelos índices 1, 2 ou 3.

Desta forma, ao invés de  $x, y$  e  $z$  para os componentes de um *vetor posição*  $\vec{r}$ , usaremos  $x_1, x_2$  e  $x_3$  ou  $r_1, r_2$  e  $r_3$ .

Esta convenção nos leva ao desenvolvimento de uma notação que vai economizar bastante escrita.

Os componentes do vetor  $\vec{A}$  serão escritos na forma  $A_i$ , onde ficará subentendido que o índice  $i$  poderá assumir os valores 1, 2 ou 3, ou seja:

$$A_i \implies \begin{cases} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{cases}$$

Considere as seguintes expressões de somatório:

- Somatório Simples (3 parcelas):

$$\sum_{i=1}^3 a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

- Somatório Duplo (9 parcelas):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j &= a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \\ & a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + \\ & a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3 \end{aligned}$$

As notações  $\sum_{i=1}^3 a_i x_i$  e  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$  são uma maneira abreviada de representar, respectivamente, 3 e 9 parcelas.

Note que os índices repetidos estão envolvidos na soma, o que torna o símbolo de soma redundante. Podemos, então, abandoná-lo e adotar a convenção de soma de *Einstein*:

“um índice repetido em qualquer termo de uma expressão implica na soma para os valores do índice iguais a 1, 2 e 3”

Exemplos:

$$(a) \quad a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$$(b) \quad c_{ii} = c_{11} + c_{22} + c_{33}$$

$$(c) \quad a_i a_i = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\begin{aligned} (d) \quad b_{ij} x_i x_j &= b_{1j} x_1 x_j + b_{2j} x_2 x_j + b_{3j} x_3 x_j \\ &= b_{11} x_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \\ & b_{21} x_2 x_1 + b_{22} x_2 x_2 + b_{23} x_2 x_3 + \\ & b_{31} x_3 x_1 + b_{32} x_3 x_2 + b_{33} x_3 x_3 \end{aligned}$$

$$(e) \quad a_{ij} b_i = a_{1j} b_1 + a_{2j} b_2 + a_{3j} b_3 \quad \text{para } j = 1, 2 \text{ e } 3$$

O símbolo  $a_{ij}$  representa cada um dos 9 termos da matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Notas:

- Índices repetidos podem ser trocados por quaisquer outros índices não presentes no termo, sem alterar o significado do termo. Exemplos:

$$(a) \quad a_i b_i = a_j b_j = a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$(b) \quad a_i b_i x_j = a_k b_k x_j = a_m b_m x_j = a_1 b_1 x_j + a_2 b_2 x_j + a_3 b_3 x_j \\ (\text{para } j = 1, 2 \text{ e } 3)$$

- Não são permitidos mais de 2 índices repetidos em um mesmo termo. Por exemplo, o termo  $a_i b_i x_i$  não tem sentido pois não sabemos qual soma proceder primeiro, ou seja:

$$a_i b_i x_i = a_i b_1 x_1 + a_i b_2 x_2 + a_i b_3 x_3$$

ou:

$$a_i b_i x_i = a_1 b_1 x_i + a_2 b_2 x_i + a_3 b_3 x_i$$

- Índices não repetidos são chamados de “índices livres” e podem assumir os valores 1, 2 ou 3
- O número de termos da expressão é dado por  $3^n$ , onde  $n$  é o número de índices livres. Exemplos:

$$(a) \quad A_j \longrightarrow 3 \text{ termos}$$

$$(b) \quad A_{ij} \longrightarrow 3^2 \text{ termos}$$

$$(c) \quad A_{ijkl\dots} \longrightarrow 3^n \text{ termos}$$

- Em qualquer equação ou expressão, cada termo deve possuir o mesmo índice livre. Exemplos:

$$(a) \quad a_{ij} x_j + b_{ik} x_k = c_i \\ (\text{o índice livre } i \text{ é comum a todos os termos})$$

$$(b) \quad a_{ij} x_j + b_{ik} x_k = c_r \\ (\text{não tem sentido ! Não sabemos que valor atribuir a } r \text{ quando } i = 1, 2, 3)$$

6. A ordem de um termo é dada pelo número de índices livres presentes. Exemplos:

$$(a) \quad \phi \implies (\textit{ordem zero})$$

$$(b) \quad a_i \implies (\textit{primeira ordem})$$

$$(c) \quad a_{ij} \implies (\textit{segunda ordem})$$

### Delta de Kronecker

Trata-se de um sistema de  $2^a$  ordem que será bastante útil nas derivações utilizadas neste curso. Matematicamente, é definido como:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

desta forma, os 9 termos podem ser representados por:

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que, pela convenção de soma:  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$

O delta de Kronecker possui uma propriedade interessante chamada de *propriedade de substituição*. Considere o seguinte termo:

$$\delta_{ij} a_j = \delta_{i1} a_1 + \delta_{i2} a_2 + \delta_{i3} a_3 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

A expressão acima representa cada uma das seguintes expressões:

$$\begin{array}{llll} \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 & \text{para } i = 1 \\ \delta_{21} a_1 + \delta_{22} a_2 + \delta_{23} a_3 & \text{para } i = 2 \\ \delta_{31} a_1 + \delta_{32} a_2 + \delta_{33} a_3 & \text{para } i = 3 \end{array}$$

ou ainda:

$$\begin{array}{llll} a_1 + 0 + 0 & \text{para } i = 1 \\ 0 + a_2 + 0 & \text{para } i = 2 \\ 0 + 0 + a_3 & \text{para } i = 3 \end{array}$$

ou finalmente:  $\delta_{ij} a_j = a_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Desta forma, o resultado da operação de  $\delta_{ij}$  em  $a_j$  consiste em substituir o índice repetido pelo índice livre de  $\delta_{ij}$ . Exemplos:

$$(a) \quad \delta_{ij} a_i b_k = a_j b_k$$

$$(b) \quad \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i = a_j b_j$$

A seguir, apresentaremos uma operação útil com  $\delta_{ij}$ .

Para vetores unitários de um sistema de coordenadas  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  as condições de ortogonalidade exigem:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 &= 1 \\ \text{e} \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 &= \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 = 0 \end{aligned}$$

Todas as expressões acima podem ser resumidas na seguinte expressão:

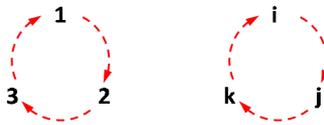
$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

### Símbolo de Permutação

Trata-se de um sistema de 3ª ordem definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se 2 índices forem iguais} \\ 1 & \text{se for uma permutação par da ordem natural 1-2-3} \\ -1 & \text{se for uma permutação ímpar da ordem natural 1-2-3} \end{cases}$$

onde uma permutação é dita par (ou cíclica) quando segue a orientação abaixo:



Então, dos  $3^3 = 27$  possíveis valores de  $\epsilon_{ijk}$ , os únicos que são diferentes de zero são:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$$

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$$

O símbolo de permutação pode ser aplicado na representação de determinantes, ou seja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Outra aplicação do símbolo de permutação é na representação do produto vetorial de vetores unitários de um sistema de coordenadas ortogonal:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \epsilon_{kij} \hat{e}_k$$

Então:

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \epsilon_{231} \hat{e}_1 + \epsilon_{232} \hat{e}_2 + \epsilon_{233} \hat{e}_3 = \hat{e}_1$$

### Simetria e Anti-Simetria

Um sistema é simétrico com respeito a dois índices se o intercâmbio dos índices deixa o sistema inalterado. Por exemplo,  $A_{ij}$  é simétrico se  $A_{ij} = A_{ji}$ . Um sistema é dito anti-simétrico com respeito a dois índices se o intercâmbio dos índices troca o sinal de cada componente. Então, se  $A_{ij}$  é anti-simétrico,  $A_{ij} = -A_{ji}$ . Note que, num sistema anti-simétrico,  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$ . É importante observar também que  $\delta_{ij}$  é simétrico e  $\epsilon_{ijk}$  é anti-simétrico com respeito a qualquer índice. Um resultado útil relacionando sistemas simétricos e anti-simétricos é mostrado a seguir:

“se  $S_{ij}$  é simétrico com relação a  $i$  e  $j$  e  $A_{ij}$  é anti-simétrico com relação a  $i$  e  $j$ , então  $S_{ij} A_{ij} = 0$ .”

Prova:

$$S_{ij} A_{ij} = S_{ji} A_{ji} \quad (\text{não altera pois } i \text{ e } j \text{ são índices repetidos})$$

$$S_{ji} A_{ji} = S_{ij} A_{ji} \quad (S_{ij} \text{ é simétrico})$$

$$S_{ij} A_{ji} = -S_{ij} A_{ij} \quad (A_{ij} \text{ é anti-simétrico})$$

Portanto, mostramos que:  $S_{ij} A_{ij} = -S_{ij} A_{ij}$  que só será verdade se  $S_{ij} A_{ij} = 0$ .

### Operações com Vetores em Notação Indicial

Nosso objetivo é nos tornar familiarizados com as relações entre as representações simbólica e indicial das expressões vetoriais e sermos capazes de mudar rapidamente de uma notação para outra. Vamos notar que a notação indicial é extremamente poderosa.

#### (a) Representação de um Vetor em termos de seus Componentes

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$$

em notação indicial:  $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$

Qualquer componente  $A_j$  do vetor pode ser obtido pelo produto escalar:

$$\hat{e}_j \cdot \vec{A} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}_i A_i = A_j$$

#### (b) Produto Escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \hat{e}_i A_i \cdot \hat{e}_j B_j = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j A_i B_j = \delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i$$

#### (c) Produto Vetorial

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{e}_i A_i \times \hat{e}_j B_j = \hat{e}_i \times \hat{e}_j A_i B_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k A_i B_j = \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k$$

o componente  $k$  do vetor  $\vec{A} \times \vec{B}$  é dado por:

$$\vec{A} \times \vec{B} \Big|_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j$$

(d) **Produto Triplo**

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} &= \hat{e}_i A_i \cdot (\hat{e}_j B_j \times \hat{e}_k C_k) \\ &= \hat{e}_i A_i \cdot (\epsilon_{jkm} B_j C_k \hat{e}_m) \\ &= \hat{e}_i \cdot \hat{e}_m \epsilon_{jkm} A_i B_j C_k \\ &= \delta_{im} \epsilon_{jkm} A_i B_j C_k \\ &= \epsilon_{jki} A_i B_j C_k \\ &= \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \end{aligned}$$

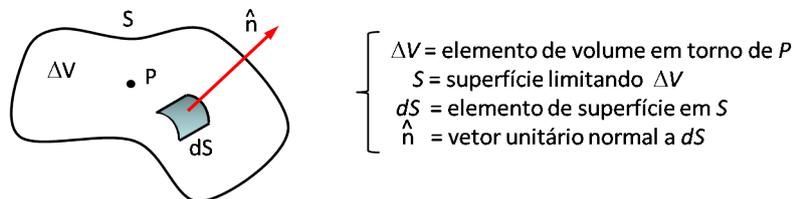
(e) **Identidade  $\epsilon-\delta$**

Pode-se provar que:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

## 2.4 Cálculo Vetorial

O cálculo diferencial de vetores pode ser tratado de uma maneira estritamente matemática (ver livros de cálculo vetorial), definindo os operadores diferenciais da seguinte forma:



Assuma que  $\varphi(\vec{r})$  seja uma função escalar da posição (campo escalar), por exemplo  $T(x, y, z)$ ,  $\rho(x, y, z)$  ou  $P(x, y, z)$ , e que  $\vec{A}(\vec{r})$  seja um campo vetorial.

**Gradiente de um Campo Escalar  $\varphi(\vec{r})$**

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \hat{n} \varphi dS$$

“o gradiente de um campo escalar é um vetor que aponta para a direção de máximo crescimento desta grandeza”

### Divergência de um Campo Vetorial

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \hat{n} \cdot \vec{A} dS$$

“o divergente de um campo vetorial é um escalar”

### Rotacional de um Campo Vetorial

$$\operatorname{rot} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \hat{n} \times \vec{A} dS$$

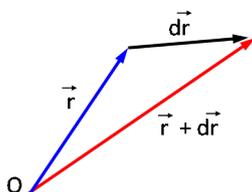
“o rotacional de um campo vetorial é um vetor”

Nós preferimos, no entanto, definir estas operações de uma maneira que enfatize o significado físico.

### Gradiente

O gradiente de um campo escalar é um vetor cuja componente em uma dada direção fornece a taxa de variação do escalar naquela direção.

Considere o campo escalar  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$



Uma variação em  $\varphi$  é dada por:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

expandindo em série de Taylor:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 + \dots - \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned}$$

a expressão acima pode ser vista como o resultado do produto escalar dos seguintes vetores:

$$d\varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \hat{e}_3 \right) \cdot (\hat{e}_1 dx_1 + \hat{e}_2 dx_2 + \hat{e}_3 dx_3)$$

ou:

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$$

em notação indicial:<sup>2</sup>

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i$$

Definimos assim o gradiente do campo escalar  $\varphi$  como:

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi &= \hat{e}_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ &= \hat{e}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \hat{e}_i \partial_i \varphi \end{aligned}$$

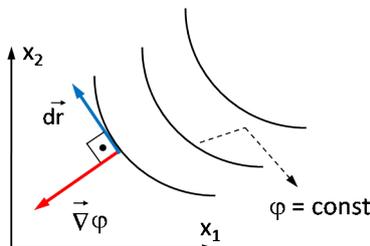
Podemos definir o operador gradiente como:

$$\vec{\nabla}(\ast) = \hat{e}_1 \frac{\partial(\ast)}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial(\ast)}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial(\ast)}{\partial x_3}$$

### Propriedades do gradiente:

1. O vetor gradiente é normal às iso-superfícies ou curvas de nível do campo escalar.

Prova: seja o campo escalar  $\varphi(x_1, x_2)$



nas iso-superfícies,  $\varphi = \text{const}$ , portanto  $d\varphi = 0$  ao longo da superfície. Escolha um elemento  $d\vec{r}$  ao longo da superfície:  $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$ . Como  $d\varphi = 0$ , então,  $\vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = 0$ , mostrando que  $\vec{\nabla}\varphi$  e  $d\vec{r}$  são ortogonais ao longo da superfície.

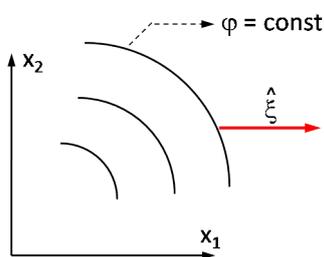
2. A máxima taxa de variação do campo escalar (em um ponto) é igual à magnitude de  $\vec{\nabla}\varphi$  e ocorre na direção de  $\vec{\nabla}\varphi$ .

Prova: assumamos que  $\hat{\xi}$  seja um vetor unitário arbitrário:

a taxa de variação de  $\varphi$  na direção  $\hat{\xi}$  é:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \hat{\xi} \quad \text{onde:} \quad \frac{d\vec{\xi}}{|d\vec{\xi}|} = d\hat{\xi}$$

<sup>2</sup>outra notação comumente usada para  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  é  $\partial_i$ . Assim,  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i$  torna-se  $\partial_i \varphi dx_i$



$$\frac{d\varphi}{d\xi} = |\vec{\nabla}\varphi| |\hat{\xi}| \cos(\theta) = |\vec{\nabla}\varphi| \cos(\theta)$$

$|\frac{d\varphi}{d\xi}|_{max}$  ocorre quando  $\cos(\theta) = 1$ , ou seja,  $\theta = 0$ , i.e.,  $\hat{\xi}$  na direção de  $\vec{\nabla}\varphi$ .

Além disto:  $|\frac{d\varphi}{d\xi}|_{max} = |\vec{\nabla}\varphi|$ .

Exemplo: dado o campo de temperatura:

$$T(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \quad \text{superfícies isotérmicas}$$

$$\vec{\nabla}T = \hat{e}_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}$$

$$\vec{\nabla}T = 2x_1 \hat{e}_1 + 2x_2 \hat{e}_2 + 2x_3 \hat{e}_3 = 2\vec{r} \quad (\text{direção radial})$$

$$|\vec{\nabla}T| = \sqrt{(2x_1)^2 + (2x_2)^2 + (2x_3)^2} = 2\sqrt{r^2} = 2r$$

no ponto  $(1, 2, 3) \Rightarrow |\vec{\nabla}T| = 2\sqrt{14} \frac{\text{graus}}{\text{unid. comp.}}$ , ocorrendo na direção radial. É a máxima taxa de variação da temperatura.

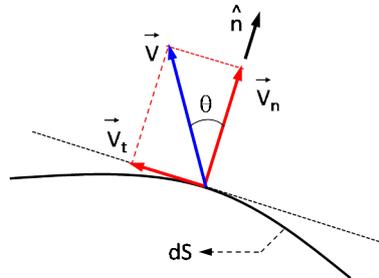
No mesmo ponto  $(1, 2, 3)$ , a taxa de variação na direção  $\hat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$  é:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\xi} &= \hat{\xi} \cdot \vec{\nabla}T = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \cdot (2\hat{e}_1 x_1 + 2\hat{e}_2 x_2 + 2\hat{e}_3 x_3) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

que é menor do que  $2\sqrt{14}$ , o máximo.

### Divergente de um Vetor

Primeiramente, vamos definir o fluxo de um vetor através de uma superfície:

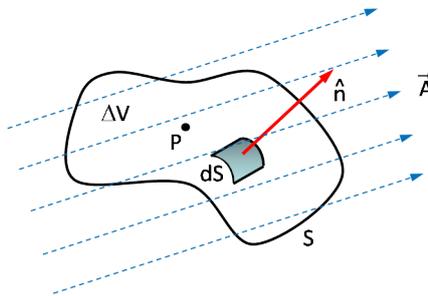


o único componente que contribui para o fluxo do vetor através da superfície é o normal à superfície no ponto, ou seja:

$$\text{Fluxo} = V_n dS = \hat{n} \cdot \vec{V} dS$$

onde  $\hat{n} \cdot \vec{V}$  é o “fluxo por unidade de área.”

O divergente de um vetor em um ponto é o escalar que representa o escoamento líquido daquele vetor, por unidade de volume, no ponto.



- fluxo de  $\vec{A}$  através de  $dS$ :

$$\hat{n} \cdot \vec{A} dS$$

- escoamento líquido de  $\vec{A}$  através de  $S$ , a superfície que envolve o volume  $\Delta V$ :

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{A} dS$$

- escoamento líquido por unidade de volume:

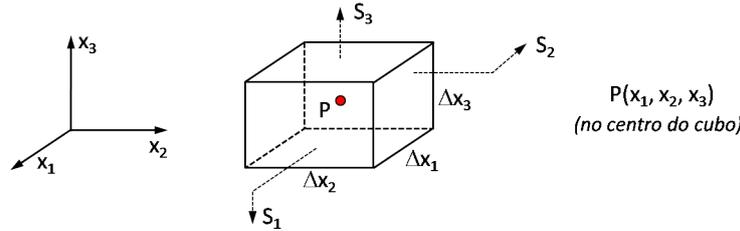
$$\frac{1}{\Delta V} \int_S \hat{n} \cdot \vec{A} dS$$

- divergente de  $\vec{A}$ :

$$\text{div } \vec{A} = \text{fluxo líquido de } A \text{ em } P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \hat{n} \cdot \vec{A} dS$$

A noção de divergente da eletrostática implica em quanto um campo diverge do ponto. Este “quanto” está relacionado com a quantidade de carga no ponto.

Vamos encontrar uma expressão para  $\text{div } \vec{A}$ . Considere um pequeno cubo, de dimensões  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  e  $\Delta x_3$ , cujas faces são paralelas aos eixos coordenados:



Vamos calcular  $\int_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$  sobre a área do cubo. Começando por  $S_1$ , o vetor normal a esta face é  $\hat{e}_1$ . Então:

$$\int_{S_1} \vec{A} \cdot \hat{e}_1 dS = \int_{S_1} A_1 dS$$

Uma vez que o cubo é pequeno (nós iremos tomar o limite quando  $\Delta V \rightarrow 0$ ), podemos calcular a integral acima multiplicando  $A_1$ , avaliado no centro da face, pela área da face. As coordenadas do centro da face  $S_1$  são  $(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3)$ , ou seja:

$$\int_{S_1} A_1(x_1, x_2, x_3) dS \approx A_1\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) \Delta x_2 \Delta x_3$$

o mesmo tipo de argumento se aplica à face oposta  $S_2$  (cuja normal agora é “ $-\hat{e}_1$ ”):

$$\int_{S_2} \vec{A} \cdot \hat{n} dS = - \int_{S_2} A_1 dS \approx -A_1\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) \Delta x_2 \Delta x_3$$

Somando as duas contribuições:

$$\begin{aligned} \int_{S_1+S_2} \vec{A} \cdot \hat{n} dS &= \left[ A_1\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) - A_1\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) \right] \Delta x_2 \Delta x_3 \\ &= \frac{A_1\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) - A_1\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right)}{\Delta x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \end{aligned}$$

mas:  $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{S_1+S_2} \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \frac{A_1\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) - A_1\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right)}{\Delta x_1}$$

Tomando-se o limite  $\Delta V \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{S_1+S_2} \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \quad (\text{avaliado em } x_1, x_2, x_3)$$

Fazendo-se o mesmo para as outras faces:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{S_1+S_2} \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

em notação indicial:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \hat{e}_j A_j = \delta_{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

## Operador Laplaciano

**Campo Escalar:**

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (*) &= \text{div grad } (*) \\ &= \text{Laplaciano de } (*) \\ &= \nabla^2 (*) \end{aligned}$$

(o resultado é um escalar)

em notação indicial:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi &= \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \hat{e}_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \\ &= \nabla^2 \varphi \end{aligned}$$

**Campo Vetorial:**

Seja  $\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= \nabla^2 (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3) \\ &= \nabla^2 A_1 \hat{e}_1 + \nabla^2 A_2 \hat{e}_2 + \nabla^2 A_3 \hat{e}_3 \\ &= \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} \right) \hat{e}_1 + \\ &\quad \left( \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3^2} \right) \hat{e}_2 + \\ &\quad \left( \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3^2} \right) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

(o resultado é um vetor)

**Rotacional de um Vetor**

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

em notação indicial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\hat{e}_i \partial_i) \times (\hat{e}_j A_j) = \hat{e}_i \times [\hat{e}_j \partial_i A_j + A_j \partial_i \hat{e}_j]$$

mas:  $A_j \partial_i \hat{e}_j = \vec{0}$  (para coordenadas Cartesianas)

portanto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \hat{e}_k$$

em coordenadas Cartesianas:

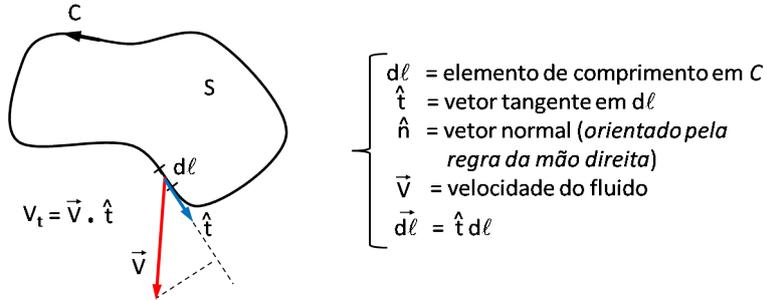
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Duas interpretações de  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  são possíveis:

1.  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  está relacionado com o componente tangencial médio de  $\vec{A}$  em torno de uma curva fechada em torno de um ponto  $P$ .
2. Se  $\vec{V}$  é a velocidade do fluido,  $\vec{\nabla} \times \vec{V}$  está relacionado com a velocidade angular do fluido em  $P$ . Vamos voltar a este ponto mais tarde.

### Circulação ( $\Gamma$ )

Considere uma curva fechada  $C$ :



Definição:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} \, dl = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

Note que a velocidade média tangencial em torno de  $C$  é:

$$V_{t,média} = (\vec{V} \cdot \hat{t})_{média} = \frac{1}{L} \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} \, dl = \frac{\Gamma}{L}$$

onde  $L$  é o comprimento total da curva  $C$ .

### Resumo das Relações Vetoriais (Indicial-Simbólica)

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$
- $\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k$
- $\vec{A} \times \vec{B} \Big|_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j$
- $\vec{\nabla} \phi = \hat{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \hat{e}_i \partial_i \phi$
- $\vec{\nabla} \phi \Big|_k = \partial_k \phi$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A_i$
- $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \hat{e}_k$
- $\vec{\nabla} \times \vec{A} \Big|_k = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j$

**Exercícios Resolvidos**

Provar que:

$$\bullet \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

**Demonstração:**

$$\vec{A} \times \left( \underbrace{\vec{B} \times \vec{C}}_{\vec{D}} \right) = \vec{A} \times \vec{D} = \hat{e}_i A_i \times \hat{e}_j D_j = \epsilon_{ijk} A_i D_j \hat{e}_k$$

mas:

$$\vec{D} = \vec{B} \times \vec{C} = \hat{e}_l B_l \times \hat{e}_m C_m = \epsilon_{lmj} B_l C_m \hat{e}_j$$

notar que:

$$\vec{D} \Big|_j = \epsilon_{lmj} B_l C_m$$

portanto:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{ijk} A_i \epsilon_{lmj} B_l C_m \hat{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmj} A_i B_l C_m \hat{e}_k \\ &= \epsilon_{jki} \epsilon_{jlm} A_i B_l C_m \hat{e}_k \end{aligned}$$

Usando a identidade  $\epsilon$ - $\delta$ :

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= [\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}] A_i B_l C_m \hat{e}_k \\ &= \delta_{kl} \delta_{im} A_i B_l C_m \hat{e}_k - \delta_{km} \delta_{il} A_i B_l C_m \hat{e}_k \\ &= A_m B_k C_m \hat{e}_k - A_l B_l C_k \hat{e}_k \\ &= A_m C_m B_k \hat{e}_k - A_l B_l C_k \hat{e}_k \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \end{aligned}$$

- $\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) = \varphi (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times \vec{\nabla} \varphi$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) &= \hat{e}_i \partial_i \times (\varphi \hat{e}_j A_j) \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_i (\varphi A_j) \hat{e}_k \\
 &= \epsilon_{ijk} \varphi \partial_i A_j \hat{e}_k + \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{=-\epsilon_{jik}} A_j \partial_i \varphi \hat{e}_k \\
 &= \varphi (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times \vec{\nabla} \varphi
 \end{aligned}$$

- $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} + \vec{A} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \vec{B} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \left( \underbrace{\vec{A} \times \vec{B}}_{\vec{D}} \right) &= \hat{e}_i \partial_i \times (\hat{e}_j D_j) \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_i D_j \hat{e}_k
 \end{aligned}$$

mas:

$$\vec{D} \Big|_j = \epsilon_{mlj} A_m B_l$$

logo:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mlj} \partial_i A_m B_l \hat{e}_k \\
 &= (\delta_{km} \delta_{il} - \delta_{kl} \delta_{im}) \partial_i A_m B_l \hat{e}_k \\
 &= \partial_l A_k B_l \hat{e}_k - \partial_m A_m B_k \hat{e}_k \\
 &= A_k \partial_l B_l \hat{e}_k + B_l \partial_l A_k \hat{e}_k - A_m \partial_m B_k \hat{e}_k - B_k \partial_m A_m \hat{e}_k \\
 &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B}
 \end{aligned}$$

## 2.5 Rotação de Coordenadas e Definição de Vetor

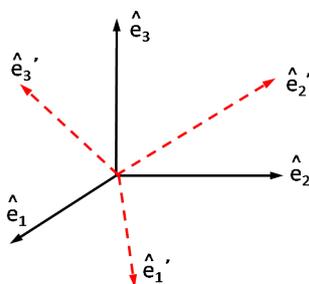
A ideia básica de um vetor é que é uma entidade que é independente do sistema de coordenadas escolhido para representá-lo. Esta ideia, quando formulada matematicamente, leva a uma definição fundamental de vetor e, quando estendida, leva à definição de tensor.

Considere uma entidade  $\vec{A}$  que nós desejamos que possua a propriedade invariante de um vetor. Em um sistema de coordenadas  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  podemos representar  $\vec{A}$  como:

$$\vec{A} = \hat{e}_i A_i$$

onde  $A_i$  são os componentes de  $\vec{A}$  no sistema escolhido.

Considere agora um novo sistema de coordenadas (*primo*) com vetores base  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ :



Neste sistema podemos escrever:

$$\vec{A} = \hat{e}'_j A'_j$$

onde  $A'_j$  são os componentes de  $\vec{A}$  no sistema *primo*, que não são, em geral, iguais aos componentes no sistema original (não *primo*). Se queremos que  $\vec{A}$  seja independente do sistema de coordenadas, então:

$$\hat{e}_i A_i = \hat{e}'_j A'_j$$

Suponha que desejamos o componente  $A'_k$ :

$$A'_k = \hat{e}'_k \cdot \vec{A} = \hat{e}'_k \cdot \hat{e}_i A_i$$

então:

$$A'_k = \hat{e}'_k \cdot \hat{e}_i A_i$$

ou:

$$A'_k = A_i \cos(x_i, x'_k) \equiv C_{ik} A_i$$

Notação:

$$C_{ik} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_k = \cos(\hat{e}_i, \hat{e}'_k)$$

onde  $C_{ik}$  representa o cosseno diretor e a convenção adotada é que o segundo índice ( $k$ , nesse caso) está relacionado com o sistema *primo*.

Desenvolvendo a expressão anterior:

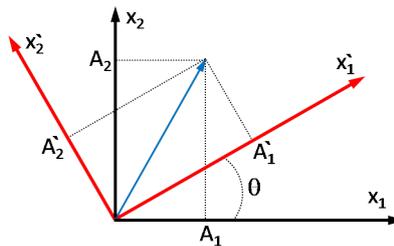
$$A'_k = C_{ik} A_i = C_{1k} A_1 + C_{2k} A_2 + C_{3k} A_3$$

Uma vez que a escolha do sistema *primo* foi arbitrária, podemos trocar as quantidades *primo* e *não primo*, obtendo:

$$A_k = (\hat{e}_k \cdot \hat{e}'_i) A'_i = C_{ki} A'_i$$

Note que  $C_{ki} = \cos(\hat{e}_k, \hat{e}'_i)$  e que  $C_{ik} \neq C_{ki}$ .

### Exemplo em 2D



Seja:

$$A'_k = C_{ik} A_i$$

para  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} A'_1 &= C_{11} A_1 + C_{21} A_2 \\ &= \cos(\hat{e}_1, \hat{e}'_1) A_1 + \cos(\hat{e}_2, \hat{e}'_1) A_2 \\ &= A_1 \cos(\theta) + A_2 \cos(90 - \theta) \end{aligned}$$

por outro lado:

$$A_k = C_{ki} A'_i$$

para  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{11} A'_1 + C_{12} A'_2 \\ &= \cos(\hat{e}_1, \hat{e}'_1) A'_1 + \cos(\hat{e}_1, \hat{e}'_2) A'_2 \\ &= A'_1 \cos(\theta) + A'_2 \cos(90 + \theta) \\ &= A'_1 \cos(\theta) - A'_2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

Os cossenos dos vários ângulos entre os vetores unitários nos dois sistemas de coordenadas satisfazem relações que já devem ter sido aprendidas em geometria. Estas relações podem ser obtidas examinando as transformações:

$$x'_j = C_{ij} x_i \quad (1)$$

$$x_i = C_{ik} x'_k \quad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1):

$$x'_j = C_{ij} C_{ik} x'_k \quad (3)$$

mas, os termos  $x'$  representam coordenadas independentes. Então, obrigatoriamente:

$$C_{ij} C_{ik} = \delta_{jk}$$

Analogamente, podemos obter:

$$C_{ik} C_{jk} = \delta_{ij}$$

$$(vem\ de:\ x_i = C_{ik} x'_k\ e\ x'_k = C_{jk} x_j \implies x_i = C_{ik} C_{jk} x_j)$$

Estas equações fornecem relações entre os cossenos diretores. Por exemplo:

$$C_{ij} C_{ik} = C_{1j} C_{1k} + C_{2j} C_{2k} + C_{3j} C_{3k} = \delta_{jk}$$

para  $j = k = 1$ :

$$C_{11}^2 + C_{21}^2 + C_{31}^2 = \cos^2(x_1, x'_1) + \cos^2(x_2, x'_1) + \cos^2(x_3, x'_1) = 1$$

A transformação  $x'_j = C_{ij} x_i$  representa uma rotação “própria” do sistema de coordenadas (i.e., rotação que preserva a regra da mão direita). A rotação é caracterizada pelos nove cossenos diretores  $C_{ij}$ . Usando o que foi desenvolvido acima (baseado na invariância do vetor), podemos formular uma definição mais rigorosa de vetor:

“em um sistema de coordenadas Cartesianas, um vetor  $\vec{A}$  é definido por 3 componentes (escalares) que se transformam da seguinte forma:  $A'_j = C_{ij} A_i$  quando o sistema de coordenadas é transformado por  $x'_j = C_{ij} x_i$ , onde  $C_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j = \cos(x_i, x'_j)$ .”

## 2.6 Tensores Cartesianos

Um vetor é uma entidade que associa um escalar a cada direção no espaço, ou seja:

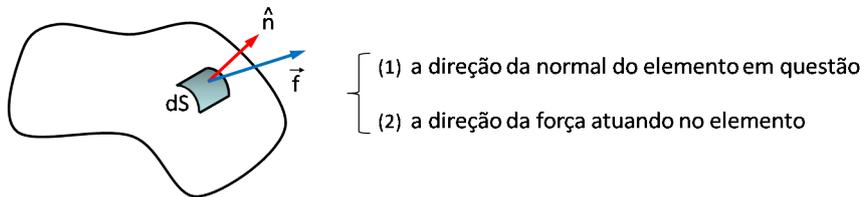
$$\hat{n} \cdot \vec{A} = A \cos(\theta) = A_n$$

A pergunta que cabe agora é:

*existe uma entidade que associe um vetor a cada direção no espaço ?*

Por exemplo, um corpo elástico sob um carregamento: podemos perguntar qual a tensão, ou força sobre área, atuando em um elemento de área arbitrário dentro do corpo.

Note que existem duas direções envolvidas na questão:



Por analogia com o conceito de vetor, podemos pensar em uma entidade  $\bar{\bar{T}}$  que associa com cada direção  $\hat{n}$  um vetor  $\vec{f}$ , pela relação:

$$\vec{f} \equiv \vec{T}_n = \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}}$$

na direção  $\hat{e}_i$ :

$$\vec{T}_i = \hat{e}_i \cdot \bar{\bar{T}}$$

o vetor  $\vec{T}_i$  tem componentes nas direções dos eixos coordenados. Então, um componente  $\hat{e}_j$  é dado por:

$$T_{ij} = \vec{T}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}_i \cdot \bar{\bar{T}} \cdot \hat{e}_j$$

Tensor em termos dos componentes:  $\bar{\bar{T}} = \hat{e}_i T_{ij} \hat{e}_j$

Definição alternativa:

“*tensor de segunda ordem é uma entidade cujos nove componentes se transformam da seguinte forma:  $T'_{ij} = C_{mi} C_{nj} T_{mn}$  quando o sistema de coordenadas sofre rotação própria  $x'_j = C_{ij} x_i$ , onde  $C_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j = \cos(x_i, x'_j)$ .”*

Um importante tensor de segunda ordem é o “*tensor identidade*”:

$$\bar{\bar{I}} = \hat{e}_i \delta_{ij} \hat{e}_j \quad \Longrightarrow \quad \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{I}} \cdot \vec{A} = \hat{e}_i \delta_{ij} \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k A_k = \hat{e}_i \delta_{ij} \delta_{jk} A_k = \hat{e}_j A_j = \vec{A}$$

- **Produto Escalar Esquerdo e Direito**

$$\vec{B} \cdot \overline{\overline{T}} = \hat{e}_i B_i \cdot \hat{e}_j T_{jk} \hat{e}_k = \delta_{ij} B_i T_{jk} \hat{e}_k = B_j T_{jk} \hat{e}_k$$

$$\overline{\overline{T}} \cdot \vec{B} = \hat{e}_i T_{ij} \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k B_k = \hat{e}_i T_{ij} \delta_{jk} B_k = \hat{e}_i T_{ij} B_j$$

Se  $T_{ij} = T_{ji}$  o tensor é *simétrico*, então  $\vec{A} \cdot \overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{A}$

- **Tensores Simétricos e Anti-Simétricos**

$$\text{Simétrico:} \quad T_{ij} = T_{ji}$$

$$\text{Anti-Simétrico:} \quad A_{ij} = -A_{ji}$$

Todo tensor de 2ª ordem pode ser decomposto em uma soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico usando a seguinte identidade:

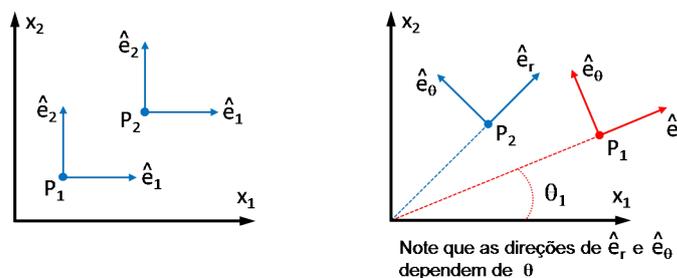
$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji})}_{\text{Simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji})}_{\text{Anti-Simétrico}}$$

## 2.7 Sistemas de Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

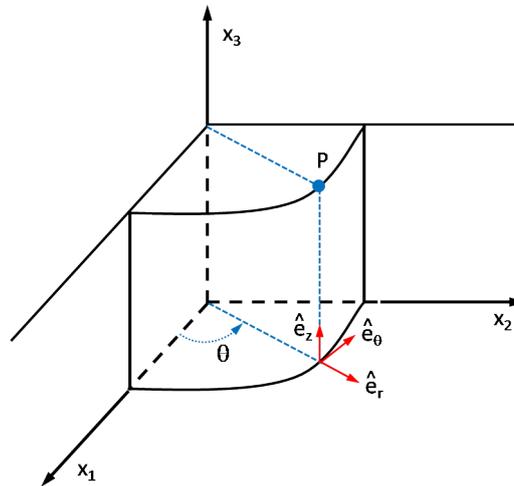
Até agora estudamos os componentes dos vetores e tensores em sistemas de coordenadas Cartesianas. Em muitos problemas de mecânica dos fluidos é mais conveniente usar sistemas de coordenadas curvilíneas como as *cilíndricas* e as *esféricas*.

Nosso objetivo é expressar as equações vetoriais e tensoriais em termos dos componentes no sistema não-Cartesiano apropriado. É possível generalizar o desenvolvimento para englobar qualquer sistema não-Cartesiano. No entanto, vamos nos restringir a sistemas curvilíneos ortogonais.

A principal diferença entre sistemas Cartesianos e outros sistemas é que somente no sistema Cartesiano os vetores unitários nas direções das coordenadas são *independentes da posição*:



### Sistemas de Coordenadas Cilíndricas



### Equações de Transformação do Sistema Cartesiano para o Cilíndrico

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases}$$

### Transformação Inversa

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ z = x_3 \end{cases}$$

Em coordenadas retangulares, um elemento de comprimento infinitesimal é dado por:

$$d\vec{x} = \hat{e}_1 dx_1 + \hat{e}_2 dx_2 + \hat{e}_3 dx_3$$

Em coordenadas cilíndricas, um elemento de comprimento infinitesimal é dado por:

$$d\vec{x} = \hat{e}_r dr + \hat{e}_\theta r d\theta + \hat{e}_z dz$$

onde o termo  $r d\theta$  representa o comprimento verdadeiro na direção  $\theta$ , ou seja  $r$  é o *fator de escala*,  $h_\theta$ , de tal modo que  $h_\theta d\theta$  seja o *comprimento verdadeiro*.

**Operador  $\vec{\nabla}$  em Coordenadas Cilíndricas**

Considere o campo escalar dado em coordenadas cilíndricas  $\varphi(r, \theta, z)$ . Podemos escrever:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz$$

sabemos que:  $d\varphi = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\varphi$ . Logo:

$$\begin{aligned} d\varphi &= (\hat{e}_r dr + \hat{e}_\theta r d\theta + \hat{e}_z dz) \cdot \vec{\nabla}\varphi \\ &= (\hat{e}_r \cdot \vec{\nabla}\varphi) dr + (r \hat{e}_\theta \cdot \vec{\nabla}\varphi) d\theta + (\hat{e}_z \cdot \vec{\nabla}\varphi) dz \end{aligned}$$

então:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \hat{e}_r \cdot \vec{\nabla}\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)_r \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = r \hat{e}_\theta \cdot \vec{\nabla}\varphi = r (\vec{\nabla}\varphi)_\theta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \hat{e}_z \cdot \vec{\nabla}\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)_z \end{cases}$$

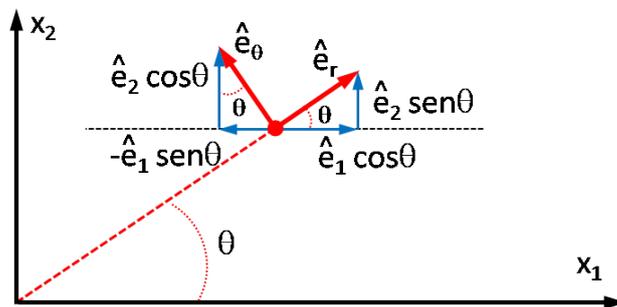
portanto, em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla}\varphi = \hat{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \hat{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Operador Gradiente:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Para este sistema, é fácil relacionar  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta$  e  $\hat{e}_z$  com os vetores base  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  e  $\hat{e}_3$



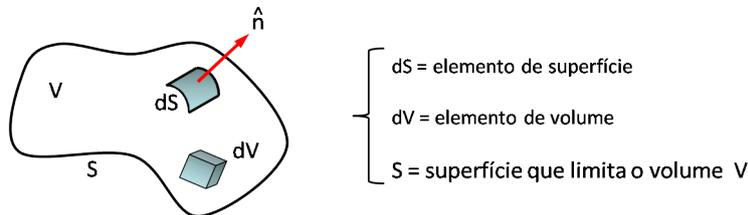
$$\begin{cases} \hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos(\theta) + \hat{e}_2 \sin(\theta) \implies \frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = -\hat{e}_1 \sin(\theta) + \hat{e}_2 \cos(\theta) = \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\theta = -\hat{e}_1 \sin(\theta) + \hat{e}_2 \cos(\theta) \implies \frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta} = -\hat{e}_1 \cos(\theta) - \hat{e}_2 \sin(\theta) = -\hat{e}_r \end{cases}$$

**Divergente de um Vetor em Coordenadas Cilíndricas**

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \left( \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta + \hat{e}_z V_z) \\
&= \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \hat{e}_r \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r}}_{=0} V_r + \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta}_{=0} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \\
&\quad + \hat{e}_r \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r}}_{=0} V_\theta + \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z}_{=0} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \hat{e}_z \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_z}{\partial r}}_{=0} V_z + \\
&\quad + \underbrace{\frac{\hat{e}_\theta}{r} \cdot \hat{e}_r}_{=0} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}}_{=\hat{e}_\theta} V_r + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \cdot \hat{e}_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \\
&\quad + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\hat{e}_r} V_\theta + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \cdot \underbrace{\hat{e}_z}_{=0} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_z}{\partial \theta}}_{=0} V_z + \\
&\quad + \underbrace{\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r}_{=0} \frac{\partial V_r}{\partial z} + \hat{e}_z \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial z}}_{=0} V_r + \underbrace{\hat{e}_z \cdot \hat{e}_\theta}_{=0} \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \\
&\quad + \hat{e}_z \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial z}}_{=0} V_\theta + \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \hat{e}_z \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_z}{\partial z}}_{=0} V_z
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

**2.8 Teoremas Integrais****Expressão Geral**

$$\int_V \vec{\nabla} * F dV = \int_S \hat{n} * F dS$$

onde “\*” representa qualquer operação e  $F$  é um campo escalar, vetorial ou tensorial.

**Casos Especiais**

- $F =$  escalar  $\varphi$       “ $*$ ”  $\Rightarrow$  “produto de um escalar por um vetor”

$$\int_V \vec{\nabla} \varphi dV = \int_S \hat{n} \varphi dS$$

- $F =$  vetor  $\vec{V}$       “ $*$ ”  $\Rightarrow$  “.”      (*produto escalar*)

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dV = \int_S \hat{n} \cdot \vec{V} dS \quad \text{Teorema da Divergência}$$

- $F =$  vetor  $\vec{V}$       “ $*$ ”  $\Rightarrow$  “ $\times$ ”      (*produto vetorial*)

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{V} dV = \int_S \hat{n} \times \vec{V} dS$$

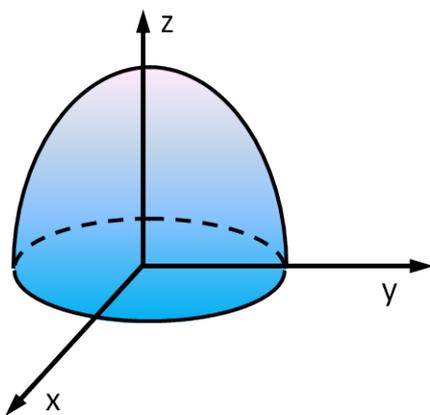
Como o *Teorema da Divergência* vai ser mais utilizado em nosso trabalho, vamos apresentar uma definição em palavras:

“o fluxo de uma função vetorial através de uma superfície fechada é igual à integral de volume do divergente desta função sobre o volume limitado por esta superfície.”

**Exemplo**

Suponha que:  $\vec{V}(x, y, z) = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$S$  é a casca hemisférica de raio unitário e a região do plano  $xy$  que tampa o hemisfério:



Teorema da Divergência:

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{V} dS = \int_V \text{div } \vec{V} dV$$

$$\int_S = \int_{\text{Tampa}} + \int_{\text{Hemisfério}}$$

(a) Na superfície hemisférica:

a normal é:  $\hat{n} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

então:  $\hat{n} \cdot \vec{V} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

logo:

$$\int_{\text{Hemisfério}} \hat{n} \cdot \vec{V} dS = \int_{\text{Hemisfério}} dS = 2\pi$$

(b) Na tampa:

a normal é:  $\hat{n} = -\hat{k}$ ,

então:  $\hat{n} \cdot \vec{V} = -z$

logo:

$$\int_{\text{Tampa}} \hat{n} \cdot \vec{V} dS = - \iint_{\text{Tampa}} z dx dy = 0 \quad \text{pois } z = 0 \text{ na Tampa}$$

portanto:

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{V} dS = 2\pi$$

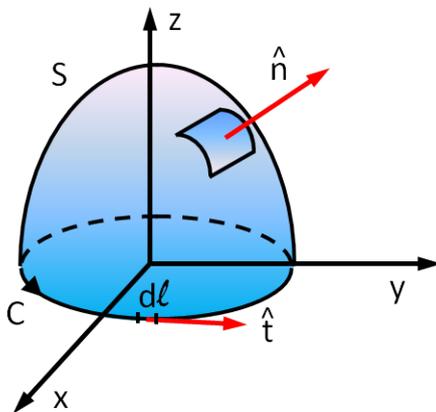
agora:

$$\int_V \text{div } \vec{V} dV = \int_V 3 dV, \quad \text{pois } \text{div } \vec{V} = 3$$

então:

$$\int_V \text{div } \vec{V} dV = 3 \int_V dV = 3 \frac{2\pi}{3} = 2\pi$$

### Teorema de Stokes



$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} dS = \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} dl = \Gamma$$

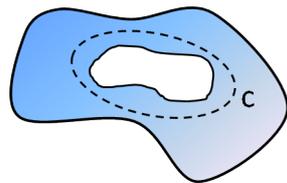
Em notação indicial:

$$\int_S n_i \epsilon_{ijk} \partial_j V_k dS = \oint_C V_i t_i dl$$

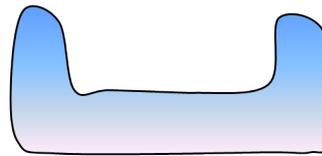
Uma aplicação do teorema de Stokes é na prova do seguinte resultado:

“em uma dada região simplesmente conexa, existe uma função escalar da posição  $\varphi$  tal que o campo de velocidades  $\vec{V}$  é dado por  $\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi$ , se e somente se  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ .”

Primeiro, uma definição: “região simplesmente conexa é aquela na qual qualquer curva fechada pode ser contraída até um ponto sem interceptar as fronteiras da região”:



Não é Simplesmente Conexa



Simplesmente Conexa

### Prova

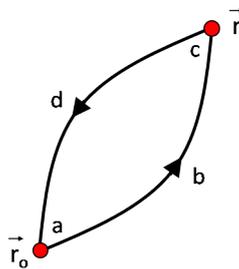
Primeiro vamos provar que, se  $\vec{V} = \text{grad } \varphi$ , então  $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{(*)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}_{(**)} \hat{e}_k = \vec{0}$$

onde  $(*)$  é anti-simétrico em relação a  $i$  e  $j$  e  $(**)$  é simétrico em relação a  $i$  e  $j$ .

Agora, vamos provar que, se  $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ , então  $\oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} dl$  é independente do caminho  $C$  que conecta os pontos finais do caminho.

De acordo com a figura abaixo, podemos escrever:



$$\oint_{abcd} \vec{V} \cdot \hat{t} dl = \int_{abc} \vec{V} \cdot \hat{t} dl + \int_{cda} \vec{V} \cdot \hat{t} dl$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\oint_{abcda} \vec{V} \cdot \hat{t} dl = \int_S \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} dS = 0 \quad \text{pois } \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$$

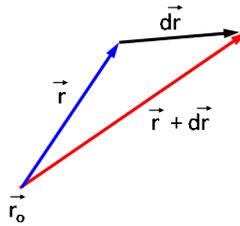
$$\text{então:} \quad \int_{abc} \vec{V} \cdot \hat{t} dl = - \int_{cda} \vec{V} \cdot \hat{t} dl = \int_{adc} \vec{V} \cdot \hat{t} dl$$

Portanto, se  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ , a integral  $\oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} dl$  é independente do caminho e nós podemos definir um escalar  $\varphi(\vec{r}) \equiv \int \vec{V} \cdot \hat{t} dl$  independente do caminho ligando  $a \rightarrow c$ .

Com este resultado vamos provar que, se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0} \implies \text{então existe um } \varphi \text{ tal que } \vec{V} = \vec{\nabla} \varphi$$

### Prova



Suponha  $\varphi$  uma função de  $\vec{r}$  tal que  $\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} dl$

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} dl - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} dl \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} dl + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} dl - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} dl \\ &= \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} dl = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{V} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Mas, pela definição de integral:  $\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \vec{V} \cdot d\vec{r}$ . Logo:  $d\varphi = \vec{V} \cdot d\vec{r}$

E, recordando a definição de gradiente:  $d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi$ , podemos concluir que:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi$$

---

## Capítulo 3

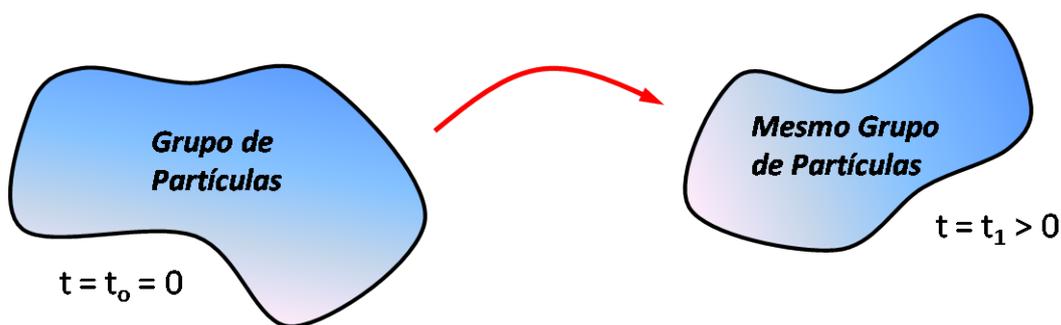
# Cinemática dos Meios Deformáveis

A cinemática estuda as características do movimento que são independentes das forças que produzem o movimento. O estudo da cinemática é fundamental para o entendimento da dinâmica.

Utilizaremos as seguintes hipóteses no nosso estudo:

1. a matéria é contínua (propriedades independentes do tamanho da amostra)
2. não podemos ter mais de uma partícula material ocupando a mesma posição no espaço no mesmo tempo
3. não existem regiões vazias no espaço

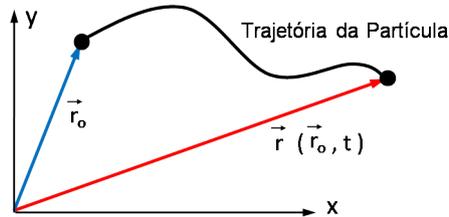
Um meio é dito deformável se, sob a ação de forças, partículas que estão em uma certa posição em um tempo inicial são movidas relativamente a outras partículas para outra posição em um tempo posterior.



A noção intuitiva de seguir o movimento de partículas pode ser expressa matematicamente. Antes, é importante notar que “partícula” não significa “molécula” ou “átomo”, mas sim uma pequena porção de fluido geralmente contendo um número muito grande de átomos ou moléculas (de forma que a hipótese do contínuo seja válida).

Considere  $\vec{r}$  o vetor posição em um sistema de referência fixo. Considere uma partícula material que está na posição  $\vec{r}_0$  em  $t = 0$ . Seguindo o movimento desta partícula encontramos:

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) \quad \text{onde} \quad \vec{r}_0 \equiv \vec{r}(\vec{r}_0, 0)$$



Note que  $\vec{r}_0$  “marca” a partícula de interesse (como se a tivéssemos pintado).  $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$  é a posição no tempo  $t$  da partícula que estava em  $\vec{r}_0$  no tempo  $t = 0$ .

Se conhecermos  $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$  para todos os  $\vec{r}_0$ , o movimento estará completamente definido. A função  $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$  pode ser interpretada como um mapeamento ou função de transformação, i.e., para um grupo de partículas com vários  $\vec{r}_0$  ocupando uma região do espaço em  $t = 0$ , a função leva a uma nova região no espaço ocupada pelas mesmas partículas no tempo  $t$ . Ou seja, a região ocupada pelas partículas no tempo  $t = 0$  é mapeada em uma região ocupada pelas mesmas partículas no tempo  $t$ .

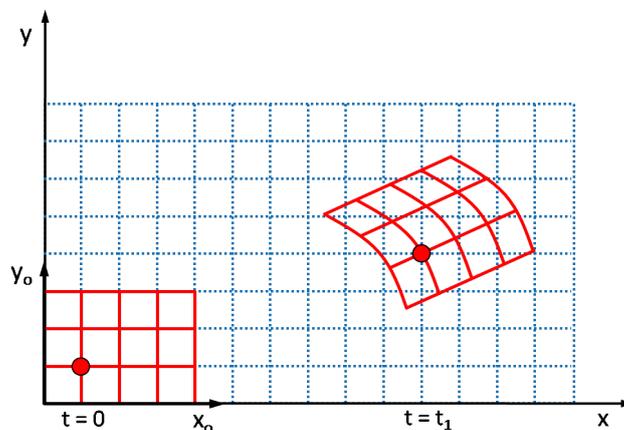
Devido à nossa hipótese que duas partículas não podem ocupar a mesma posição  $\vec{r}$  no mesmo tempo  $t$ , a função  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$  possui uma inversa única:  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t)$ .

Então:

$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t) \equiv$  representa a posição em  $t = 0$  da partícula que está em  $\vec{r}$  no tempo  $t$ .

**Cuidado:**  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t)$  não significa que  $\vec{r}_0$  para uma partícula dependa de  $t$ .  $\vec{r}_0$  para uma partícula é o mesmo para qualquer  $t$ , uma vez que é a posição da partícula em  $t = 0$ .

### 3.1 Descrição Material e de Campo



O diagrama acima ilustra o movimento de um meio contínuo deformável bidimensional, por exemplo, uma membrana fina de borracha. A membrana é mostrada em linhas grossas (cor vermelha) e o sistema de coordenadas que cobre o espaço pelo qual a membrana se move é mostrado em linhas mais finas e pontilhadas (cor azul).

Duas posições da membrana são mostradas, uma em  $t = 0$  e outra em  $t = t_1$ . Em  $t = 0$  é assumido que a membrana não está deformada. No tempo  $t_1$  a membrana transladou e foi deformada. O espaço  $2D$  pelo qual a membrana se move foi coberto com uma malha de coordenadas  $x = \text{const}$  e  $y = \text{const}$ . Estas são as coordenadas *espaciais, de campo* ou *Eulerianas*.

A membrana de borracha em  $t = 0$  é coberta com uma malha de coordenadas  $x_0 = \text{const}$  e  $y_0 = \text{const}$ . Estas são as coordenadas *materiais* ou *Lagrangeanas*. Note que as coordenadas Eulerianas e Lagrangeanas coincidem em  $t = 0$  (ou seja:  $y = y_0$ ,  $x = x_0$  em  $t = 0$ ).

Note que cada linha  $x_0 = \text{const}$  e  $y_0 = \text{const}$  define uma linha de *partículas materiais*. As suas interseções definem uma *partícula material*, i.e., uma partícula específica na membrana de borracha. Uma partícula típica é mostrada:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ .

No tempo  $t = t_1$ , a partícula material ainda identificada pelas coordenadas materiais  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ , tem coordenadas de campo  $x = 10$ ,  $y = 4$ .

Note que a malha de coordenadas materiais foi deformada, mas cada partícula material ainda tem as mesmas coordenadas materiais que tinha em  $t = 0$ . Então, as coordenadas materiais de uma dada partícula não dependem do tempo. Elas simplesmente “*marcam*” a partícula material. As coordenadas de campo, por outro lado, dependem das coordenadas materiais e do tempo.

$$\vec{r}, t \text{ ou } (x, y, z, t) \quad \Rightarrow \quad \text{são chamadas } \begin{cases} \text{coordenadas de campo} \\ \text{coordenadas Eulerianas} \end{cases}$$

$$\vec{r}_0, t \text{ ou } (x_0, y_0, z_0, t) \quad \Rightarrow \quad \text{são chamadas } \begin{cases} \text{coordenadas materiais} \\ \text{coordenadas Lagrangeanas} \end{cases}$$

Ambas as técnicas são usadas em mecânica dos fluidos. Qualquer propriedade do meio (densidade, velocidade, etc...) pode ser descrita em termos de:

$$\vec{r}_0, t \quad \Rightarrow \quad \text{descrição material ou Lagrangeana}$$

$$\vec{r}, t \quad \Rightarrow \quad \text{descrição de campo ou Euleriana}$$

As duas formas estão relacionadas pelas funções de mapeamento:

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) \quad \text{e} \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t)$$

Por exemplo, podemos escrever o campo de velocidade:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \quad \Rightarrow \quad \text{velocidade de uma partícula de fluido que passa pelo ponto } \vec{r} \text{ no tempo } t$$

$$\vec{v}(\vec{r}_0, t) \quad \Rightarrow \quad \text{velocidade no tempo } t \text{ vista por um observador montado na partícula que estava em } \vec{r}_0 \text{ em } t = 0$$

As duas descrições estão relacionadas pela função de mapeamento:

$$\vec{u}[\vec{r}(\vec{r}_0, t), t] = \vec{v}(\vec{r}_0, t)$$

$$\vec{v}[\vec{r}_0(\vec{r}, t), t] = \vec{u}(\vec{r}, t)$$

De acordo com as duas descrições possíveis (Lagrange e Euler), podemos ter duas derivadas com relação ao tempo:

$$\text{CAMPO} \implies \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \left. \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r} = \text{const}}$$

$$\text{MATERIAL} \implies \frac{dF}{dt} \equiv \frac{DF}{Dt} \equiv \left. \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0 \text{ fixo}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{fornece a taxa de variação de } F \text{ vista por um observador em uma posição} \\ \text{fixa } (\vec{r}) \text{ no espaço} \end{array} \right.$$

$$\frac{DF}{Dt} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{fornece a taxa de variação de } F \text{ vista por um observador "montado" sobre} \\ \text{a partícula } \vec{r}_0 \text{ (isto é, a partícula que estava na posição } \vec{r}_0 \text{ em } t = 0). \\ \text{É conhecida como } \textit{Derivada Total} \text{ ou } \textit{Material} \end{array} \right.$$

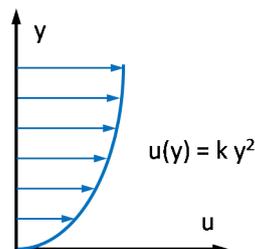
A velocidade em um ponto no tempo  $t$  é definida como a velocidade de uma partícula passando pelo ponto no tempo  $t$ :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \left. \frac{\partial \vec{r}(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0}$$

é a taxa de variação da posição com o tempo de uma partícula com  $\vec{r}_0$  fixo. O resultado é expresso como função de  $\vec{r}$  usando a função de mapeamento  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t)$ .

### Determinação da Função de Mapeamento e sua Inversa

Exemplo: considere o campo de velocidade dado em coordenadas de campo  $(\vec{r}, t)$ :



Podemos achar a função de mapeamento da seguinte forma:

dado:  $\vec{u} = k y^2 \hat{i}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \implies \begin{cases} \frac{dx}{dt} = k y^2 & (1) \\ \frac{dy}{dt} = 0 & (2) \\ \frac{dz}{dt} = 0 & (3) \end{cases}$$

resolvendo estas equações para as condições iniciais:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \text{ em } t = 0 \implies \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

de (2):  $y = \text{const} = y_0$

de (3):  $z = \text{const} = z_0$

$$\frac{dx}{dt} = k y_0^2 \implies x = k y_0^2 t + \text{const} = k y_0^2 t + x_0$$

função mapeamento:  $\vec{r} = \vec{r}[(\vec{r}_0, t), t]$

$$\begin{cases} x = x_0 + k y_0^2 t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

função inversa de mapeamento:  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0[(\vec{r}, t), t]$

$$\begin{cases} x_0 = x - k y^2 t \\ y_0 = y \\ z_0 = z \end{cases}$$

### Relação entre Derivadas Materiais e de Campo

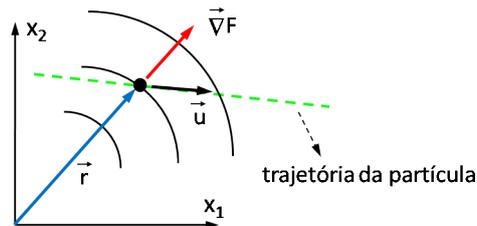
$$\begin{aligned}
 \frac{DF}{Dt} &= \left. \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0 \text{ fixo}} \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial t} F[x(x_0, y_0, z_0, t), y(x_0, y_0, z_0, t), z(x_0, y_0, z_0, t), t] \right|_{x_0, y_0, z_0} \\
 &\quad \text{(significa uma partícula especificada)} \\
 &= \left. \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x_0, y_0, z_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x_0, y_0, z_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{x_0, y_0, z_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{x_0, y_0, z_0} \\
 &= u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}
 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\underbrace{\frac{DF}{Dt}}_{\text{derivada material}} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{\text{derivada local}} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} F}_{\text{derivada convectiva}}$$

**derivada material** – é a taxa de variação de  $F$  vista por um observador seguindo o movimento (ou “montado” sobre uma dada partícula material) e consiste de duas partes:

- $\frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow$  porque, em geral,  $F$  pode variar com o tempo numa posição fixa do espaço.
- $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} F \Rightarrow$  porque a partícula cruza linhas de  $F = \text{const}$  com uma velocidade finita.



Aplicando a expressão para  $F = \vec{r}$ :

$$\vec{u} \equiv \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{r} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

ou seja: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{para } \vec{r} \text{ fixo}) \\ \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{r} = \hat{e}_i u_i \cdot \hat{e}_j \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \hat{e}_k = u_j \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \hat{e}_k = u_j \delta_{jk} \hat{e}_k = u_k \hat{e}_k = \vec{u} \end{array} \right.$$

**Fórmula de Aceleração de Euler** ( $F = \vec{u}$ )

$$\vec{a} \equiv \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\text{aceleração total}} = \underbrace{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u}}_{\text{aceleração convectiva}}$$

**3.2 Trajetória, Linha de Corrente e Linha de Tinta***(Path line, Stream line and Streak line)*

Trajétória, linha de corrente e linha de tinta são curvas no espaço que auxiliam a visualização e a interpretação do escoamento.

(a) **Trajétória:** a função de transformação  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$  pode ser considerada como uma curva no espaço (passando por  $\vec{r}_0$ ) com um parâmetro  $t$ . Esta curva é a trajetória ou caminho percorrido pela partícula que estava em  $\vec{r}_0$  no tempo  $t = 0$ . A trajetória pode ser obtida pela solução simultânea das 3 equações diferenciais representadas por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad (\text{com condições iniciais: } \vec{r} = \vec{r}_0, \text{ em } t = 0)$$

Exemplo: considere o seguinte escoamento:

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad (\text{movimento plano})$$

onde  $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$

com condições iniciais:  $t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \implies \ln(x) = \ln(1+t) + \ln(c) \implies x = x_0(1+t) \\ v = \frac{dy}{dt} = 1 \implies y = y_0 + t \\ w = \frac{dz}{dt} = 0 \implies z = \text{const} \end{array} \right.$$

então, o caminho da partícula ou trajetória na forma paramétrica (parâmetro  $t$ ) é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0(1+t) \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

Podemos expressar a equação da trajetória no plano  $xy$  eliminando-se  $t$ , ou seja:

$$y = (y_0 - 1) + \frac{x}{x_0} \quad \longrightarrow \quad \text{linhas retas}$$

(b) **Linhas de Corrente:** são curvas tangentes ao vetor velocidade em cada ponto, para um instante fixo de tempo.

Considere uma “fotografia” do escoamento em um dado instante de tempo. Considere o parâmetro “ $s$ ” ao longo da linha de corrente ( $s$  tem dimensão de tempo). Assim, a linha de corrente é obtida da solução de:

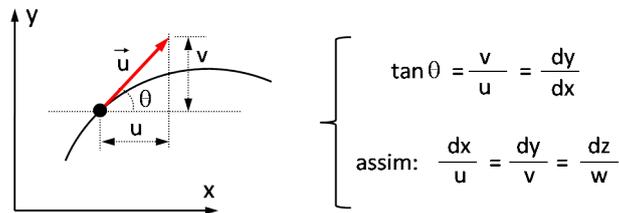
$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad \begin{array}{l} \text{(linhas de corrente} \\ \text{para um instante fixo } t) \end{array}$$

ou:

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = v, \quad \frac{dz}{ds} = w$$

Note que, para regime permanente, linhas de corrente e trajetórias são coincidentes.

Uma outra maneira de se obter as equações da linha de corrente é:



Exemplo: determinar as linhas de corrente para o escoamento:

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = 1, \quad w = 0$$

Para obter a forma paramétrica ( $t = \text{const}$ ):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x}{1+t} \implies \ln(x) = \frac{s}{1+t} + \ln(c_1)$$

$$\frac{dy}{ds} = 1 \implies y = s + c_2$$

eliminando o parâmetro  $s$ :  $\ln\left(\frac{x}{c_1}\right) = \frac{y-c_2}{1+t}$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas a partir da escolha do ponto  $(a, b)$  por onde a linha passa. Podemos usar que, neste ponto,  $s = 0$  (para qualquer outro valor de  $s$  daria o mesmo resultado).

Podemos obter o mesmo resultado resolvendo:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \implies \frac{dx}{\frac{x}{1+t}} = \frac{dy}{1} \implies \frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+t}$$

ou ainda:

$$\ln\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{y}{1+t} \quad \text{passando por } (a, b) : \quad \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{y-b}{1+t}$$

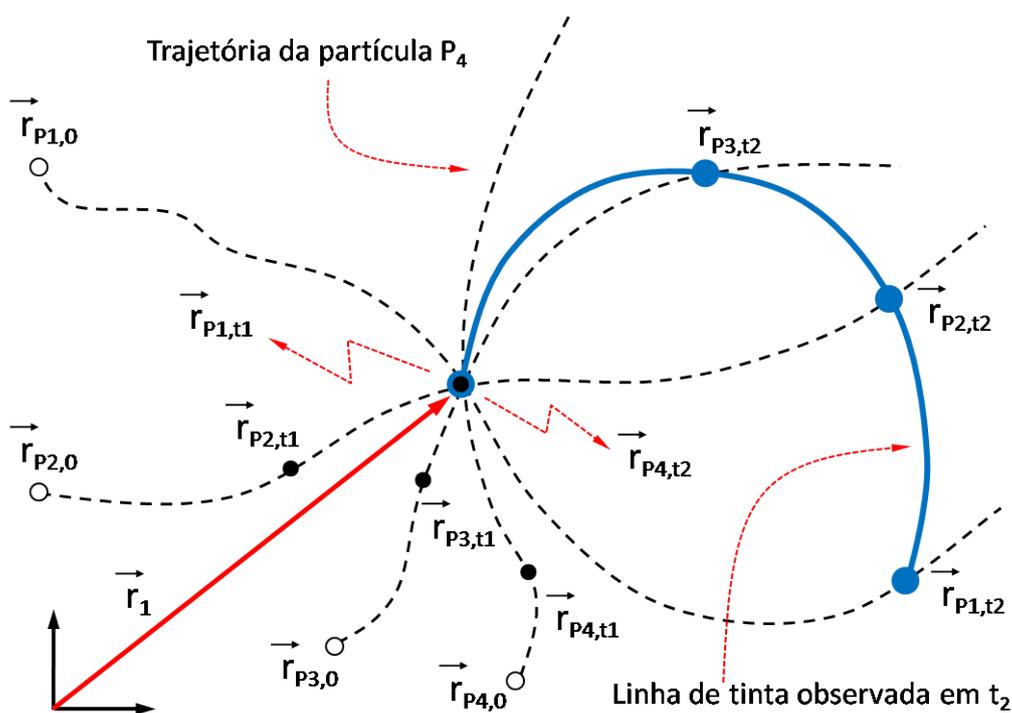
(c) **Linhas de Tinta:** uma técnica usada para a visualização de escoamentos é a injeção de tinta (ou algum tipo de marcador) em um determinado ponto do escoamento. Observa-se a tinta em um ponto posterior. Toda partícula de fluido que passa pelo ponto de injeção é “pintada” e contribui para a linha de tinta.

Suponha que injetamos tinta continuamente em um ponto  $\vec{r}_1$ , começando em  $t = t_1$ , e observamos a linha de tinta em um tempo posterior  $t = t_2 > t_1$ .

Se  $\vec{r}_1$  é o ponto de injeção e esta começa em  $t = t_1$ , então, toda partícula que passa por  $\vec{r}_1$  em um tempo  $t_1 < t < t_2$  vai fazer parte da linha de tinta.

Uma partícula em  $\vec{r}_1$  no tempo  $t$  veio de  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}_1, t)$ . Então, a equação da linha de tinta é dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}[\vec{r}_0(\vec{r}_1, t), t_2] \quad \text{para } t_1 < t < t_2$$



Exemplo: determinar a equação da linha de tinta para o escoamento:

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = 1, \quad w = 0, \quad t_1 < \tau < t_2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \implies \ln(x) = \ln(1+t) + \ln(c_1) \implies x = c_1(1+t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 \implies y = t + c_2$$

em  $t = \tau \implies x = x_1$  e  $y = y_1$  (coordenadas do ponto de injeção).

então:

$$x = \frac{x_1(1+t)}{1+\tau} \quad \text{e} \quad y = y_1 + t - \tau$$

No tempo de observação  $t_2$ , a linha de tinta será formada por todos os pontos  $(x, y)$ :

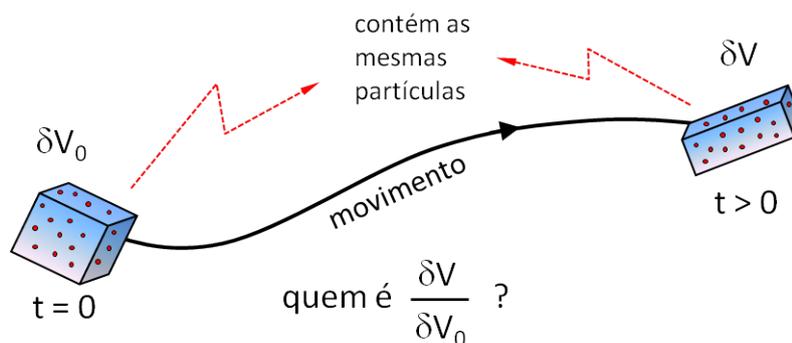
$$x = \frac{x_1(1+t_2)}{1+\tau} \quad \text{e} \quad y = y_1 + t_2 - \tau \quad \text{para } t_1 < \tau < t_2$$

Note que, para o regime permanente, trajetória, linha de tinta e linha de corrente coincidem.

### 3.3 Dilatação e Derivada Material da Dilatação

Um volume material é um volume que contém sempre as mesmas partículas materiais. Quando um elemento de volume material de um meio deformável se movimenta, o tamanho e a forma do elemento se modificam. Uma pergunta de interesse seria: *Qual a razão entre os volumes materiais antes e depois do movimento?*

A resposta a esta pergunta é uma quantidade chamada “dilatação”, normalmente representada pelo símbolo  $J$ .

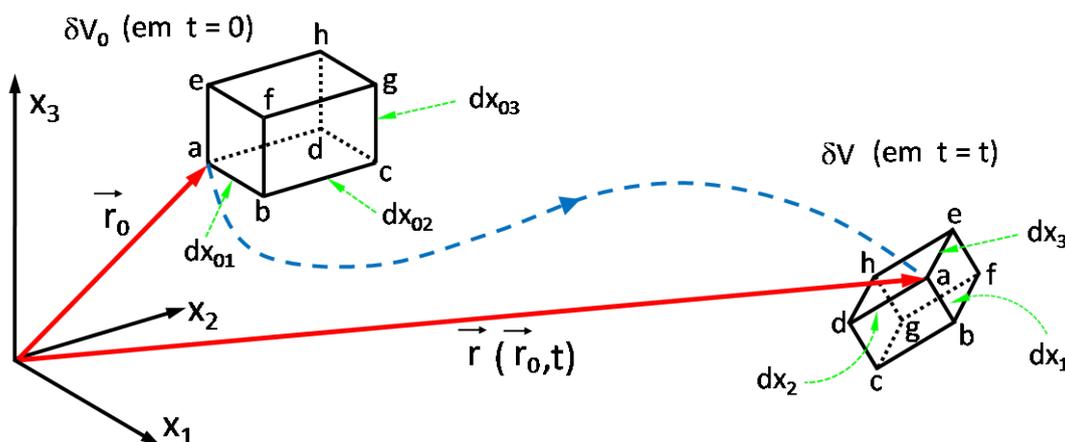


A dilatação é definida como:

$$J = \frac{\delta V}{\delta V_0} = \frac{\text{elemento de vol. material em } t = t}{\text{elemento de vol. material em } t = 0}$$

Vamos mostrar que  $J$  é dado pelo *Jacobiano* da função de mapeamento (ou função de transformação)  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix} \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}}$$



$$\delta V_0 = \vec{ab} \cdot (\vec{ac} \times \vec{ad}) \quad \text{em } t = 0$$

$$\delta V = \vec{ab} \cdot (\vec{ac} \times \vec{ad}) \quad \text{em } t = t$$

$$\text{Antes do movimento: } \begin{cases} |\vec{ab}| = dx_{01} \\ |\vec{ad}| = dx_{02} \\ |\vec{ae}| = dx_{03} \end{cases}$$

$$\text{Depois do movimento: } \begin{cases} \text{ponto a:} & x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \\ \text{ponto b:} & x_i = x_i(x_{01} + dx_{01}, x_{02}, x_{03}) \\ \text{ponto d:} & x_i = x_i(x_{01}, x_{02} + dx_{02}, x_{03}) \\ \text{ponto e:} & x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03} + dx_{03}) \end{cases}$$

Podemos expandir em série de Taylor:

$$b: \quad x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} dx_{01} + \dots$$

$$d: \quad x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \frac{\partial x_i}{\partial x_{02}} dx_{02} + \dots$$

$$e: \quad x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \frac{\partial x_i}{\partial x_{03}} dx_{03} + \dots$$

depois do movimento,  $\vec{ab} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$

$$(\vec{ab})_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} dx_{01}, \quad (\vec{ad})_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} dx_{02}, \quad (\vec{ae})_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} dx_{03}$$

então, depois do movimento (i.e., em  $t = t$ ):

$$\begin{aligned} \delta V &= \vec{ab} \cdot (\vec{ae} \times \vec{ad}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} \underbrace{dx_{01} dx_{02} dx_{03}}_{\delta V_0} \\ &= \underbrace{\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}}}_J \delta V_0 \end{aligned}$$

onde:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix} \equiv \text{“Jacobiano da Função de Mapeamento”}$$

Portanto:

$$\delta V = J \delta V_0 \quad J \text{ é a “dilatação”}$$

Para um escoamento a volume constante, o volume de um determinado grupo de partículas não se altera (escoamento *isocórico*), então:

$$J = 1 \quad (\text{para escoamento isocórico})$$

Nota: *Fluidos incompressíveis escoam com volume constante.*

Para termos conservação de massa em um escoamento:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) \delta V &= \rho_0(\vec{r}_0, 0) \delta V_0 \\ &\text{ou} \\ \rho(\vec{r}, t) J \delta V_0 &= \rho_0(\vec{r}_0, 0) \delta V_0 \end{aligned}$$

ou ainda:  $J \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}_0, 0) \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{forma material da equação da continuidade} \\ \text{("conservação de massa")}. \end{array} \right.$

### 3.4 Derivada Material da Dilatação $J$

$$J = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \quad \text{quem é } \frac{DJ}{Dt}?$$

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \left[ \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \right) \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \right) \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right) \right] \end{aligned}$$

mas:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \right) \Big|_{\vec{r}_0 \text{ fixo}} = \frac{\partial}{\partial x_{0i}} \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \Big|_{\vec{r}_0 \text{ fixo}} = \frac{\partial}{\partial x_{0i}} \left( \frac{dx_1}{dt} \right) \Big|_{\vec{r}_0 \text{ fixo}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_{0i}}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{Dt} &= \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial u_3}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0k}} \right] \\ &= \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial u_3}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0k}} \right] \end{aligned}$$

Nota:  $\vec{u}$  é normalmente dado em termos de coordenadas de campo  $\vec{x}$ .

Expandindo-se o primeiro dos três termos acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right] &= \\ \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right] \end{aligned}$$

Notar que o símbolo de permutação  $\epsilon_{ijk}$  é anti-simétrico em relação à “ $i$  e  $j$ ” e “ $i$  e  $k$ ”, enquanto que os termos “ $\frac{\partial x_2}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}}$ ” e “ $\frac{\partial x_3}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}}$ ” são simétricos em relação à “ $i$  e  $j$ ” e “ $i$  e  $k$ ”, respectivamente. Consequentemente, os produtos entre esses termos são iguais a zero.

Portanto, da expressão acima, sobra apenas o termo:

$$\epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right]$$

analogamente, para os outros dois termos sobram as expressões:

$$\epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right] \quad \text{e} \quad \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right]$$

então, agrupando-se esses termos, chega-se a:

$$\frac{DJ}{Dt} = \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} \right)$$

ou, finalmente:

$$\frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div} \vec{u}$$

Este resultado permite uma interpretação física para o divergente:

$$J = \frac{\delta V}{\delta V_0} \quad \text{e} \quad \operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{J} \frac{DJ}{Dt}$$

então:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{\frac{\delta V}{\delta V_0}} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\delta V}{\delta V_0} \right) \quad (\text{note que } \delta V_0 \text{ não depende do tempo})$$

portanto:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt} (\delta V)$$

O divergente do vetor  $\vec{u}$  é a taxa de variação de um volume material por unidade de volume, vista por um observador “*montado*” no elemento de volume material.

Note que, para escoamento de fluido incompressível:  $\frac{D}{Dt}(\delta V) = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ .

Ainda, para escoamento de fluido incompressível:  $J = 1$ ,  $\frac{DJ}{Dt} = 0 \implies \operatorname{div} \vec{u} = 0$ .

Uma aplicação para o resultado  $\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{J} \frac{DJ}{Dt}$  é a obtenção da equação da continuidade, que representa a conservação de massa, em coordenadas de campo:

Tínhamos em coordenadas materiais:  $J \rho = \rho_0$

Diferenciando esta relação:

$$J \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DJ}{Dt} = \frac{D\rho_0}{Dt} = 0$$

$$\text{ou: } J \frac{D\rho}{Dt} + \rho J \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Assim:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{“Equação da Continuidade”}$$

### 3.5 Teorema de Transporte de Reynolds

Vamos derivar um dos resultados mais importantes do estudo da mecânica dos fluidos em meios contínuos: é o *teorema de transporte de Reynolds* que é peça fundamental na derivação das leis de conservação em meios contínuos.

Considere um volume material  $v(t)$ , i.e., um volume que contém sempre as mesmas partículas de fluido. Assuma que  $S(t)$  é uma superfície material limitando  $v(t)$ . Assuma também que  $F(\vec{r}, t)$  seja qualquer propriedade do fluido por unidade de volume.

A integral:

$$\int_{v(t)} F dv$$

representa a quantidade da propriedade  $F$  contida no volume material  $v(t)$ .

Nosso objetivo é determinar a derivada material desta integral, i.e., a taxa de variação da propriedade  $F$  vista por um observador “*montado*” no volume material  $v(t)$  que se move. Então, desejamos:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F(\vec{r}, t) dv$$

o limite de integração depende do tempo, portanto não podemos trocar a ordem da diferenciação e integração. Podemos transformar a integral de um espaço  $\vec{r}$  para um espaço  $\vec{r}_0$ .

Os limites neste espaço não dependem do tempo.

vamos usar os resultados:  $dv = J dv_0$  e  $\frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div} \vec{u}$ .

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F(\vec{r}, t) dv &= \frac{D}{Dt} \int_{v_0} F[\vec{r}(\vec{r}_0, t), t] J dv_0 \\ &= \int_{v_0} \frac{D}{Dt} [F J] dv_0 = \int_{v_0} \left[ F \frac{DJ}{Dt} + J \frac{DF}{Dt} \right] dv_0 \\ &= \int_{v_0} \left[ F \operatorname{div} \vec{u} + \frac{DF}{Dt} \right] J dv_0 = \int_{v(t)} \left[ \frac{DF}{Dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema de Transporte de Reynolds é expresso por:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F dv = \int_{v(t)} \left[ \frac{DF}{Dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv$$

### Interpretação Física do Teorema de Transporte de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F dv &= \int_{v(t)} \left[ \frac{DF}{Dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv \\ &= \int_{v(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} F + F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv \\ &= \int_{v(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (F \vec{u}) \right] dv \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência no segundo termo da integral acima, obtemos:

$$\int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot (F \vec{u}) dv = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (F \vec{u}) dS$$

Portanto:

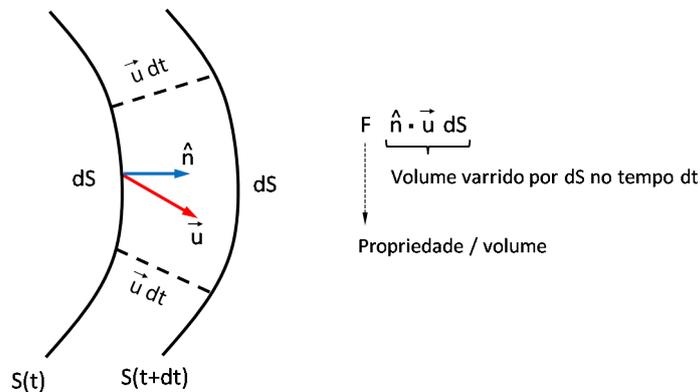
$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F dv = \int_{v(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dv + \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{u} F dS$$

Interpretação:

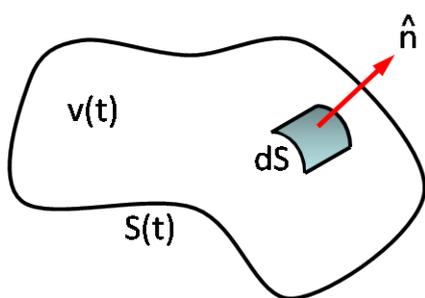
$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F dv = \left\{ \text{taxa de variação de } F \text{ seguindo o movimento} \right.$$

$$\int_{v(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dv = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de variação de } F \text{ em } v(t) \text{ devido à variação} \\ \text{com o tempo de } F \text{ em cada ponto de } v(t) \end{array} \right.$$

$$\int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{u} F dS = \left\{ \begin{array}{l} \text{variação líquida em } F \text{ devido ao fato de que a superfície} \\ \text{que se move } S(t) \text{ pode incluir mais (ou menos) } F \\ \text{durante o movimento} \end{array} \right.$$



**Conservação de Massa usando o Teorema de Transporte**



Volume material “v(t)” limitado pela Superfície material “S(t)”

Teorema de Transporte:  $\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F dv = \int_{v(t)} \left[ \frac{DF}{Dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv$

Nesse caso:  $F = \rho(\vec{r}, t) = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$

Ou seja:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho dv = \int_{v(t)} \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv$$

O lado esquerdo da expressão acima representa a taxa de variação da massa em  $v(t)$  seguindo o movimento de um dado grupo de partículas: tem que ser zero para conservar massa !

Então:

$$0 = \int_{v(t)} \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv$$

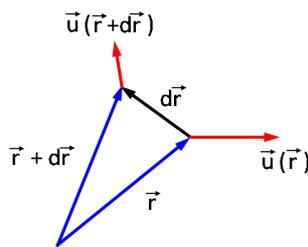
Para que a expressão acima seja válida para qualquer escolha possível de  $v(t)$ , o integrando tem que ser igual a zero em todos os pontos de  $v(t)$ . Assim:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Conservação de Massa}$$

### 3.6 Cinemática da Deformação

Nosso objetivo é determinar as quantidades tensoriais que estão relacionadas com a deformação e rotação de um elemento de fluido.

Considere a diferença de velocidade  $d\vec{u}$  entre dois pontos próximos:



Podemos escrever:  $d\vec{u} = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r})$

expandindo  $\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r})$  em série de Taylor:

$$d\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}) + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} d\vec{r}}_{d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}} + \dots - \vec{u}(\vec{r})$$

então temos:  $d\vec{u} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$

Fazendo-se o mesmo em notação indicial:

$$\begin{cases} du_j = u_j(x_i + dx_i) - u_j(x_i) \\ du_j = u_j(x_i) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i - u_j(x_i) \end{cases} \implies du_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i$$

desenvolvendo:

$$\begin{cases} du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{cases}$$

$\vec{\nabla} \vec{u}$  é o tensor gradiente de velocidade, que em notação indicial é escrito como:

$$\hat{e}_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \hat{e}_i \quad \text{ou} \quad \hat{e}_i \partial_i u_j \hat{e}_j$$

O tensor gradiente de velocidade pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica:

$$\partial_i u_j = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)}_{\text{tensor simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i)}_{\text{tensor anti-simétrico}}$$

onde:

- tensor simétrico  $\implies D_{ij} = D_{ji}$  (tensor de deformação)
- tensor anti-simétrico  $\implies \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$  (tensor de rotação ou de vorticidade)

então:

$$\begin{aligned} \partial_i u_j &= D_{ij} + \Omega_{ij} \\ \text{ou} \\ \vec{\nabla} \vec{u} &= \bar{D} + \bar{\Omega} \end{aligned}$$

### Interpretação Física para $D_{ij}$ , o Tensor Deformação

Considere a variação, seguindo o movimento, de um elemento de comprimento material,  $\frac{D}{Dt}(d\vec{r})$ , ou seja:

$$d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

então, seguindo o movimento:

$$\frac{D}{Dt}(d\vec{r}) = \frac{D}{Dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = d\vec{u}$$

mas, sabemos que:  $d\vec{u} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$

Assuma que  $ds$  é a magnitude de  $d\vec{r}$ , ou seja,  $ds = |d\vec{r}|$ . Também,  $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$ .  
Então:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds)^2 &= 2 ds \frac{D}{Dt}(ds) = \frac{D}{Dt}(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = 2 d\vec{r} \cdot \frac{D}{Dt}(d\vec{r}) \\ &= 2 d\vec{r} \cdot d\vec{u} = 2 d\vec{r} \cdot [d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}] = 2 d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Logo:  $2 ds \frac{D}{Dt}(ds) = 2 d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot d\vec{r}$

dividindo-se ambos os termos por  $2(ds)^2$ :

$$\frac{1}{ds} \frac{D}{Dt}(ds) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$$

usando que:  $\vec{\nabla} \vec{u} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{\Omega}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{ds} \frac{D}{Dt}(ds) &= \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot (\bar{\bar{D}} + \bar{\bar{\Omega}}) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \\ &= \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \end{aligned}$$

Note que <sup>1</sup>:  $\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \bar{\bar{\Omega}} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0$

mas  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  é um vetor unitário na direção de  $d\vec{r}$ .

Suponha, por exemplo, que escolhemos o vetor unitário  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{e}_1$ .

então:  $\frac{1}{ds} \frac{D}{Dt}(ds) = \hat{e}_1 \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \hat{e}_1 = D_{11}$

Podemos escrever:

$D_{11}$  é a taxa de variação do comprimento, por unidade de comprimento, de um elemento de uma linha material orientada na direção  $\hat{e}_1$ , seguindo o movimento.

de uma maneira análoga, o raciocínio vale para  $D_{22}$  e  $D_{33}$ .

---

<sup>1</sup>  $\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \bar{\bar{\Omega}} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \implies \frac{dx_i}{ds} \Omega_{ij} \frac{dx_j}{ds} = \underbrace{\frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}}_{sim.} \underbrace{\Omega_{ij}}_{anti-sim.} = 0.$

Note que:

$$D_{11} = \frac{1}{2} (\partial_1 u_1 + \partial_1 u_1) = \partial_1 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$D_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad e \quad D_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

então:

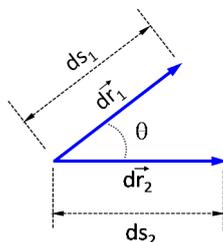
$$D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{traço de } \bar{\bar{D}} = \text{div } \vec{u}$$

ou seja:

$$D_{ii} = \text{div } \vec{u}$$

### Interpretação Física para $D_{ij}$ (com $i \neq j$ )

Considere dois elementos de fluido na forma de linhas, tendo a mesma origem e inicialmente fazendo um ângulo  $\theta$ :



calculemos:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) &= \frac{D}{Dt} [ds_1 ds_2 \cos(\theta)] \\ &= ds_1 \cos(\theta) \frac{D}{Dt} (ds_2) + ds_2 \cos(\theta) \frac{D}{Dt} (ds_1) + ds_1 ds_2 [-\text{sen}(\theta)] \frac{D\theta}{Dt} \\ &= ds_1 ds_2 \cos(\theta) \frac{1}{ds_2} \frac{D}{Dt} (ds_2) + ds_1 ds_2 \cos(\theta) \frac{1}{ds_1} \frac{D}{Dt} (ds_1) + \\ &\quad - ds_1 ds_2 \text{sen}(\theta) \frac{D\theta}{Dt} \end{aligned} \quad (1)$$

mas:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) &= \frac{D}{Dt} (d\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot \frac{D}{Dt} (d\vec{r}_2) \\
 &= d\vec{u}_1 \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot d\vec{u}_2 \\
 &= \left( d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot \left( d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) \\
 &= d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot d\vec{r}_1
 \end{aligned}$$

em notação indicial, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) &= \hat{e}_i dr_{1i} \cdot \hat{e}_j \partial_j u_k \hat{e}_k \cdot \hat{e}_m dr_{2m} + \hat{e}_i dr_{2i} \cdot \hat{e}_j \partial_j u_k \hat{e}_k \cdot \hat{e}_m dr_{1m} \\
 &= dr_{1j} \partial_j u_k dr_{2k} + dr_{2j} \partial_j u_k dr_{1k}
 \end{aligned}$$

trocando  $j$  por  $i$  e  $k$  por  $j$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) &= dr_{1i} \partial_i u_j dr_{2j} + dr_{2i} \partial_i u_j dr_{1j} \\
 &= dr_{1i} \partial_i u_j dr_{2j} + dr_{2j} \partial_j u_i dr_{1i} \\
 &= dr_{1i} dr_{2j} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) = 2 dr_{1i} dr_{2j} D_{ij} \\
 &= 2 d\vec{r}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot d\vec{r}_2 \tag{2}
 \end{aligned}$$

igualando (1) e (2) e dividindo por  $ds_1 ds_2$ , chegamos a:

$$2 \frac{d\vec{r}_1}{ds_1} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{ds_2} = \cos(\theta) \frac{1}{ds_2} \frac{D}{Dt} (ds_2) + \cos(\theta) \frac{1}{ds_1} \frac{D}{Dt} (ds_1) - \sin(\theta) \frac{D\theta}{Dt}$$

assuma agora que no instante em que iniciamos a observação:

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds_1} = \hat{e}_1 \quad e \quad \frac{d\vec{r}_2}{ds_2} = \hat{e}_2, \quad \text{de maneira que:} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{então:} \quad 2 \hat{e}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{e}_2 = -\frac{D\theta}{Dt}$$

$$\text{ou:} \quad D_{12} = -\frac{1}{2} \frac{D\theta}{Dt}$$

em palavras:

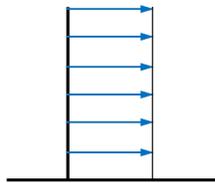
“ $D_{12}$  = é a metade da taxa de decréscimo do ângulo entre dois elementos de linha materiais, inicialmente alinhados nas direções  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ , seguindo o movimento (é igual à  $D_{21}$ , pois  $\bar{\bar{D}}$  é simétrico).”

O raciocínio vale, de maneira análoga, para os termos  $D_{23}$  e  $D_{13}$ .

Os termos fora da diagonal,  $D_{ij}$ , estão relacionados com taxa de cisalhamento.

### Exemplos

(a) considere o escoamento dado por:  $u = kx$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$



calculando: 
$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

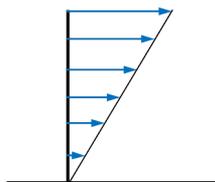
o único componente não nulo de  $D_{ij}$  é  $D_{11}$ , ou seja:

$$D_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = k$$

então: 
$$\bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  o movimento é de extensão pura na direção  $x$ .

(b) considere o escoamento dado por:  $u = ky$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$



todos os termos  $D_{ij}$  são iguais a zero, exceto:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{k}{2}$$

$$\text{então: } \bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  o movimento é de cisalhamento puro.

### Notas:

1. Se  $\bar{\bar{D}}=0$  em um ponto qualquer, o movimento é dito “*localmente rígido*”, isto é, não existe deformação local no ponto.
2. Qualquer tensor simétrico de 2ª ordem possui pelo menos um conjunto de eixos coordenados no qual a representação matricial do tensor possui componentes somente na diagonal. Este sistema de coordenadas é denominado de eixo principal do tensor. Neste sistema o movimento é de extensão pura, ou seja:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{transformação para} \\ \text{eixos principais}}} \begin{pmatrix} D'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D'_{33} \end{pmatrix}$$

### Interpretação Física para $\Omega_{ij}$ , o Tensor Rotação

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{\Omega}}$$

onde:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i)$$

operando  $\epsilon_{kij}$  em ambos os lados:

$$\begin{aligned} \epsilon_{kij} \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{kij} \partial_i u_j - \epsilon_{kij} \partial_j u_i) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{u})_k + (\vec{\nabla} \times \vec{u})_k \right] = (\vec{\nabla} \times \vec{u})_k \equiv w_k \quad (\text{vetor vorticidade}) \end{aligned}$$

ou seja:

$$w_k = \epsilon_{kij} \Omega_{ij}$$

então, o tensor  $\bar{\bar{\Omega}}$  em um ponto define a vorticidade naquele ponto.

Se operarmos, de novo,  $\epsilon_{klm}$  em ambos os lados:

$$\begin{aligned} \epsilon_{klm} \epsilon_{kij} \Omega_{ij} &= \epsilon_{klm} w_k \\ (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) \Omega_{ij} &= \Omega_{lm} - \Omega_{ml} = \Omega_{lm} + \Omega_{lm} = 2 \Omega_{lm} \\ \text{então: } \Omega_{lm} &= \frac{1}{2} \epsilon_{klm} w_k \end{aligned}$$

note que os 3 componentes de  $\vec{w}$  definem  $\bar{\bar{\Omega}}$ , ou seja:

$$\bar{\bar{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}w_3 & -\frac{1}{2}w_2 \\ -\frac{1}{2}w_3 & 0 & \frac{1}{2}w_1 \\ \frac{1}{2}w_2 & -\frac{1}{2}w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos examinar o movimento local descrito por  $\bar{\bar{\Omega}}$ . Temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{u} &= \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{\Omega}} \\ d\vec{u} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} &= \underbrace{d\vec{r} \cdot \bar{\bar{D}}}_{(*)} + \underbrace{d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\Omega}}}_{(**)} \end{aligned}$$

onde: (\*) = taxas de extensão e cisalhamento

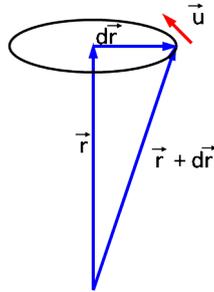
(\*\*) = examinar o sentido físico

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \epsilon_{kij} w_k \\ dx_i \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \epsilon_{kij} dx_i w_k = \frac{1}{2} \epsilon_{jki} w_k dx_i = \frac{1}{2} (\vec{w} \times d\vec{r})_j \\ \text{ou: } d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\Omega}} &= \frac{1}{2} (\vec{w} \times d\vec{r}) \quad \text{com } \vec{w} \text{ avaliado em } \vec{r} \end{aligned}$$

Se  $\bar{\bar{D}}=0$  então  $d\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{w} \times d\vec{r}$

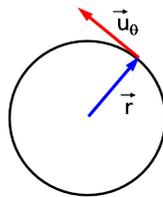
Compare este resultado com:  $\vec{V} = \vec{w} \times d\vec{r}$ . Concluimos que estamos diante de uma rotação local de corpo rígido do elemento  $d\vec{r}$  em torno do ponto  $\vec{r}$  com velocidade angular  $\frac{1}{2}\vec{w}$ .

$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{w}$  é duas vezes a velocidade angular local de um elemento de fluido.



### Exemplos de Cálculo de Vorticidade

(a) Rotação de corpo rígido com velocidade angular constante  $\Omega$



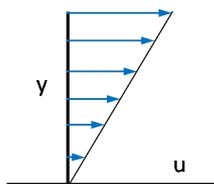
Sejam:  $u_\theta = r\Omega$  e  $u_r = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{w} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & r u_\theta & u_z \end{vmatrix}$$

ou seja:

$$\vec{w} = \frac{1}{r} \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) = 2\Omega \hat{e}_z$$

(b) Escoamento de cisalhamento:  $u = ky$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$



$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$w_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -k$$

Note que, mesmo com linhas de corrente paralelas ao eixo  $x$ , existe uma velocidade angular dos elementos de fluido diferente de zero (a velocidade angular local é igual a:  $-\frac{1}{2}k \hat{e}_3$ ). No caso da rotação de corpo rígido, as linhas de corrente são circulares e há vorticidade. Existem escoamentos com linhas de corrente circulares, mas com vorticidade nula. É o caso do “vórtice livre”, onde:  $u_\theta = \frac{c}{r}$ .

### 3.7 Resumo das Seções Anteriores

Examinando o movimento de dois pontos próximos:

$$\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = d\vec{r} \cdot (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}})$$

onde:

$$\overline{\overline{D}} \Rightarrow \text{descreve taxas de extensão e de cisalhamento}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} \Rightarrow \text{descreve velocidades angulares locais}$$

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} \text{vetor vorticidade, é igual a duas vezes a velocidade} \\ \text{angular local de um elemento de fluido} \end{cases}$$

Em um sistema de eixos principais, o movimento geral de um elemento de fluido consiste de:

1. translação uniforme (no sentido de que todos os pontos têm a mesma velocidade)
2. alongamento ou encurtamento ao longo dos eixos principais
3. rotação local de corpo rígido

---

## Capítulo 4

# Dinâmica dos Meios Deformáveis

A cinemática dos meios deformáveis nos forneceu técnicas para descrever o movimento (descrição de Euler ou Lagrange) e restrições ao movimento impostas pela conservação de massa.

O estudo da dinâmica leva em consideração as forças que produzem o movimento.

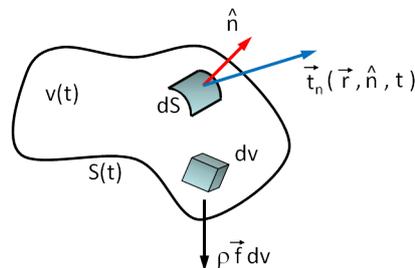
Existem dois tipos de forças que atuam em um meio deformável:

- (a) *Forças de corpo (ou de volume)*: são forças proporcionais à massa do material, atuando em todo o material. Por exemplo, campos gravitacional, elétrico ou magnético geram forças de corpo.

Se  $\vec{f}$  é a força de corpo por unidade de massa, então  $\rho\vec{f}$  é a força de corpo por unidade de volume.

Logo:  $\int_v \rho\vec{f}dv$  é a força de corpo total agindo no elemento de volume  $v$ .

- (b) *Forças de superfície*: são forças que agem na fronteira de um elemento material como resultado da interação com o material envolvendo o elemento.



onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal ao elemento de superfície  $dS$ , e  $S$  é a superfície que limita  $v$ .

Então:  $\vec{t}_n dS$  é a força trativa sobre  $dS$  devido ao material que envolve  $v$ . Logo,  $\vec{t}_n$  é uma força por unidade de área, ou seja, uma tensão trativa.

Podemos escrever que a força de superfície total agindo sobre  $S$  é dada por:

$$\int_S \vec{t}_n(\vec{r}, \hat{n}, t) dS$$

#### Princípio de Tensão de Cauchy:

“em torno de qualquer superfície fechada imaginária no material, existe uma distribuição do vetor tensão  $\vec{t}_n$  cuja resultante e momento são equivalentes àquelas causadas pelo material que envolve a superfície”.

## 4.1 Conservação da Quantidade de Movimento Linear

(2<sup>a</sup> Lei de Newton)

“a taxa de variação da quantidade de movimento linear das partículas em um volume  $v(t)$  é igual ao somatório das forças externas agindo sobre estas partículas”

A velocidade  $\vec{u}$  é a quantidade de movimento por unidade de massa. Então,  $\rho \vec{u}$  é a quantidade de movimento linear por unidade de volume.

Dessa forma, a equação da quantidade de movimento linear pode ser expressa como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{u} dv = \underbrace{\int_{v(t)} \rho \vec{f} dv}_{\text{força de corpo}} + \underbrace{\int_{S(t)} \vec{t}_n dS}_{\text{força de superfície}}$$

A primeira integral pode ser transformada pelo teorema de transporte de Reynolds:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F dv = \int_{v(t)} \left[ \frac{DF}{Dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv$$

onde, nesse caso,  $F = \rho \vec{u}$ .

Logo:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{u} \, dv &= \int_{v(t)} \left[ \frac{D(\rho \vec{u})}{Dt} + \rho \vec{u} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv \\
 &= \int_{v(t)} \left[ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \vec{u} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{u} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] dv \\
 &= \int_{v(t)} \left[ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \underbrace{\vec{u} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)}_{=0 \text{ (eq. da continuidade)}} \right] dv \\
 &= \int_{v(t)} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \, dv
 \end{aligned}$$

então temos:

$$\int_{v(t)} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \, dv = \int_{v(t)} \rho \vec{f} \, dv + \int_{S(t)} \vec{t}_n \, dS$$

#### Princípio de Cauchy das Tensões:

“existe um tensor  $\bar{\bar{T}}$ , chamado **tensor das tensões**, que associa com cada direção  $\hat{n}$ , no espaço, um vetor  $\vec{t}_n$  através da relação:  $\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}}$  (provaremos mais tarde)”.

Usando este princípio:

$$\int_{v(t)} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \, dv = \int_{v(t)} \rho \vec{f} \, dv + \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} \, dS$$

aplicando o teorema da divergência na terceira integral, ou seja:

$$\int_{S(t)} \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} \, dS = \int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \, dv$$

então:

$$\int_{v(t)} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \, dv = \int_{v(t)} \rho \vec{f} \, dv + \int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \, dv$$

ou:

$$\int_{v(t)} \left[ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} - \rho \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \right] dv = 0$$

para um  $v(t)$  genérico:  $\implies \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} - \rho \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} = 0$

ou, finalmente:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \quad \implies \quad \text{“Equação de Cauchy do Movimento”}$$

podemos escrever também:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}$$

interpretando cada termo:

- $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \implies$  massa vezes aceleração por unidade de volume
- $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \implies$  massa vezes aceleração local por unidade de volume
- $\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \implies$  massa vezes aceleração **convectiva** por unidade de volume
- $\rho \vec{f} \implies$  força de corpo por unidade de volume
- $\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \implies$  força de superfície por unidade de volume

em notação indicial:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \partial_j T_{ji} \quad \text{onde: } t_i = n_j T_{ji}$$

ou:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \partial_j u_i = \rho f_i + \partial_j T_{ji}$$

Em um sistema de coordenadas  $x, y, z$ , a componente  $x$  da equação é:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}$$

Obs: A equação de Cauchy descreve um balanço de forças e quantidade de movimento linear para qualquer substância, i.e., fluido, sólido elástico, sólido plástico, etc...

O tipo de material que está se deformando é especificado na equação através do estabelecimento de uma relação entre  $\bar{\bar{T}}$  e outras propriedades materiais (tensão e taxa de deformação  $\bar{\bar{D}}$ , por exemplo). Esta equação é chamada de “Equação Constitutiva”.

Por exemplo: *fluido sem viscosidade*  $\implies$  “não existem tensões cisalhantes”

$$\bar{\bar{T}} = -p \bar{\bar{I}} \implies \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} = -\vec{\nabla} p$$

Em notação indicial:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij}$$

$$\partial_i T_{ij} = -(\partial_i p) \delta_{ij} = -\partial_j p$$

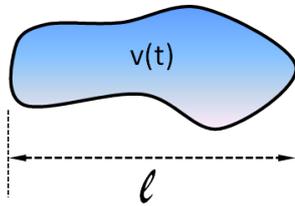
Vamos voltar e provar o princípio de Cauchy:  $\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}}$

Usando a equação:

$$\int_{v(t)} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dv = \int_{v(t)} \rho \vec{f} dv + \int_{S(t)} \vec{t}_n dS$$

escolha um volume  $v(t)$  bem pequeno de maneira que  $\rho$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{f}$  e  $\vec{t}$  sejam aproximadamente constantes em  $v(t)$ .

assuma que  $\ell$  seja uma dimensão característica de  $v(t)$ :



Então:  $\int_{v(t)} \sim \ell^3$  e:  $\int_{S(t)} \sim \ell^2$

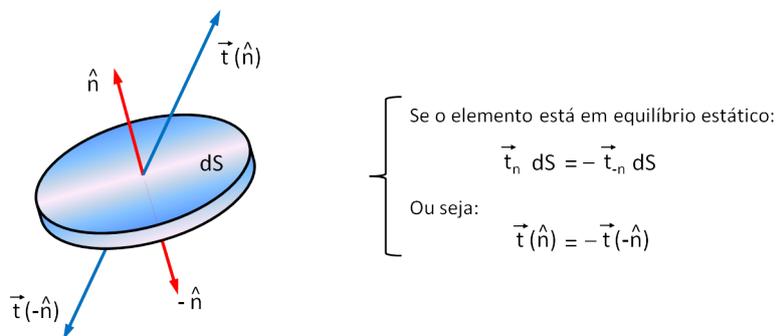
Se tomarmos o limite quando  $\ell \rightarrow 0$ , o volume  $v(t)$  fica desprezível em relação à superfície. Então, no limite:

$$\int_{S(t)} \vec{t}_n dS = 0$$

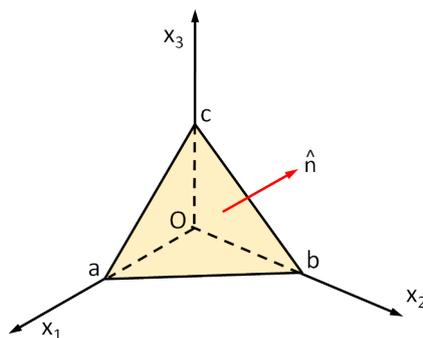
em palavras significa:

“para um volume suficientemente pequeno na vizinhança de um ponto, as forças de superfície estão em equilíbrio, mesmo que o fluido esteja em movimento”.

Vamos aplicar este resultado a  $v(t)$  na forma de um disco de espessura desprezível:



Agora considere um elemento de volume na forma de um tetraedro. A face  $abc$ , cuja normal é  $\hat{n}$ , tem área  $dA$ .



Então temos:

Face	Normal	Área	Força/Área
$abc$	$\hat{n}$	$dA$	$\vec{t}(\hat{n})$
$Oac$	$-\hat{e}_2$	$\hat{n} \cdot \hat{e}_2 dA$	$\vec{t}(-\hat{e}_2)$
$Obc$	$-\hat{e}_1$	$\hat{n} \cdot \hat{e}_1 dA$	$\vec{t}(-\hat{e}_1)$
$Oab$	$-\hat{e}_3$	$\hat{n} \cdot \hat{e}_3 dA$	$\vec{t}(-\hat{e}_3)$

Para termos equilíbrio estático:

$$\vec{t}(\hat{n}) (dA) + \vec{t}(-\hat{e}_2) (\hat{n} \cdot \hat{e}_2 dA) + \vec{t}(-\hat{e}_1) (\hat{n} \cdot \hat{e}_1 dA) + \vec{t}(-\hat{e}_3) (\hat{n} \cdot \hat{e}_3 dA) = 0$$

usando o resultado  $\vec{t}(\hat{n}) = -\vec{t}(-\hat{n})$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{t}(\hat{n}) &= \vec{t}(\hat{e}_2) (\hat{n} \cdot \hat{e}_2) + \vec{t}(\hat{e}_3) (\hat{n} \cdot \hat{e}_3) + \vec{t}(\hat{e}_1) (\hat{n} \cdot \hat{e}_1) \\ &= \hat{n} \cdot [\hat{e}_1 \vec{t}(\hat{e}_1) + \hat{e}_2 \vec{t}(\hat{e}_2) + \hat{e}_3 \vec{t}(\hat{e}_3)] \\ &= \hat{n} \cdot [\hat{e}_i \vec{t}(\hat{e}_i)]\end{aligned}$$

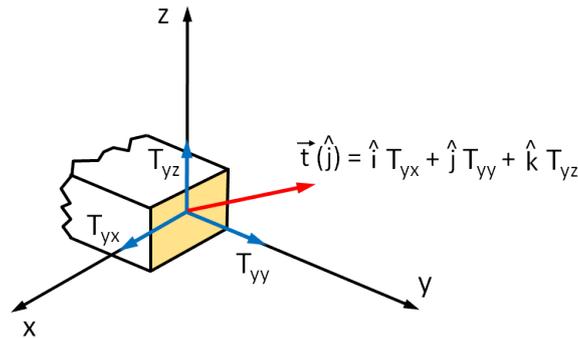
comparando  $\vec{t}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot [\hat{e}_i \vec{t}(\hat{e}_i)]$  com  $\vec{t}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}}$ , identificamos o tensor das tensões  $\bar{\bar{T}}$  como:

$$\bar{\bar{T}} = \hat{e}_i \vec{t}(\hat{e}_i) = \hat{e}_1 \vec{t}(\hat{e}_1) + \hat{e}_2 \vec{t}(\hat{e}_2) + \hat{e}_3 \vec{t}(\hat{e}_3)$$

o componente  $(k, j)$  de  $\bar{\bar{T}}$  será  $T_{kj} = \hat{e}_k \cdot \bar{\bar{T}} \cdot \hat{e}_j$ , ou seja:

$$\begin{aligned}T_{kj} &= \hat{e}_k \cdot \hat{e}_i \vec{t}(\hat{e}_i) \cdot \hat{e}_j \\ &= \delta_{ki} \vec{t}(\hat{e}_i) \cdot \hat{e}_j \\ &= \vec{t}(\hat{e}_k) \cdot \hat{e}_j\end{aligned}$$

onde  $T_{kj}$  é a componente  $j$  da tensão numa superfície cuja normal está na direção  $k$ .



$T_{kj} \implies$  componente da força por unidade de área atuando na direção  $j$  numa superfície cuja normal aponta na direção  $k$ .

Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\vec{t}(\hat{n}) &= \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} \\ \vec{t}(\hat{e}_i) &= \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j T_{jk} \hat{e}_k = T_{ik} \hat{e}_k\end{aligned}$$

ou ainda:

$$\vec{t}(\hat{e}_1) = T_{11} \hat{e}_1 + T_{12} \hat{e}_2 + T_{13} \hat{e}_3$$

$$\vec{t}(\hat{e}_2) = T_{21} \hat{e}_1 + T_{22} \hat{e}_2 + T_{23} \hat{e}_3$$

$$\vec{t}(\hat{e}_3) = T_{31} \hat{e}_1 + T_{32} \hat{e}_2 + T_{33} \hat{e}_3$$

Usando o princípio da conservação da quantidade de movimento angular podemos provar que o tensor das tensões é simétrico, ou seja:  $T_{ij} = T_{ji}$ .

## 4.2 Prova da Simetria do Tensor das Tensões

Primeiro uma definição: *Fluidos não Polares* são aqueles em que os torques se devem unicamente às forças aplicadas sobre o fluido. Para fluidos polares existem “*forças internas*” que podem produzir torques internos.

Para fluidos não polares, a conservação da quantidade de movimento angular implica na simetria do tensor das tensões.

### Conservação da Quantidade de Movimento Angular

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{u} dv}_{(A)} = \underbrace{\int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} dv}_{(B)} + \underbrace{\int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{t}_n dS}_{(C)}$$

onde:

- (A)  $\Rightarrow$  taxa de variação da quantidade de movimento angular em  $v$
- (B)  $\Rightarrow$  torque das forças de corpo
- (C)  $\Rightarrow$  torque das forças de superfície

usando o teorema de transporte de Reynolds:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{u} dv = \int_{v(t)} \rho \frac{D}{Dt} (\vec{r} \times \vec{u}) dv = \int_{v(t)} \rho \left[ \underbrace{\frac{D\vec{r}}{Dt} \times \vec{u}}_{=\vec{0} (\vec{u} \times \vec{u})} + \vec{r} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} \right] dv$$

então:

$$\int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} dv = \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} dv + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{t}_n dS$$

ou:

$$\int_{v(t)} \vec{r} \times \left[ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} - \rho \vec{f} \right] dv = \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{t}_n dS$$

assim:

$$\int_{v(t)} \left( \vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \right) dv = \int_{S(t)} \vec{r} \times (\hat{n} \cdot \bar{\bar{T}}) dS$$

Para o componente  $i$ :

$$\int_{v(t)} \epsilon_{ijk} x_j \left( \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \right)_k dv = \int_{S(t)} \epsilon_{ijk} x_j \left( \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} \right)_k dS$$

ou:

$$\int_{v(t)} \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} dv = \int_{S(t)} \epsilon_{ijk} x_j n_m T_{mk} dS$$

ou também:

$$\int_{v(t)} \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} dv = \epsilon_{ijk} \int_{S(t)} n_m (x_j T_{mk}) dS$$

usando o Teorema da Divergência:

$$\int_{v(t)} \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} dv = \int_{v(t)} \epsilon_{ijk} \partial_m (x_j T_{mk}) dv$$

$$\int_{v(t)} \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} dv = \int_{v(t)} \epsilon_{ijk} (x_j \partial_m T_{mk} + T_{mk} \partial_m x_j) dv$$

$$\text{então: } 0 = \int_{v(t)} \epsilon_{ijk} T_{mk} \partial_m x_j dv \quad (\text{para um } v(t) \text{ genérico})$$

portanto:

$$\epsilon_{ijk} T_{mk} \partial_m x_j = 0 \quad \text{mas } \partial_m x_j = \delta_{mj}$$

assim:

$$\epsilon_{ijk} T_{mk} \delta_{mj} = 0 \quad \implies \quad \epsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{1jk} T_{jk} &= \epsilon_{123} T_{23} + \epsilon_{132} T_{32} = 0 \\ \implies T_{23} - T_{32} &= 0 \quad \text{ou} \quad T_{23} = T_{32} \end{aligned}$$

Para um caso geral, aplica-se  $\epsilon_{ilm}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} T_{jk} &= 0 = (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) T_{jk} \\ \implies T_{lm} - T_{ml} &= 0 \quad \text{ou} \quad T_{lm} = T_{ml} \quad (\text{simétrico!}) \end{aligned}$$

Note que a simetria do tensor das tensões depende da conservação da quantidade de movimento angular. Aqui, assumimos o segundo e provamos o primeiro. Alguns autores preferem assumir a simetria do tensor das tensões.

## 4.3 Aplicações da Equação de Cauchy para o Movimento

### Equação da Hidrostática

Fluido é definido como matéria que se deforma continuamente na presença de tensões tangenciais. Então, se temos fluido em repouso não podemos ter tensões tangenciais. Só teremos tensões normais agindo.

Assim, a força  $\vec{t}_n$  sobre qualquer elemento de área com normal  $\hat{n}$  tem que ser paralela a  $\hat{n}$ . Então:

$$\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} = k \hat{n}$$

fazendo  $k \equiv -p$ , temos:

$$\hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} = -p \hat{n} \quad (\text{para qualquer } \hat{n})$$

escolhendo  $\hat{n}$  como  $\hat{e}_i$  chegamos a:

$$\hat{e}_i \cdot \bar{\bar{T}} = -p \hat{e}_i$$

e, tomando o produto escalar com  $\hat{e}_j$ , obtemos:

$$\underbrace{\hat{e}_i \cdot \bar{\bar{T}} \cdot \hat{e}_j}_{T_{ij}} = -p \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = -p \delta_{ij}$$

Então, para um fluido em repouso, o tensor das tensões tem a forma:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \implies \quad \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

onde o escalar  $p$  é chamado “*pressão hidrostática*”.

Então, para um fluido em repouso:

- não existem tensões tangenciais
- somente tensões normais:  $\longrightarrow T_{ij} = -p \delta_{ij}$
- $\vec{u} = \vec{0}$

assim:

$$\rho \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{=\vec{0}} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}$$

mas:

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} = -\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \hat{e}_j p \delta_{jk} \hat{e}_k = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \hat{e}_j = -\vec{\nabla} p$$

então:

$$\vec{0} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p$$

ou:

$$\rho \vec{f} = \vec{\nabla} p$$

*Para um fluido em repouso, a equação mostra que as forças de corpo são equilibradas pelas forças de pressão.*

Normalmente,  $\vec{f} = \vec{g}$  (aceleração da gravidade).

Da equação da conservação de massa,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0$ , para um fluido em repouso,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , ou seja:  $\rho = \rho(\vec{r})$  somente. Então:

$$\left. \begin{array}{l} \rho \vec{f} = \vec{\nabla} p \\ \rho = \rho(\vec{r}) \end{array} \right\} \implies \text{“fluido em repouso”}$$

As equações acima não podem ser resolvidas até que seja especificada uma relação entre  $\rho$  e  $p$ . Esta relação é chamada “equação de estado”.

### Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fluido incompressível} \implies \rho = \text{const} \\ p = \rho R T \end{array} \right.$$

Para  $\rho = \text{const}$  e  $\vec{f} = -g \hat{j}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = 0 \implies p \neq p(x) \\ \frac{dp}{dz} = 0 \implies p \neq p(z) \\ \frac{dp}{dy} = -\rho g \implies p_2 - p_1 = \rho g h \end{array} \right.$$

### Força sobre um Corpo em um escoamento Permanente

Forças de arraste em corpos são normalmente medidas em túneis de vento trabalhando em regime permanente. O estudo é feito a partir da medição da distribuição de pressão e velocidade longe do corpo. A base para este procedimento vem da análise da equação de Cauchy.

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} &= \rho \vec{g} + \text{div} \bar{\bar{T}} \\ \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) &= \rho \vec{g} + \text{div} \bar{\bar{T}} \end{aligned}$$

Obs:  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$  (no regime permanente) e  $\rho \vec{g} = \vec{0}$  (será desprezado por estarmos interessados nas forças de corpo devido ao movimento).

Podemos usar a seguinte identidade:

$$\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \text{div} (\rho \vec{u} \vec{u}) - \vec{u} \text{div} (\rho \vec{u})$$

então:

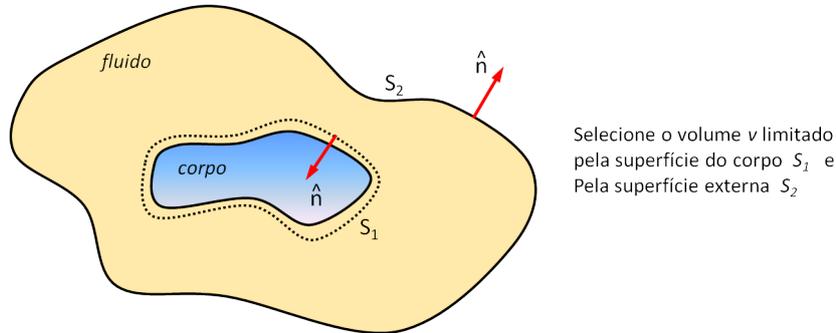
$$\operatorname{div}(\rho \vec{u} \vec{u}) - \vec{u} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = \operatorname{div} \bar{\bar{T}}$$

mas:  $\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$ , pela equação da continuidade.

temos, finalmente:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u} \vec{u} - \bar{\bar{T}}) = 0$$

Escolha um corpo de forma arbitrária dentro do fluido:



integrando a equação em  $v$ :

$$\int_v \operatorname{div}(\rho \vec{u} \vec{u} - \bar{\bar{T}}) dv = 0$$

usando o teorema da divergência, esta integral será igual a:

$$\int_S \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \bar{\bar{T}}) dS = 0$$

separando as integrais:

$$\int_{S_2} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) dS - \int_{S_2} \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} dS + \int_{S_1} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) dS - \int_{S_1} \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} dS = 0$$

mas  $\hat{n} \cdot \vec{u} = 0$  ao longo de  $S_1$  (pois não há escoamento através do corpo). Logo:

$$\int_{S_2} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) dS - \int_{S_2} \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} dS = \int_{S_1} \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} dS$$

onde, o integrando do termo da direita da equação acima ( $\hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} = \vec{t}_n$ ) representa a força exercida pelo corpo sobre o fluido. É igual a  $-\vec{F}$ , a força exercida pelo fluido sobre o corpo.

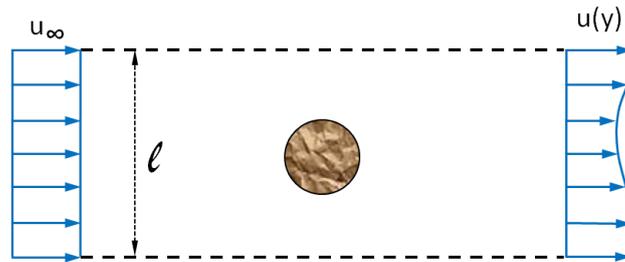
Então:

$$\vec{F} = - \int_{S_2} \left[ \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) - \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} \right] dS$$

Se escolhermos  $S_2$  bem longe do corpo, podemos desprezar os efeitos viscosos, ou seja:  $\bar{\bar{T}} = -p \bar{\bar{I}}$ . Então:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \int_{S_2} \left[ \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) + \hat{n} \cdot (p \bar{\bar{I}}) \right] dS \\ &= - \int_{S_2} [\hat{n} \cdot \vec{u} \rho \vec{u} + \hat{n} p] dS \end{aligned}$$

#### Exemplo: Força sobre um Cilindro



Resultado:

$$F = - \int_0^\ell \rho u (u - u_\infty) dl \quad (\text{assumindo } "p = \text{const.}" \text{ ao longe})$$

Mostramos que a equação de Cauchy é:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \text{div } \bar{\bar{T}}$$

Para um fluido em movimento, é comum escrevermos o tensor das tensões na seguinte forma:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{ou} \quad \bar{\bar{T}} = -p \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$$

Definimos assim um novo tensor  $\tau_{ij}$ , simétrico, chamado “Tensor das Tensões Viscosas”.

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{\bar{T}} &= \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot [\hat{e}_j (-p \delta_{jk}) \hat{e}_k + \hat{e}_l \tau_{lm} \hat{e}_m] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (-p) \hat{e}_j + \delta_{il} \frac{\partial \tau_{lm}}{\partial x_i} \hat{e}_m = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \hat{e}_j + \frac{\partial \tau_{lm}}{\partial x_l} \hat{e}_m \\ &= -\vec{\nabla} p + \text{div } \bar{\bar{\tau}} \end{aligned}$$

Assim, a equação de Cauchy fica:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{f} + \text{div } \overline{\overline{T}}$$

## 4.4 Resumo

Até este ponto do nosso desenvolvimento, vimos que:

1. conservação da quantidade de movimento linear implica no equilíbrio estático sob forças de superfície; nos leva a um tensor  $\overline{\overline{T}}$  tal que a força local é dada por  $\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}}$  e nos deu a equação de Cauchy para o movimento.
2. conservação da quantidade de momento angular implica na simetria do tensor das tensões.
3. da cinemática obtivemos, da conservação de massa, a equação da continuidade.

Então, temos disponíveis para a análise das deformações dos meios contínuos 4 equações (sendo 3 componentes da equação de Cauchy mais a equação da continuidade) para determinar 11 incógnitas, ou seja:  $1(p) + 1(\rho) + 3(\vec{u}) + 6(\tau_{ij})$ .

O princípio da conservação da energia (*Primeira Lei da Termodinâmica*) ainda não foi utilizado. Isto ajuda, mas não resolve o problema integralmente.

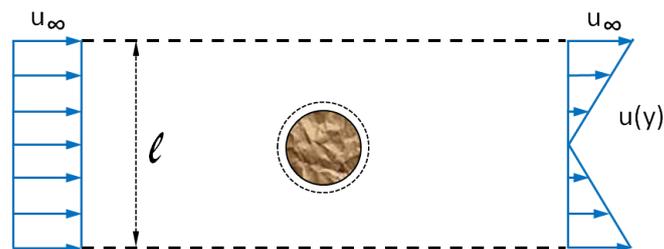
## 4.5 Exercício Proposto

Derive, a partir da equação de Cauchy, uma expressão para a força exercida pelo fluido sobre um corpo de forma arbitrária. Justifique as aproximações feitas.

Dicas:

- Escolha um volume de controle conveniente em torno do corpo e integre a equação de Cauchy neste volume.
- Despreze as forças de corpo.
- A identidade  $\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \text{div}(\rho \vec{u} \vec{u}) - \vec{u} \text{div}(\rho \vec{u})$  pode ser útil no desenvolvimento.

Depois de obtida a expressão para o cálculo da força exercida sobre o corpo pelo fluido, aplique-a para seguinte situação (assumindo que a pressão na superfície de controle pode ser considerada constante):



---

## Capítulo 5

# Equação da Energia

Discutiremos a seguir a equação da energia aplicada a fluidos em movimento.

Será assumido que para um fluido em movimento prevalece a condição de *equilíbrio termodinâmico local*. Desta forma, todas as variáveis termodinâmicas que caracterizam o estado do fluido estão definidas. Entretanto, estas variáveis são definidas localmente em relação a um sistema de coordenadas material. Por exemplo, a temperatura deve ser medida com um termômetro que se move com o fluido.

Tal condição é necessária pois as variáveis termodinâmicas são definidas somente para estados de equilíbrio. A validade da hipótese de equilíbrio local se justifica pela concordância entre as previsões e os resultados experimentais.

Podemos escrever a 1<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica da seguinte forma:

*“a taxa de aumento da energia de uma dada massa contida em um volume material é igual à taxa de adição de calor à massa, mais a taxa na qual o trabalho é realizado sobre a massa considerada”*

Consideramos *energia* como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{interna} \Rightarrow \text{associada ao movimento molecular} \\ \textit{cinética} \Rightarrow \text{associada com o movimento do material} \end{array} \right.$$

Vamos formular matematicamente o princípio de conservação de energia:

- $\varepsilon \equiv$  energia interna por unidade de massa
- energia cinética por unidade de massa  $\equiv \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 = \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u}$
- $\vec{q} \equiv$  vetor densidade de fluxo de calor. Então,  $\hat{n} \cdot \vec{q} dS$  é o fluxo de calor saindo do volume através da área  $d\vec{S} = \hat{n} dS$
- o trabalho produzido pelas forças de corpo por unidade de tempo (i.e., potência) sobre um volume elementar  $\equiv \rho \vec{f} \cdot \vec{u}$

- o trabalho produzido pelas forças de superfície por unidade de tempo (i.e., potência) sobre uma superfície elementar  $\equiv \vec{t} \cdot \vec{u}$
- $Q \equiv$  taxa de calor gerado por unidade de massa

então:

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dv}_{\text{A}} = \underbrace{- \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \hat{n} dS}_{\text{B}} + \underbrace{\int_{v(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv}_{\text{C}} + \underbrace{\int_{S(t)} \vec{t} \cdot \vec{u} dS}_{\text{D}} + \underbrace{\int_{v(t)} \rho Q dv}_{\text{E}}$$

onde:

A  $\Rightarrow$  taxa de variação da energia

B  $\Rightarrow$  calor cedido a  $v$

C  $\Rightarrow$  potência das forças de corpo

D  $\Rightarrow$  potência das forças de superfície

E  $\Rightarrow$  geração de calor

A primeira integral pode ser transformada pelo teorema de transporte de Reynolds:<sup>1</sup>

Neste caso:  $F = \rho \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right)$

então:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dv &= \int_{v(t)} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \right] + \rho \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \operatorname{div} \vec{u} \right\} dv \\ &= \int_{v(t)} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) + \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \underbrace{\left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} \right]}_{=0 \text{ (continuidade)}} \right\} dv \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>  $\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} F dv = \int_{v(t)} \left[ \frac{DF}{Dt} + F \operatorname{div} \vec{u} \right] dv$

Portanto:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dv = \int_{v(t)} \rho \frac{D}{Dt} \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dv$$

A segunda integral (denominada de “B”) pode ser transformada em uma integral de volume pelo teorema da divergência, ou seja:

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{q} dS = \int_v \operatorname{div} \vec{q} dv$$

Na quarta integral (denominada de “D”) podemos usar o teorema de Cauchy, seguido do teorema da divergência, ou seja:

$$\int_S \vec{t} \cdot \vec{u} dS = \int_S \hat{n} \cdot \bar{\bar{T}} \cdot \vec{u} dS = \int_v \operatorname{div} (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) dv$$

Voltando à equação que representa o princípio da conservação de energia:

$$\begin{aligned} \int_{v(t)} \rho \frac{D}{Dt} \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dv &= - \int_{v(t)} \operatorname{div} \vec{q} dv + \int_{v(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv + \\ &+ \int_{v(t)} \operatorname{div} (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) dv + \int_{v(t)} \rho Q dv \end{aligned}$$

para um  $v(t)$  genérico:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \operatorname{div} (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) + \rho Q$$

Podemos obter outras formas da equação da energia:

expandindo o primeiro termo:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left( \varepsilon + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) &= \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{\rho}{2} \frac{D}{Dt} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \\ &= \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{\rho}{2} 2 \vec{u} \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} \\ &= \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \rho \vec{u} \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} \end{aligned}$$

agora, expandindo o quarto termo, ou seja:  $div \left( \bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{u}} \right)$ , em notação indicial, temos:

$$\begin{aligned} div \left( \bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{u}} \right) &= \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\hat{e}_j T_{jk} \hat{e}_k \cdot \hat{e}_l u_l) = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\hat{e}_j T_{jk} u_l \delta_{kl}) \\ &= \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\hat{e}_j T_{jk} u_k) = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (T_{jk} u_k) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{jk} u_k) \\ &= T_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} = \phi' + \bar{\bar{u}} \cdot div \bar{\bar{T}} \end{aligned}$$

então:

$$div \left( \bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{u}} \right) = \phi' + \bar{\bar{u}} \cdot div \bar{\bar{T}}$$

substituindo na equação da energia:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \underbrace{\rho \bar{\bar{u}} \cdot \frac{D\bar{\bar{u}}}{Dt}}_{(*)} = -div \bar{\bar{q}} + \underbrace{\rho \bar{\bar{f}} \cdot \bar{\bar{u}}}_{(*)} + \phi' + \underbrace{\bar{\bar{u}} \cdot div \bar{\bar{T}}}_{(*)} + \rho Q$$

os termos marcados com (\*) se cancelam pela conservação da quantidade de movimento linear (equação de Cauchy escalar  $\bar{\bar{u}}$ ).

então:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -div \bar{\bar{q}} + \phi' + \rho Q$$

Vamos examinar o termo  $\phi'$ :

$$\phi' = \bar{\bar{T}} : \vec{\nabla} \bar{\bar{u}} \quad \text{onde}^2 \quad \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} = A_{ij} B_{ji}$$

mas:  $\vec{\nabla} \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{\Omega}}$ . Logo:

$$\phi' = T_{ij} (D_{ij} + \Omega_{ij}) = T_{ij} D_{ij} + T_{ij} \Omega_{ij}$$

usando:  $T_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$  e o fato de que:  $T_{ij} \Omega_{ij} = 0$ , por se tratar do produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico, obtemos:

$$\phi' = -p \delta_{ij} D_{ij} + D_{ij} \tau_{ij} = -p D_{ii} + \underbrace{D_{ij} \tau_{ij}}_{\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}}}$$

<sup>2</sup> O símbolo “:” representa o produto escalar duplo entre dois tensores. O resultado é um escalar !

mas:  $D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \text{div } \vec{u}$

podemos escrever então:

$$\phi' = -p \text{div } \vec{u} + D_{ij} \tau_{ij}$$

ainda, usando a equação da continuidade:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{u} = 0 \quad \implies \quad \text{div } \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

então:

$$\phi' = -p \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt} + D_{ij} \tau_{ij}$$

substituindo a expressão acima na equação da energia:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\text{div } \vec{q} - \rho p \frac{D(1/\rho)}{Dt} + \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\tau}} + \rho Q$$

em palavras:

$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} \implies$  taxa de variação da energia interna por unidade de volume

$-\rho p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{trabalho de compressão por unidade de tempo por unidade} \\ \text{de volume (trabalho reversível do tipo "p dv")} \end{array} \right.$

$\overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\tau}} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de fornecimento de energia por unidade de volume} \\ \text{devido à "dissipação viscosa" (i.e., conversão de energia} \\ \text{mecânica em energia interna)} \end{array} \right.$

$-\text{div } \vec{q} \implies$  taxa de fornecimento de calor por unidade de volume

$\rho Q \implies$  taxa de calor gerado por unidade de volume

---

## Capítulo 6

# Segunda Lei da Termodinâmica

A taxa de variação de entropia de um elemento material é:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{DS_e}{Dt} + \frac{DS_i}{Dt}$$

onde:

$$S = \int_v \rho s \, dv \Rightarrow \text{entropia do material em } v$$

$$s = \text{entropia por unidade de massa}$$

$\frac{DS_e}{Dt}$  = taxa de variação da entropia devido à interação com a vizinhança

$\frac{DS_i}{Dt}$  = taxa de variação da entropia devido a irreversibilidades internas

A variação de entropia em  $v(t)$  devido à interação com a vizinhança resulta da transferência de calor para  $v(t)$  através de  $S(t)$ . Então:

$$\frac{DS_e}{Dt} = \int_{S(t)} -\hat{n} \cdot \frac{\vec{q}}{T} \, dS \quad T \Rightarrow \text{temperatura absoluta}$$

A taxa de produção de entropia pode ser escrita como:

$$\frac{DS_i}{Dt} = \dot{S}_i = \int_v \rho \dot{s}_i \, dv \quad \text{que é sempre } \geq 0$$

então, a segunda lei fornece:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho s \, dv = \int_{S(t)} -\hat{n} \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) \, dS + \int_{v(t)} \rho \dot{s}_i \, dv$$

Aplicando o teorema de transporte de Reynolds e o teorema da divergência no primeiro e no segundo termos, respectivamente, da equação acima, obtemos:

$$\int_{v(t)} \rho \frac{Ds}{Dt} dv + \int_{v(t)} \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} dv = \int_{v(t)} \rho \dot{s}_i dv \geq 0$$

para um volume genérico:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} = \rho \dot{s}_i \geq 0 \quad (*)$$

tome a equação da energia (sem o termo de geração):

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} &= -\operatorname{div} \vec{q} - \rho p \frac{D(1/\rho)}{Dt} + \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}} \\ \rho \left[ \frac{D\varepsilon}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] &= -\operatorname{div} \vec{q} + \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}} \end{aligned}$$

da equação de Gibbs:  $T ds = d\varepsilon + p d(1/\rho)$

ou:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{D\varepsilon}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

substituindo:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\operatorname{div} \vec{q} + \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}}$$

ou:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} + \frac{1}{T} \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}}$$

substituindo em (\*)

$$-\frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} + \frac{1}{T} \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} = \rho \dot{s}_i \geq 0$$

mas, olhando para a soma de dois dos termos acima, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{q_j}{T} \right) - \frac{1}{T} \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right) \\ &= -\frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{1}{T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \\ &= -\frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{aligned}$$

então:

$$\underbrace{\rho \dot{s}_i}_{\text{A}} = \underbrace{-\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2}}_{\text{B}} + \underbrace{\frac{\overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\tau}}}{T}}_{\text{C}} \geq 0$$

onde:

A  $\Rightarrow$  taxa de produção interna de entropia por unidade de volume

B  $\Rightarrow$  taxa de produção de entropia por unidade de volume devido à condução de calor

C  $\Rightarrow$  taxa de produção de entropia por unidade de volume devido a efeitos viscosos

## 6.1 Resumo

Até agora temos:

conservação de massa	$\longrightarrow$	1 equação
conservação da quantidade de movimento linear (eq. de Cauchy)	$\longrightarrow$	3 equações
conservação de energia	$\longrightarrow$	1 equação
equação de estado $F(\rho, p, T) = 0$	$\longrightarrow$	1 equação
energia $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$	$\longrightarrow$	1 equação
		<b>Total: 7 equações</b>

Como incógnitas temos:

$$p, \rho, \vec{u}, \varepsilon, \vec{q}, T, \overline{\overline{\tau}}$$

$$1 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 6 = \mathbf{16 \text{ incógnitas !}}$$

Se pudermos relacionar  $\vec{q}$  com  $T$  e  $\overline{\overline{\tau}}$  com  $\vec{u}$  (por meio das *equações constitutivas*), teremos 7 equações e 7 incógnitas.

Note que, para problemas onde efeitos de condução de calor e viscosidade podem ser desprezados (ou seja:  $\vec{q} = \vec{0}$ ,  $\overline{\overline{\tau}} = \vec{0}$ ), o sistema acima tem solução.

---

## Capítulo 7

# Equações Constitutivas

Até agora, as equações básicas que derivamos independem do meio deformável considerado. Vamos particularizar estas equações para uma classe de meios deformáveis através do “postulado” de certas relações entre tensão e taxa de deformação e fluxo de calor e gradiente de temperatura (*equações constitutivas*).

Na teoria cinética dos gases é possível obter estas relações para gases monoatômicos. Para meios mais complexos, é necessário postular-se as equações constitutivas e, baseado em comparações com experiências, decidir se as relações postuladas modelam bem (ou não) o escoamento do fluido.

Stokes fez os seguintes postulados com relação a fluidos:

1. o tensor das tensões é uma função contínua do tensor de deformação  $\bar{\bar{D}}$  e não depende de outras quantidades cinemáticas (vorticidade, por exemplo).
2. a relação entre  $\bar{\bar{T}}$  e  $\bar{\bar{D}}$  não depende da posição no meio.
3. fluidos são isotrópicos, i.e., a relação entre  $\bar{\bar{T}}$  e  $\bar{\bar{D}}$  é a mesma não importando o sistema de coordenadas que usamos para descrever o movimento.
4. se  $\bar{\bar{D}} = \bar{0}$  então  $\bar{\bar{T}} = -p \bar{\bar{I}}$  (fluido em repouso).

Um fluido satisfazendo estas condições é chamado de *fluido de Stokes*.

Pode ser mostrado que a equação constitutiva toma a seguinte forma:

$$\bar{\bar{T}} = \alpha \bar{\bar{I}} + \beta \bar{\bar{D}} + \gamma \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{D}} \quad (\text{Serrin, Handbuch der Physik, VIII/1, p.280})$$

Neste curso não vamos considerar uma classe de fluidos tão geral como os fluidos de Stokes. Vamos analisar uma sub-classe dos fluidos de Stokes chamada “*fluidos Newtonianos*”.

Para fluidos Newtonianos, o tensor das tensões é uma função linear do tensor deformação  $\bar{\bar{D}}$ . Muitos fluidos encontrados são bem modelados por esta relação.

Uma hipótese análoga é feita em relação ao fluxo de calor. Assumimos que  $\vec{q}$  é uma função linear de  $\vec{\nabla}T$ . Também para o fluxo de massa, assumimos uma função linear do gradiente de concentração  $\vec{\nabla}C$ .

Então:

$$\bar{T} = \bar{T}(\bar{D}) \quad (\text{função linear})$$

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{\nabla}T) \quad (\text{função linear})$$

É conveniente separar o tensor das tensões viscosas do tensor das tensões, ou seja:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{com} \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{D}) \quad (\text{função linear})$$

A função linear mais geral  $\bar{\tau}(\bar{D})$  é a da forma:

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} D_{kl}$$

onde cada componente de  $\bar{\tau}$  pode depender linearmente de todas as nove componentes de  $\bar{D}$ . Ou seja, teremos 81 coeficientes. Estes números serão reduzidos para 2 através do uso das hipóteses de Stokes.

De maneira análoga para o fluxo de calor:  $q_i = k_{ij} \partial_j T$ . Ou seja, teremos 9 coeficientes que serão reduzidos para apenas 1.

Note que já satisfizemos 3 das hipóteses de Stokes:

- a relação não depende da posição (explicitamente)
- a relação não depende de outras quantidades cinemáticas
- se  $\bar{D} = \bar{0}$ , então  $\bar{T} = -p \bar{I}$

Ainda precisamos satisfazer a condição de isotropia. Isto vai reduzir os 81 coeficientes para 2.

Precisamos de:

$$\begin{cases} \mu_{ijkl} & \longrightarrow \text{tensor de } 4^{\text{a}} \text{ ordem e isotrópico} \\ k_{ij} & \longrightarrow \text{tensor de } 2^{\text{a}} \text{ ordem e isotrópico} \end{cases}$$

Precisamos saber como achar o tensor isotrópico mais geral de uma dada ordem (formas invariantes multilineares).

Obtemos que:

- o tensor isotrópico mais geral de 2ª ordem é um múltiplo de  $\delta_{ij}$ , ou seja,  $k_{ij} = \gamma \delta_{ij}$ . Escolhendo  $\gamma = -k$  temos:

$$k_{ij} = -k \delta_{ij}$$

Assim:

$$q_i = -k_{ij} \partial_j T = -k \delta_{ij} \partial_j T = -k \partial_i T$$

ou:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (\text{Lei de Fourier})$$

- o tensor isotrópico mais geral de 4ª ordem é da forma:

$$\mu_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$$

aplicando esta relação, a equação constitutiva fica:

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} D_{kl} = (\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}) D_{kl}$$

$$\tau_{ij} = \alpha \delta_{ij} D_{kk} + \beta D_{ij} + \gamma D_{ji}$$

sabemos que  $D_{ij}$  é simétrico e que  $D_{kk} = \text{div } \vec{u}$ , então:

$$\tau_{ij} = \alpha \delta_{ij} \text{div } \vec{u} + (\beta + \gamma) D_{ij}$$

por tradição, fazemos  $\alpha \equiv \lambda$  e  $\beta + \gamma \equiv 2\mu$ . Então:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{div } \vec{u} + 2\mu D_{ij}$$

onde:

$$\lambda = \text{segundo coeficiente de viscosidade}$$

$$\mu = \text{viscosidade dinâmica}$$

O tensor das tensões pode então ser escrito como:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \text{div } \vec{u} + 2\mu D_{ij}$$

(equação constitutiva para fluido Newtoniano)

## 7.1 Algumas Considerações sobre $\mu$ , $\lambda$ e $k$

Tínhamos que:

$$\rho \dot{s}_i = -\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} + \frac{\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}}}{T} \geq 0$$

*Obs: de acordo com a segunda lei da termodinâmica, o escoamento só existe se satisfizer esta restrição.*

Os dois termos da equação acima são independentes, ou seja, pode-se ter tanto um escoamento isotérmico quanto um fluido em repouso aquecido, então, vamos obrigar:

$$-\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} \geq 0 \quad e \quad \frac{\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}}}{T} \geq 0$$

usando que:  $\vec{q} = -k\vec{\nabla} T$  teremos:

$$k \frac{\vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} = \frac{k |\vec{\nabla} T|^2}{T^2} \geq 0$$

então:  $k \geq 0$  porque  $\frac{|\vec{\nabla} T|^2}{T^2} \geq 0$ .

Concluimos, então, que a condutividade térmica é positiva.

A segunda desigualdade obriga que:  $\frac{\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}}}{T} \geq 0$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}} &= (\lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu D_{ij}) D_{ij} = (\lambda \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu D_{ij}) D_{ij} \\ &= \lambda D_{ii} D_{kk} + 2\mu D_{ij} D_{ij} \\ &= \lambda (D_{11} + D_{22} + D_{33})^2 + \\ &\quad + 2\mu (D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{13}^2 + 2D_{23}^2) \geq 0 \end{aligned} \quad (*)$$

(para todos os escoamentos possíveis)

Note que os termos entre parênteses são positivos. Isso poderia nos levar a concluir que  $\lambda \geq 0$  e  $\mu \geq 0$ . Isto é muito restritivo.

Considere um escoamento caracterizado por uma expansão volumétrica pura, onde:  $D_{11} = D_{22} = D_{33} = a$  e  $D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0$

Substituindo os valores acima na expressão (\*), temos:

$$\lambda (3a)^2 + 2\mu (3a^2) \geq 0 \quad \implies \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$$

ou seja:  $\lambda \geq -\frac{2}{3}\mu$ . Então, vemos que para este escoamento, mesmo utilizando  $\mu \geq 0$ ,  $\lambda$  pode ser negativo. Este resultado sugere escrever a desigualdade acima da forma:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \frac{2}{3}\mu) (D_{11} + D_{22} + D_{33})^2 + \\ & + \frac{2}{3}\mu \left[ (D_{11} - D_{22})^2 + (D_{11} - D_{33})^2 + (D_{22} - D_{33})^2 \right] + \\ & + 4\mu (D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Lembre que todo tensor de 2ª ordem simétrico permite pelo menos um conjunto de eixos principais no qual o tensor é diagonal. Então, neste sistema, a desigualdade acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \frac{2}{3}\mu) (D'_{11} + D'_{22} + D'_{33})^2 + \\ & + \frac{2}{3}\mu \left[ (D'_{11} - D'_{22})^2 + (D'_{11} - D'_{33})^2 + (D'_{22} - D'_{33})^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos ver agora que, para qualquer escoamento possível:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \quad e \quad \mu \geq 0$$

### Comentários sobre $\mu$ , $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ e $p$ nas Equações Constitutivas

#### (a) Viscosidade dinâmica

O parâmetro  $\mu$  na equação constitutiva é denominado *viscosidade dinâmica*. Vamos mostrar que  $\mu$  está associado com o coeficiente de viscosidade da lei de Newton.

Da lei de Newton para viscosidade:  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

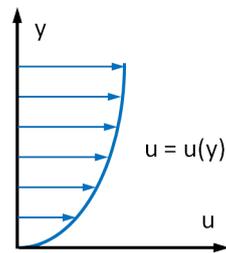
Considere o escoamento de cisalhamento puro:  $u = u(y)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ :

Quem é  $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu D_{ij}$ ? mas  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ , (*fluido incompressível*)

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} \quad , \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Só sobram os termos:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$$



então:

$$\tau_{12} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Lei de Newton para viscosidade} \\ \text{(definição de viscosidade)} \end{array} \right.$$

**(b) Viscosidade global (“bulk viscosity”)**

A combinação  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$  é chamada viscosidade global e representada por:  $\beta$

então:

$$\lambda = \beta - \frac{2}{3}\mu$$

logo:

$$\tau_{ij} = \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu D_{ij}$$

Observe que a soma dos componentes normais do tensor das tensões viscosas não é nula para escoamentos em que  $\operatorname{div} \vec{u} \neq 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &= 3 \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu D_{ii} \\ &= 3 \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \operatorname{div} \vec{u} \\ &= 3\beta \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned}$$

Então, este termo irá se somar ao termo  $-p\delta_{ij}$  do tensor das tensões, mostrando que, para escoamentos viscosos de fluidos compressíveis, as forças viscosas contribuem para as tensões normais sobre um elemento de fluido de uma quantidade proporcional a  $\operatorname{div} \vec{u}$ .

**Notas:**

- $\mu$  e  $\beta$  são propriedades que não podem ser obtidas da teoria do contínuo
- a teoria cinética dos gases prevê viscosidade global igual a zero para gases monoatômicos.

- Stokes assumiu  $\beta = 0$  para todos os gases. Por muitos anos não houve contradição experimental deste fato, pois na maioria das situações práticas produzíveis em laboratório, o termo  $div \vec{u}$  é pequeno.

Sabe-se hoje que esta hipótese não é verdadeira (só para casos onde se tem ondas de choque fortes ou ondas provenientes de explosões). Desta forma, para a grande maioria das aplicações, a hipótese de Stokes, que assume  $\beta = 0$ , introduz erro pequeno.

### (c) O parâmetro “ $p$ ” (ver *Batchelor*, pag. 141)

Para interpretar o significado do parâmetro  $p$ , examinaremos o tensor das tensões para um fluido Newtoniano:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij} div \vec{u} + 2\mu D_{ij}$$

considere a soma das tensões normais:

$$T_{ii} = -3p + 3 \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) div \vec{u} = -3p + 3\beta div \vec{u}$$

definindo a “*tensão normal média*” como:

$$\frac{1}{3} T_{ii} = \frac{T_{11} + T_{22} + T_{33}}{3} \equiv -\bar{p}$$

então:

$$p - \bar{p} = \beta div \vec{u}$$

Para fluidos em repouso ( $div \vec{u} = 0$ ), o parâmetro  $p$  é numericamente igual ao oposto (ou simétrico) da tensão normal média. Em um fluido compressível em repouso, esta pressão é denominada “*pressão termodinâmica*”. Então, para fluidos em repouso, a pressão termodinâmica é igual ao oposto da tensão normal média.

Para fluidos em movimento, a pressão só é igual à tensão normal média se  $\beta = 0$  ou  $div \vec{u} = 0$ .

$$\text{Como vimos: } \begin{cases} \beta = 0 & \longrightarrow & \text{para gases monoatômicos} \\ div \vec{u} = 0 & \longrightarrow & \text{para fluidos incompressíveis} \end{cases}$$

A hipótese de Stokes (i.e.,  $\beta = 0$  para todos os escoamentos), é equivalente a dizer que  $p = -\frac{1}{3} T_{ii}$  para todos os escoamentos.

---

## Capítulo 8

# Equações Governando o Escoamento de Fluidos Newtonianos

### (a) Conservação de Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

### (b) Conservação da Quantidade de Movimento Linear

A equação de conservação da quantidade de movimento linear, juntamente com a equação constitutiva para fluidos Newtonianos, fornece a “Equação de Navier-Stokes”.

Conservação da quantidade de movimento linear:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \text{div } \bar{T}$$

mas:

$$\bar{T} = -p \bar{I} + \lambda \bar{I} \text{ div } \vec{u} + 2\mu \bar{D}$$

ou:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \text{ div } \vec{u} + 2\mu D_{ij}$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{T} &= \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\hat{e}_j T_{jk} \hat{e}_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p \delta_{jk} + \lambda \delta_{jk} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + 2\mu D_{jk} \right) \hat{e}_k \\ &= \left[ -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu D_{jk}) \right] \hat{e}_k \end{aligned}$$

então temos:

$$\rho \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu D_{jk}) + \rho f_k$$

(Equação de Navier-Stokes)

ou na forma vetorial:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \left[ \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div } \vec{u} \right] + \text{div} \left[ 2\mu \bar{\bar{D}} \right]$$

para  $\beta$  e  $\mu$  independentes da posição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \left[ \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div } \vec{u} \right] = \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) = \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m} \\ \text{e} \\ \text{div} \left[ 2\mu \bar{\bar{D}} \right] = 2\mu \text{div } \bar{\bar{D}} = 2\mu \frac{\partial D_{jk}}{\partial x_j} \\ = 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] = \mu \left[ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_j} \right] \end{array} \right.$$

então:

$$\vec{\nabla} \left[ \left( \beta - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div } \vec{u} \right] + \text{div} \left[ 2\mu \bar{\bar{D}} \right] = \left( \beta + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_j}$$

finalmente:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \left( \beta + \frac{1}{3}\mu \right) \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

(fluido Newtoniano com  $\beta$  e  $\mu$  constantes)

Para fluido incompressível, i.e.,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ , temos:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

### (c) Equação da Energia para Fluido Newtoniano

Partindo de:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\text{div } \vec{q} - \rho p \frac{D(1/\rho)}{Dt} + \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\tau}} + \rho Q$$

usando para fluido Newtoniano:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu D_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

o termo  $\tau_{ij} D_{ij}$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} D_{ij} &= \left[ \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= \lambda \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \end{aligned}$$

portanto, a equação da energia fica:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\text{div} \vec{q} - \rho p \frac{D(1/\rho)}{Dt} + \underbrace{\lambda \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2}_{\phi \Rightarrow \text{função dissipação viscosa}} + \rho Q$$

usando  $\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$ , temos:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \text{div} \left( k \vec{\nabla} T \right) - p \text{div} \vec{u} + \phi + \rho Q$$

Normalmente escrevemos a equação da energia em termos de temperatura:

$$\varepsilon = \varepsilon(T, v) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} d\varepsilon = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right|_v dT + \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right|_T dv \\ d\varepsilon = c_v dT + \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right|_T dv \end{cases} \quad (*)$$

da equação de Gibbs:  $T ds = d\varepsilon + p dv$  ou  $d\varepsilon = T ds - p dv$

diferenciando com relação à  $v$ , mantido  $T = \text{const.}$ , temos:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right|_T = T \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T - p$$

das relações de Maxwell:  $\left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v$

então:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v - p$$

e:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right|_T dv = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v dv - p dv$$

combinando a expressão acima com a equação (\*) :

$$d\varepsilon = c_v dT + T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v dv - p dv$$

ou:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \frac{Dv}{Dt} - p \frac{Dv}{Dt}$$

substituindo na equação da energia:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + \rho T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \frac{Dv}{Dt} - \rho p \frac{Dv}{Dt} = \text{div} (k \vec{\nabla} T) - p \text{div} \vec{u} + \phi + \rho Q$$

mas, da equação da continuidade:  $\text{div} \vec{u} = \rho \frac{Dv}{Dt}$ . Logo:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + \rho T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \frac{Dv}{Dt} - \rho p \frac{Dv}{Dt} = \text{div} (k \vec{\nabla} T) - \rho p \frac{Dv}{Dt} + \phi + \rho Q$$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \text{div} (k \vec{\nabla} T) - \rho T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \frac{Dv}{Dt} + \phi + \rho Q$$

sabemos que:  $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T = -1$

então:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = \frac{-1}{\left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T}$$

mas:

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T \implies \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T = -\mathcal{K} v \quad (\text{fator de compressibilidade isotérmica})$$

e:

$$\beta^* = \frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \implies \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p = \frac{1}{\beta^* v} \quad (\text{coeficiente de expansão volumétrica})$$

então:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = \frac{-1}{\frac{1}{\beta^* v} (-\mathcal{K} v)} = \frac{\beta^*}{\mathcal{K}}$$

a equação da energia fica:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \text{div} \left( k \vec{\nabla} T \right) - \rho \frac{Dv}{Dt} \frac{\beta^*}{\mathcal{K}} T + \phi + \rho Q$$

finalmente:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \text{div} \left( k \vec{\nabla} T \right) - \frac{\beta^* T}{\mathcal{K}} \text{div} \vec{u} + \phi + \rho Q$$

### Exercício:

Deduzir a forma  $c_p$  da equação da energia:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \text{div} \left( k \vec{\nabla} T \right) + \beta^* T \frac{Dp}{Dt} + \phi + \rho Q$$

### Notas:

As equações que descrevemos formam um sistema de 6 equações (1 da continuidade + 3 da equação do momento linear + 1 da energia + 1 da equação de estado) para 6 incógnitas (3 da velocidade + 1 da pressão + 1 da densidade + 1 da temperatura).

Os parâmetros  $\beta$ ,  $\mu$  e  $k$  são conhecidos de dados experimentais, podendo ser constantes ou funções especificadas da temperatura (e/ou da pressão).

Normalmente modelos simplificados de fluidos são introduzidos. Por exemplo, se  $\rho$  é considerado constante as equações de continuidade e momento linear tornam-se mais simples. No entanto, a maior simplificação vem do fato de que a equação da energia fica matematicamente desacoplada das outras equações (se  $\beta$  e  $\mu$  forem constantes).

Desta forma, continuidade e Navier-Stokes fornecem 4 equações para 4 incógnitas ( $\vec{u}$  e  $p$ ) que podem ser determinadas sem referência à equação da energia. Com o campo de velocidade podemos então determinar o campo de temperatura.

As equações de Navier-Stokes são, matematicamente, um conjunto de 3 equações diferenciais parciais elípticas de 2<sup>a</sup> ordem. As condições de contorno apropriadas, fisicamente, requerem a especificação da velocidade em todas as fronteiras. A hipótese do contínuo admite a condição de não deslizamento entre fluido e sólido. Para escoamentos dependentes do tempo, a distribuição espacial de todas as variáveis que apresentem derivadas temporais na equação deve ser especificada em  $t = 0$ . Quando a equação da energia é resolvida, fluxo de calor ou temperatura nas fronteiras são necessários.

Os escoamentos de fluidos incompressíveis podem ser analisados considerando a distribuição de vorticidade em vez da distribuição de velocidade.

## 8.1 Derivação da Equação da Vorticidade

Seja um escoamento de fluido incompressível sem força de corpo:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\text{onde: } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad \text{viscosidade cinemática}$$

$$\text{usando: } \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{u} \cdot \vec{u}| - \vec{u} \times \vec{w}$$

temos:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{u} \cdot \vec{u}| - \vec{u} \times \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{w} = -\vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

tomando o rotacional da equação acima (e lembrando que o rotacional do gradiente é igual a zero), obtemos:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = \nu \vec{\nabla} \times \nabla^2 \vec{u}$$

desenvolvendo o termo  $\vec{\nabla} \times \nabla^2 \vec{u}$  obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \nabla^2 \vec{u} &= \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \left( \hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \hat{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_m \hat{e}_m \right) = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_k} \hat{e}_m \right) \\ &= \epsilon_{rim} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_k} \hat{e}_r \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left[ \underbrace{\epsilon_{rim} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}}_{= \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{w}} \hat{e}_r \right] \\ &= \nabla^2 \vec{w} \end{aligned}$$

e, agora, o termo:  $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{w})$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{w}) &= \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times (\hat{e}_j u_j \times \hat{e}_k w_k) = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times (\epsilon_{rjk} u_j w_k \hat{e}_r) \\
 &= \epsilon_{mir} \epsilon_{rjk} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j w_k) \hat{e}_m = [\delta_{mj} \delta_{ik} - \delta_{mk} \delta_{ij}] \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j w_k) \hat{e}_m \\
 &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (u_m w_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j w_m) \right] \hat{e}_m \\
 &= \left[ \underbrace{u_m \frac{\partial w_k}{\partial x_k} + w_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k}}_{= \vec{u} \operatorname{div} \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}} - \underbrace{w_m \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial w_m}{\partial x_j}}_{= \vec{w} \operatorname{div} \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{w}} \right] \hat{e}_m \\
 &= \underbrace{\vec{u} \operatorname{div} \vec{w}}_{= 0 \text{ (div rot } \vec{u})} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \underbrace{\vec{w} \operatorname{div} \vec{u}}_{= 0 \text{ (incompressível)}} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{w}
 \end{aligned}$$

a equação fica:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{w}$$

mas:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} = \frac{D\vec{w}}{Dt}$$

finalmente, a equação da vorticidade pode ser expressa por<sup>1</sup>:

$$\underbrace{\frac{D\vec{w}}{Dt}}_A = \underbrace{\vec{w} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}}_B + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{w}}_C$$

onde:

A  $\Rightarrow$  *convecção de vorticidade*

B  $\Rightarrow$  *elongação de vórtices*

C  $\Rightarrow$  *difusão de vorticidade*

Notar que, para escoamento 2D, o vetor  $\vec{w}$  só tem componente *fora do plano* de escoamento. Assim,  $\vec{w} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{0}$ . Então:

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{w}$$

<sup>1</sup> A vantagem de se utilizar a equação da vorticidade é que a pressão é eliminada.

---

## Capítulo 9

# Modelos para Escoamentos Reais

Ao se considerar situações reais, diversos modelos podem ser adotados para simplificar as equações que governam o movimento do fluido.

### (1) Restrições quanto ao movimento do fluido:

- *isocórico*  $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- *irrotacional*  $\Rightarrow \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$
- *barotrópico*  $\Rightarrow p = p(\rho)$
- *axissimétrico*
- ...

### (2) Simplificações das equações do movimento:

- *escoamentos em regime permanente*  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- *escoamentos a baixas velocidades*  $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \approx \vec{0}$   
(neste caso, a equação de Navier-Stokes se torna linear)
- *escoamentos na camada limite*
- ...

### (3) Simplificação quanto ao fluido:

- *incompressível*  $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- *fluido perfeito*  $\Rightarrow \mu = 0 \implies \bar{T} = -p \bar{I}$
- *gás ideal*  $\Rightarrow p = \rho R T$
- ...

## 9.1 Fluido Perfeito

São fluidos que escoam sem efeitos de viscosidade ou de condução de calor (ou quando esses efeitos são desprezíveis em relação a outros).

Com  $\mu = 0$ ,  $k = 0$  e  $\beta = 0$ , as equações de conservação ficam:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \Rightarrow \text{continuidade}$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p \Rightarrow \text{equação de Euler}$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \Rightarrow \text{entropia constante seguindo o movimento (isoentrópico)}$$

$$F(p, \rho, T) = 0 \Rightarrow \text{equação de estado}$$

As condições de contorno para o escoamento de um fluido perfeito devem ser alteradas para:

$$\hat{n} \cdot \vec{V} = \hat{n} \cdot \vec{V}_{\text{Superfície}} \quad (\text{para superfícies sólidas})$$

A condição  $V_{\text{tangencial}} = 0$  foi abandonada pois a ordem da equação diferencial foi rebaixada com  $\mu = 0$ .

O modelo fluido perfeito é bom para escoamentos reais em regiões onde gradientes de velocidade e temperatura são pequenos. Por exemplo, escoamento fora da camada limite (a teoria de fluido ideal fornece a distribuição de pressão a ser imposta na camada limite).

## 9.2 Escoamentos Barotrópicos de Fluidos Perfeitos

Uma categoria importante de escoamentos de fluidos perfeitos é a dos escoamentos barotrópicos nos quais  $\rho = \rho(p)$  e as forças de corpo são conservativas, ou seja:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{f} = \vec{\nabla} G$$

onde  $G$  é uma função potencial associada às forças de corpo.

Para estes escoamentos, a equação de movimento fica:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \rho \vec{a} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p$$

$$\text{ou:} \quad \vec{a} = \vec{\nabla} G - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

Queremos escrever  $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$  como  $\vec{\nabla}(\mathcal{P})$

Definimos  $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho}$  já que  $\rho = \rho(p)$

logo:

$$d\mathcal{P} = \frac{dp}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{P} = \frac{dp}{\rho}$$

mas:

$$dp = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} p \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{\rho} = d\vec{x} \cdot \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$

ainda:

$$d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{P} = d\vec{x} \cdot \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \quad \text{ou} \quad d\vec{x} \cdot \left( \vec{\nabla} \mathcal{P} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \right) = 0$$

então:

$$\vec{\nabla} \mathcal{P} = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$

A equação fica:

$$\vec{a} = \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} \mathcal{P} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} \right)$$

vemos que, para escoamentos barotrópicos de fluidos perfeitos, o campo de acelerações é conservativo, ou seja:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot grad} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

Escrevendo a equação do movimento:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} \right)$$

usando a identidade:  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{u}}_{\vec{w} \text{ (vorticidade)}}$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times \vec{w} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} \right)$$

portanto, a expressão do escoamento barotrópico de fluido perfeito fica:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{w} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right)$$

Se o escoamento for irrotacional,  $\vec{w} = \vec{0}$ , e existe um potencial tal que  $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$  (foi provado na revisão inicial do curso), então:

$$\vec{\nabla} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right)$$

então:

$$\vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{|\vec{u}|^2}{2} - \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = 0$$

*(Escoamento de Bernoulli)*

esta equação pode ser integrada, obtendo-se:

$$G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{|\vec{u}|^2}{2} - \frac{\partial\phi}{\partial t} = f(t) \quad (\text{função do tempo somente})$$

se a força de corpo é gravitacional:  $\vec{f} = -g\vec{k}$  e  $G = -gz$ , com  $\rho = \text{const.}$ , temos:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = -f(t) = F(t)$$

se o escoamento se dá em regime permanente:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} = \text{constante} \quad (\text{em todo o domínio})$$

A equação para escoamento barotrópico de fluido perfeito pode ser integrada sem que seja imposta a condição de irrotacionalidade:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{w} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right)$$

defina  $\hat{s} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$  (um vetor unitário ao longo de uma linha de corrente):

mas  $\vec{u}$  é perpendicular à  $\vec{u} \times \vec{w}$ , então  $\hat{s} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = 0$ . Então, temos:

$$\hat{s} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \hat{s} \cdot \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right)$$

mas, usando a relação  $\frac{d\psi}{ds} = \vec{\nabla}\psi \cdot \hat{s}$  (definição de gradiente) e considerando um escoamento em regime permanente (ou seja,  $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = 0$ ) podemos escrever:

$$G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{|\vec{u}|^2}{2} = \text{constante ao longo de uma linha de corrente}$$

### 9.3 Escoamentos Potenciais

Vimos que, para escoamento barotrópico, irrotacional, isocórico de um fluido perfeito, a velocidade é dada por:

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$$

onde  $\phi$  é o potencial de velocidade.

A equação da continuidade fornece:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi = 0$$

ou seja, o potencial de velocidade satisfaz a equação de *Laplace*. Assim, qualquer solução para esta equação representa uma solução para um escoamento em regime permanente, incompressível e irrotacional.

Portanto, nosso problema se resume à resolução de:

$$\nabla^2\phi = 0$$

com as condições de contorno:

$$\begin{array}{l}
 \text{– velocidade conhecida “ao longe”} \\
 \text{– velocidade nula nas superfícies sólidas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \partial\phi/\partial x \\
 \partial\phi/\partial y \\
 \partial\phi/\partial z \\
 \partial\phi/\partial n = 0 \\
 \text{(onde } \hat{n} \text{ é o vetor normal à superfície)}
 \end{array} \right.$$

As vantagens desta alternativa são:

- a equação de Laplace é mais simples de ser resolvida
- é uma equação linear
- pode-se usar a superposição de soluções

Uma vez determinado o campo de velocidades, o campo de pressão é obtido pela equação de Euler (ou pela de Bernoulli).

## 9.4 Escoamentos Potenciais Bi-dimensionais

Nesta sub-categoria de escoamentos potenciais podemos simplificar mais ainda o nosso problema. Na realidade, como será mostrado, não será necessário resolver qualquer equação diferencial. Isto é conseguido através do uso da “teoria de variáveis complexas”.

Para escoamentos 2D, podemos definir a função de corrente como:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \begin{cases} \text{satisfaz automaticamente a equação da continuidade} \\ \psi \text{ é válida para escoamentos 2D, rotacionais ou irrotacionais} \end{cases}$$

Em duas dimensões, a condição de irrotacionalidade,  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$ , se reduz a:

$$\vec{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ou seja:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Obs: a função de corrente satisfaz a equação de Laplace ( $\nabla^2 \psi = 0$ ).

### Propriedades da função de corrente:

- (1) linhas de  $\psi = const$  são linhas de corrente
- (2)  $\psi_2 - \psi_1 =$  vazão volumétrica
- (3)  $\psi = const$  e  $\phi = const$  são ortogonais

Obs: Depois provaremos estes resultados.

## 9.5 Potenciais Complexos e Velocidade Complexa

Os componentes da velocidade podem ser expressos em termos de  $\phi$  e  $\psi$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ou seja,  $\phi$  e  $\psi$  estão relacionados por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

as igualdades acima representam as equações de “Cauchy-Riemann” para as funções  $\phi$  e  $\psi$  (ver, por exemplo, Sokolnikoff, 2<sup>a</sup> ed. pág.540)

Agora, considere o potencial complexo dado por:

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad \text{onde } z = x + iy$$

Se  $F(z)$  é uma função analítica,  $\phi$  e  $\psi$  automaticamente satisfazem às equações de Cauchy-Riemann (a teoria de variáveis complexas garante). Desta forma, para toda função analítica  $F(z)$ , a parte real e imaginária representam potenciais de velocidade e função de corrente, respectivamente.

Este resultado será usado para construir soluções de escoamentos potenciais 2D. O método é descrito a seguir:

- tome uma função  $F(z)$ , analítica
- iguale a parte real a  $\phi$  e a imaginária a  $\psi$
- a teoria de variáveis complexas garante que  $\nabla^2 \phi = 0$  e  $\nabla^2 \psi = 0$ , como desejamos
- o escoamento correspondente pode ser analisado pelas linhas de corrente  $\psi = \text{const.}$
- os componentes da velocidade são obtidos de  $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi$  ou  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  e  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$
- o campo de pressão é obtido da equação de Euler (ou da equação de Bernoulli)

A desvantagem deste método é que ele é inverso, i.e., o problema é primeiro resolvido para depois sabermos a qual problema físico ele corresponde.

As vantagens são:  $\begin{cases} - \text{não resolve a equação de Laplace} \\ - \text{usa uma teoria já desenvolvida de variáveis complexas} \end{cases}$

### Velocidade Complexa

Considere a função  $W(z)$  dada por:

$$W(z) = \frac{dF}{dz}, \quad z = x + iy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

ou também:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dF}{dz} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dF}{dz} = -i \frac{\partial F}{\partial y}$$

logo:

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - i v$$

$$W(z) = u - i v = \frac{dF}{dz}$$

(esta equação é uma boa alternativa para  $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi$  no cálculo da velocidade)

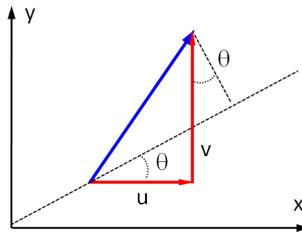
também:

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = -i \frac{\partial F}{\partial y} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - i v$$

$W(z)$  é denominada velocidade complexa.

Note que:<sup>1</sup>  $W \bar{W} = (u - i v)(u + i v) = u^2 + v^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

### Expressão para a Velocidade Complexa em Coordenadas Cilíndricas



da figura: 
$$\begin{cases} u = u_r \cos(\theta) - u_\theta \sin(\theta) \\ v = u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta) \end{cases}$$

substituindo em  $W(z) = \frac{dF}{dz} = u - i v$ , temos:

$$\begin{aligned} W &= [u_r \cos(\theta) - u_\theta \sin(\theta)] - i [u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta)] \\ &= u_r [\cos(\theta) - i \sin(\theta)] - i u_\theta [\cos(\theta) - i \sin(\theta)] \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $\bar{W}$  é o conjugado complexo de  $W$ , ou seja, se:  $W = u - i v \implies \bar{W} = u + i v$ .

ou seja:

$$W = (u_r - i u_\theta) e^{-i\theta} \quad \text{usando } e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

Vamos voltar e demonstrar as propriedades da função de corrente:

(1) linhas de  $\psi = \text{const}$  são linhas de corrente do escoamento:

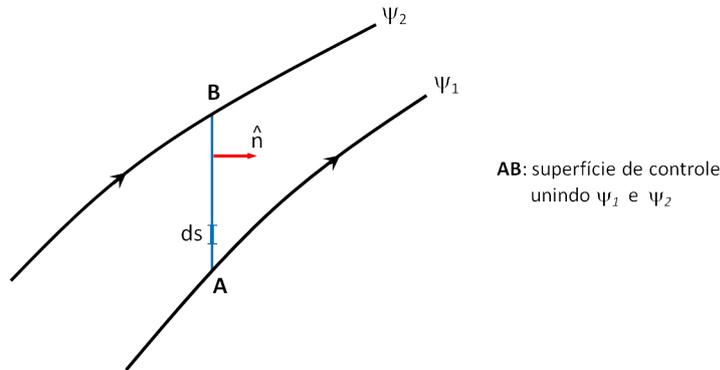
$$\psi = \psi(x, y) \quad d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy$$

a linha de  $\psi = \text{const}$  é dada por:

$$d\psi = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

logo:  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = \frac{v}{u}$ , que é a própria definição de linha de corrente.

(2) A diferença  $\psi_2 - \psi_1$  entre duas linhas de corrente fornece a vazão que escoava entre estas linhas.



a vazão de fluido entre as linhas  $\psi_1$  e  $\psi_2$  é:

$$Q = \int_A^B \vec{u} \cdot \hat{n} ds \quad \text{onde } \hat{n} = \frac{dy}{ds} \hat{i} - \frac{dx}{ds} \hat{j}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} Q &= \int_A^B (u \hat{i} + v \hat{j}) \cdot (dy \hat{i} - dx \hat{j}) = \int_A^B u dy - \int_A^B v dx \\ &= \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A = \psi_2 - \psi_1 \end{aligned}$$

(3) As linhas de corrente  $\psi = \text{const}$  são normais às linhas equipotenciais  $\phi = \text{const}$ .

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

a linha de  $\phi = \text{const}$  é dada por:

$$0 = u dx + v dy \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi} = -\frac{u}{v} = \frac{-1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi}}$$

então:  $\phi \perp \psi$

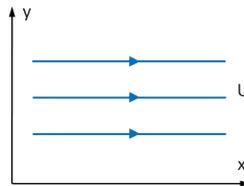
## Escoamentos Representados por Funções Analíticas Simples

### Escoamento Uniforme

Considere  $F(z) = Uz$  onde  $U$  é uma constante real:

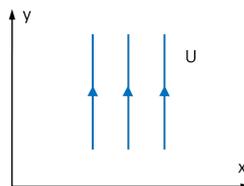
$$W(z) = u - iv = \frac{dF}{dz} = U \quad \text{então:} \quad \begin{cases} u = U \\ v = 0 \end{cases}$$

o escoamento é da forma:



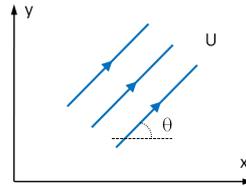
Considere agora  $F(z) = -iUz$  (o sinal negativo é para fazer a velocidade positiva quando  $U > 0$ ):

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = -iU \quad \text{então:} \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = U \end{cases}$$



Considere  $F(z) = U e^{-i\theta} z$  onde  $U$  e  $\theta$  são números reais:

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = U e^{-i\theta} = U [\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)] \quad \text{então: } \begin{cases} u = U \cos(\theta) \\ v = U \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$



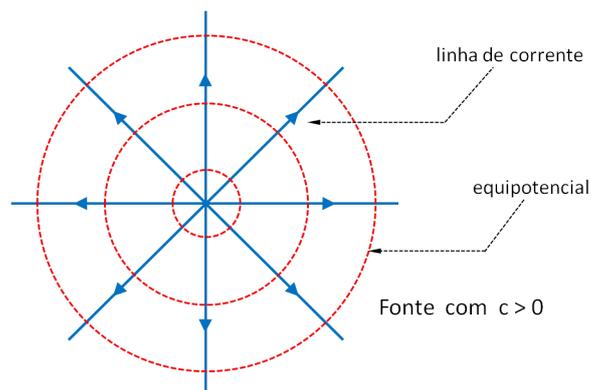
### Fontes, Sumidouros e Vórtices

Considere o potencial complexo  $F(z) = c \ln(z)$ , para  $c$  real:

$$z = x + iy = r e^{i\theta} \quad (\text{considere somente a parte principal } 0 < \theta < 2\pi)$$

$$F(z) = c \ln(r) e^{i\theta} = c \ln(r) + ic\theta \quad \text{então: } \phi = c \ln(r) \quad \text{e} \quad \psi = c\theta$$

ou seja, as equipotenciais são círculos ( $r = \text{const.}$ ) e as linhas de corrente são raios ( $\theta = \text{const.}$ )



A velocidade pode ser calculada como:

$$\frac{dF}{dz} = W(z) = \frac{c}{z} = \frac{c}{r} e^{-i\theta}$$

comparando com  $W = (u_r - i u_\theta) e^{-i\theta}$ , temos:

$$u_r = \frac{c}{r} \quad e \quad u_\theta = 0$$

*Obs: a magnitude cai com o raio. A origem é um ponto singular.*

O volume cruzando cada círculo é constante, ou seja:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\text{volume saindo da fonte}}{(\text{unid. de tempo}) \times (\text{unid. de profundidade})} \\ &= \int_0^{2\pi} u_r r d\theta = \int_0^{2\pi} c d\theta = 2\pi c \end{aligned}$$

substituindo  $c = \frac{m}{2\pi}$ , temos o potencial para uma fonte de intensidade  $m$ :

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z)$$

para uma singularidade localizada no ponto  $z = z_0$ :

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

*Obs: Para um sumidouro, basta fazer  $m \leftarrow -m$ .*

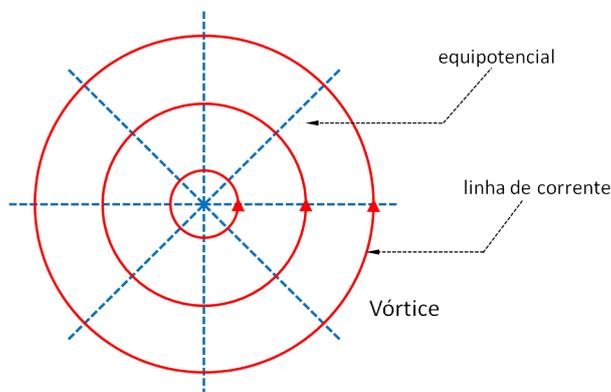
Fazendo-se a constante no potencial ser imaginária:

$$F(z) = -i c \ln(z) \quad (\text{o sinal negativo é apenas por conveniência})$$

$$F(z) = -i c \ln(r e^{i\theta}) = c\theta - i c \ln(r)$$

então:

$$\phi = c\theta \quad e \quad \psi = -c \ln(r)$$



O campo de velocidade é calculado por:

$$W(z) = -i \frac{c}{z} = -i \frac{c}{r} e^{-i\theta}$$

comparando com  $W = (u_r - i u_\theta) e^{-i\theta}$  vemos que:

$$u_r = 0 \quad e \quad u_\theta = \frac{c}{r}$$

Obs: a direção do escoamento é positiva para  $c > 0$ .

O vórtice é caracterizado por sua intensidade, medida pela circulação  $\Gamma$ , ou seja:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta = \int_0^{2\pi} c d\theta = 2\pi c$$

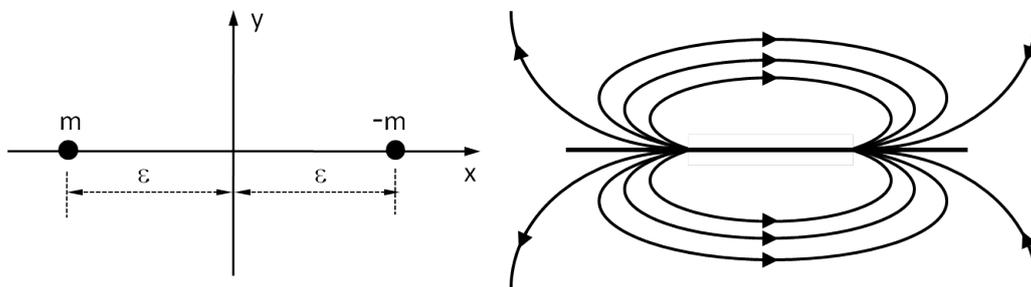
usando:  $c = \frac{\Gamma}{2\pi}$  teremos o potencial para um vórtice de circulação  $\Gamma$  :

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

Neste escoamento, denominado vórtice livre, a circulação e vorticidade estão concentradas em  $z = z_0$ . A circulação ao longo de qualquer contorno que não inclua o ponto de singularidade  $z = z_0$  será zero, portanto, o escoamento é irrotacional.

### Combinação Fonte-Sumidouro (Dipolo)

Considere fonte e sumidouro separados pela distância  $2\epsilon$  :



o potencial complexo é dado por:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{m}{2\pi} \ln(z + \epsilon) - \frac{m}{2\pi} \ln(z - \epsilon) \\ &= \frac{m}{2\pi} \ln\left(\frac{z + \epsilon}{z - \epsilon}\right) = \frac{m}{2\pi} \ln\frac{1 + \epsilon/z}{1 - \epsilon/z} \end{aligned}$$

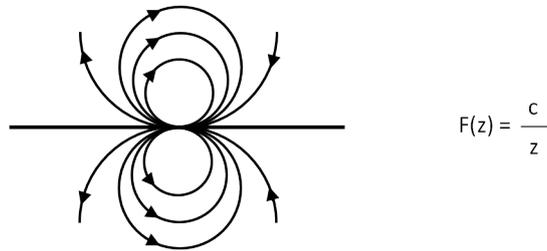
fazendo  $\epsilon$  pequeno, teremos o *dipolo*. Se  $\epsilon$  é pequeno, podemos escrever:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

logo:

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \left[ 2 \frac{\epsilon}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{z^2}\right) \right]$$

fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  e, ao mesmo tempo  $m \rightarrow \infty$ , de modo que  $\lim(m\epsilon) = c$  (onde  $c = \text{const.}$ ). O potencial complexo para o dipolo fica:



O potencial é formado por fonte e sumidouro de intensidades muito fortes, localizadas na mesma posição.

A velocidade é obtida por:

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = -\frac{c}{z^2} = -\frac{c}{r^2} e^{-2i\theta} = -\frac{c}{r^2} [\cos(\theta) - i \sin(\theta)] e^{-i\theta}$$

comparando:

$$u_r = -\frac{c}{r^2} \cos(\theta) \quad e \quad u_\theta = -\frac{c}{r^2} \sin(\theta)$$

*Obs: o dipolo é usado na superposição de escoamentos mais complexos.*

### Escoamento em torno de um Cilindro Circular

Podemos usar o princípio da superposição (a equação é linear):

$$F(z) = Uz + \frac{c}{z}, \quad \text{onde: } \begin{cases} Uz \Rightarrow \text{escoamento uniforme} \\ \frac{c}{z} \Rightarrow \text{dipolo} \end{cases}$$

Para um determinado  $r = a$ , com  $a = \text{const.}$ , temos:

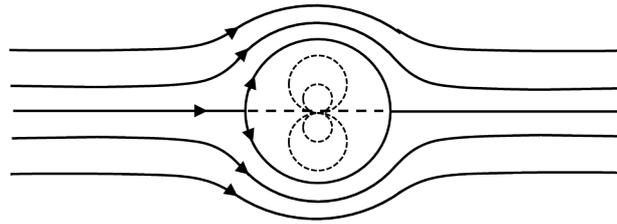
$$\begin{aligned} F(z) &= Ua e^{i\theta} + \frac{c}{a e^{i\theta}} = Ua [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] + \frac{c}{a} [\cos(\theta) - i \sin(\theta)] \\ &= \left( Ua + \frac{c}{a} \right) \cos(\theta) + i \left( Ua - \frac{c}{a} \right) \sin(\theta) \end{aligned}$$

então:

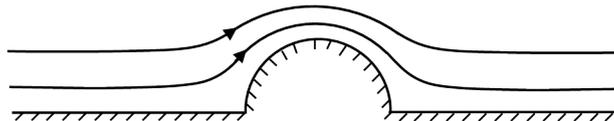
$$\phi = \left( U a + \frac{c}{a} \right) \cos(\theta) \quad e \quad \psi = \left( U a - \frac{c}{a} \right) \sin(\theta)$$

Para  $c = U a^2$  e  $\psi = 0$ , conseqüentemente,  $\psi = const.$  ao longo da reta  $r = a$ . Desta forma,  $r = a$  é uma linha de corrente.

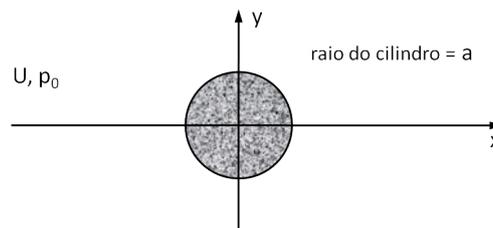
O potencial complexo fica sendo:  $F(z) = U z + \frac{U a^2}{z}$



Também representa:



**Exemplo:** Calcular a partir do campo de velocidade e da equação de Bernoulli a força horizontal que atua na parte frontal do cilindro indicado abaixo ( $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ). Considerar regime permanente.



Solução:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{dF(z)}{dz} = U - \frac{U a^2}{z^2} = U - \frac{U a^2}{r^2} e^{-2i\theta} \\ &= \left( U e^{i\theta} - \frac{U a^2}{r^2} e^{-i\theta} \right) e^{-i\theta} \\ &= \left\{ \left[ U \cos(\theta) - \frac{U a^2}{r^2} \cos(\theta) \right] + i \left[ U \sin(\theta) + \frac{U a^2}{r^2} \sin(\theta) \right] \right\} e^{-i\theta} \end{aligned}$$

temos então:

$$u_r = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos(\theta) \quad e \quad u_\theta = -U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin(\theta)$$

na superfície do cilindro:  $u_r = 0$  e  $u_\theta = -2U \text{sen}(\theta)$

Equação de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi - G = F(t)$$

no nosso caso:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

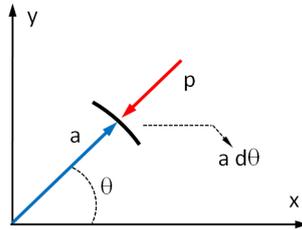
ou:

$$p - p_0 = \frac{\rho U^2}{2} - \frac{4\rho U^2 \text{sen}^2(\theta)}{2} = \frac{\rho U^2}{2} [1 - 4 \text{sen}^2(\theta)]$$

então, a distribuição de pressões na superfície do cilindro é expressa como:

$$p - p_0 = \frac{\rho U^2}{2} [1 - 4 \text{sen}^2(\theta)]$$

Com a distribuição de pressões pode-se determinar a força na direção  $x$  :



O componente horizontal da força,  $F_x$ , é dada por:

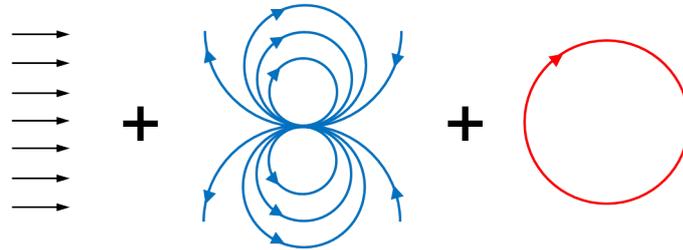
$$\begin{aligned} F_x &= - \int p dA \cos(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{assumindo que a pressão atrás do} \\ \text{cilindro seja constante e igual a } p_0 \end{array} \right. \\ &= - \int \left\{ p_0 + \frac{\rho U^2}{2} [1 - 4 \text{sen}^2(\theta)] \right\} a \cos(\theta) d\theta - 2 a p_0 \\ &= - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} p_0 a \cos(\theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\rho U^2 a}{2} [4 \text{sen}^2(\theta) - 1] \cos(\theta) d\theta - 2 a p_0 \\ &= 2 a p_0 + \frac{\rho U^2 a}{2} \left[ \frac{4}{3} \text{sen}^3(\theta) - \text{sen}^2(\theta) \right] \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - 2 a p_0 \\ &= \frac{\rho U^2 a}{2} \left( -\frac{4}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 1 \right) = -\frac{\rho U^2 a}{3} \end{aligned}$$

(o sinal negativo indica que a força é da direita para a esquerda)

A força total que atua no cilindro (integração de  $0$  a  $2\pi$ ) na direção  $x$  é nula. Este é o chamado “*paradoxo de d’Alambert*”. A ausência desta força de arraste, deve-se ao fato de termos desprezado os efeitos viscosos.

### Escoamento em torno de um Cilindro com Circulação

Combine:



Potencial complexo: escoamento em torno do cilindro + vórtice:

$$F(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) + c$$

A constante  $c$  foi adicionada para que, em  $r = a$ ,  $\psi$  continue igual a zero, como no caso do cilindro sem rotação. A velocidade é a derivada de  $F$ , portanto, a constante  $c$  não afetará a velocidade.

Para determinar  $c$  de forma que  $\psi = 0$  em  $r = a$ , faz-se:

$$\begin{aligned} F(z) &= U (a e^{i\theta} + a e^{-i\theta}) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(a e^{i\theta}) + c \\ &= U a [\cos(\theta) + i \sin(\theta) + \cos(\theta) - i \sin(\theta)] + i \frac{\Gamma}{2\pi} [\ln(a) + i\theta] + c \\ &= 2U a \cos(\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(a) + c \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} \phi &= 2U a \cos(\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad e \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(a) - i c = 0 \\ \implies c &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(a) \end{aligned}$$

assim:

$$F(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{z}{a}\right)$$

**Exercício:** Determinar os componentes  $u_r$  e  $u_\theta$  do escoamento em torno de um cilindro com circulação:

$$\begin{cases} u_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos(\theta) \\ u_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin(\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

Na superfície do cilindro,  $r = a$  :

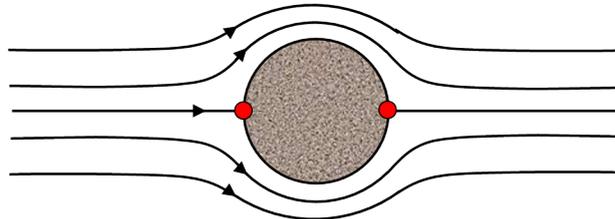
$$u_r = 0 \quad e \quad u_\theta = -2U \sin(\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

O ponto de estagnação é aquele onde a velocidade é nula, ou seja:

$$\sin(\theta_{est}) = -\frac{\Gamma}{4\pi U a}$$

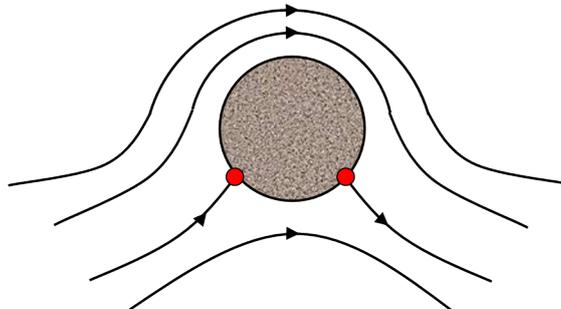
Para  $\Gamma = 0$ ,  $\sin(\theta_{est}) = 0 \implies \theta_{est} = 0$  (ou  $\pi$ )

Esta é a situação do cilindro sem rotação:

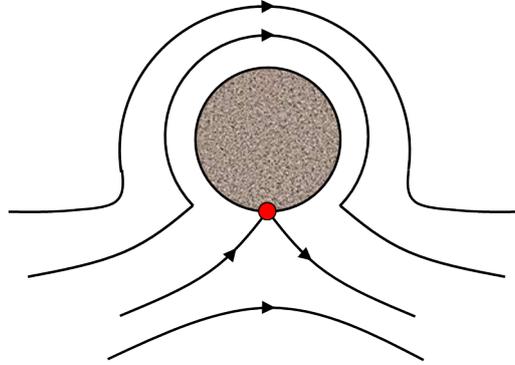


Para  $\Gamma \neq 0$ , vemos que  $\theta_{est}$  depende de  $\Gamma$ .

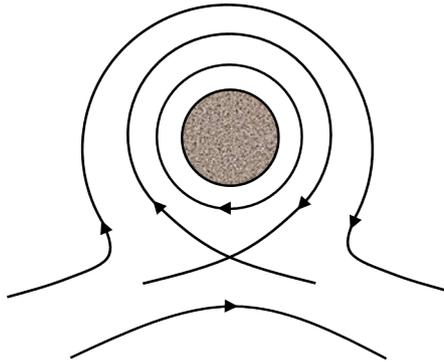
Considere  $0 < \frac{\Gamma}{4\pi U a} < 1$ . Neste caso, os pontos de estagnação ficam no terceiro e quarto quadrantes:



Para  $\frac{\Gamma}{4\pi U a} = 1$  temos  $\sin(\theta_{est}) = -1$  ou  $\theta_{est} = \frac{3\pi}{2}$ .



Para  $\frac{\Gamma}{4\pi U a} > 1$  não há solução para  $\sin(\theta_{est}) > 1$ . Portanto, não há ponto de estagnação na superfície do cilindro. O ponto de estagnação se localiza no fluido.



#### Notas:

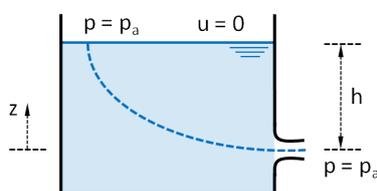
1. o escoamento é simétrico com relação à  $y$ , então a força de arraste é *nula*.
2. o escoamento não é simétrico com relação à  $x$ , portanto, há uma força vertical.
3. usando-se transformações de coordenadas, pode-se resolver o escoamento potencial em torno de aerofólios.

## 9.6 Solução de Alguns Problemas Clássicos

### Fórmula de Torriceli

Equação de Bernoulli com  $G = -gz$  e  $\rho = const.$

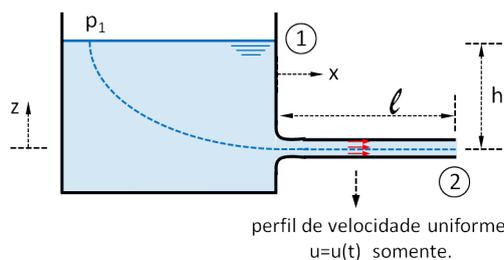
$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = F(t)$$



Para regime permanente, o escoamento ao longo de uma linha de corrente:

$$gh + \frac{p_a}{\rho} + 0 = \frac{p_a}{\rho} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \implies u = \sqrt{2gh}$$

### Início do Escoamento



$$u = u(t) = ? \quad \vec{u} = \vec{\nabla}\phi$$

$$gh + \frac{p_1}{\rho} + 0 + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = 0 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial\phi_2}{\partial t}$$

$$\frac{u^2}{2} = \frac{\partial\phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + gh$$

$$\frac{u^2}{2} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 - \phi_2) + gh$$

Como avaliar  $\frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 - \phi_2) ?$

A velocidade ao longo de uma linha de corrente é  $v_s = \vec{v} \cdot \hat{s}$ . Mas  $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ . Então:

$$v_s = \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{s} \quad \text{mas, da definição de gradiente:}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{s}, \quad \text{então:} \quad d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{s} \quad \implies \quad d\phi = \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

então:

$$\phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 d\phi = \int_1^2 \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

podemos assumir que  $\vec{u} = \vec{0}$  até a entrada do tubo. Então:

$$\phi_2 - \phi_1 = u \ell$$

assim:

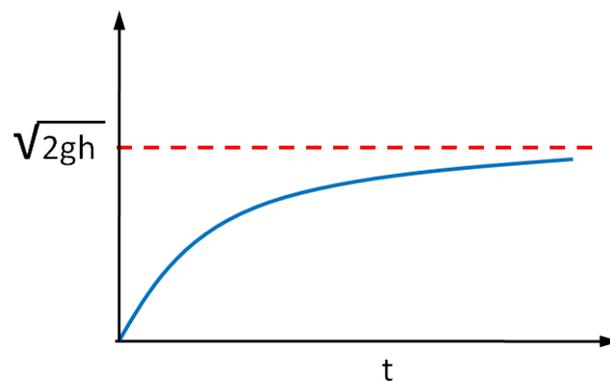
$$\frac{u^2}{2} = -\frac{\partial}{\partial t} (u \ell) + g h = -\ell \frac{\partial u}{\partial t} + g h = -\ell \frac{du}{dt} + g h$$

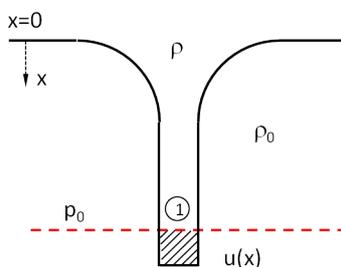
ou seja:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2gh - u^2}{2\ell} \quad \implies \quad \frac{du}{2gh - u^2} = \frac{dt}{2\ell}$$

**Solução:**

$$\frac{u(t)}{\sqrt{2gh}} = \tanh\left(\frac{t}{2\ell} \sqrt{2gh}\right)$$



**Jato de Fluido mais Denso em Fluido menos Denso**

aplicando a equação de Bernoulli para a posição  $x$  (ponto “1”), dentro do jato:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - g x = c_1$$

(o sinal negativo é devido ao sistema de coordenadas escolhido)

ou seja:

$$p + \frac{\rho u^2}{2} - \rho g x = \rho c_1$$

em um ponto à mesma profundidade que o ponto “1”, porém fora do jato:

$$\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2} - g x = c_2 \quad \text{então:} \quad p_0 - \rho_0 g x = \rho_0 c_2$$

mas  $p_0 = p$  na mesma posição  $x$ , então:

$$\rho_0 c_2 + \rho_0 g x + \frac{\rho u^2}{2} - \rho g x = \rho c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho u^2}{2} - (\rho - \rho_0) g x = c_3$$

aplicando esta equação em um ponto  $x$ , bem próximo do começo do jato de tal forma que  $u_1 \approx 0$ , temos:

$$c_3 = -(\rho - \rho_0) g x_1, \quad \text{então:}$$

$$\frac{\rho u^2}{2} - (\rho - \rho_0) g x = -(\rho - \rho_0) g x_1$$

ou:

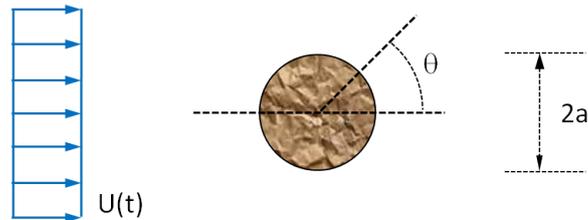
$$\frac{\rho u^2}{2} - (\rho - \rho_0) g (x - x_1) = 0$$

mas, para grandes valores de  $x$ , temos que  $x - x_1 \approx x$ , então:

$$u = \sqrt{\frac{2 g (\rho - \rho_0) x}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad (\text{fórmula de Torriceli modificada})$$

### Massa Aparente

Considere um cilindro imerso em um fluido com velocidade  $U(t)$ . Calcule, para escoamento sem viscosidade, a força sobre o cilindro.



Escoamento potencial:

$$F(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z}$$

$$\phi = Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos(\theta)$$

$$\psi = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin(\theta)$$

Obs: em  $r = a \Rightarrow \phi = 2Ua \cos(\theta)$  e:

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin(\theta) = -2U \sin(\theta) \end{cases}$$

Pressão ao longo da superfície do cilindro:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(t)$$

mas:  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 2a \frac{dU}{dt} \cos(\theta)$  e  $|\vec{u}|^2 = 4U^2 \sin^2(\theta)$ . Logo:

$$p = \rho \left[ F(t) - 2U^2 \sin^2(\theta) - 2a \frac{dU}{dt} \cos(\theta) \right]$$

Seja  $F_x$  o componente horizontal da força que atua sobre o cilindro. Então:

$$dF_x = -pa \, d\theta \cos(\theta)$$

consequentemente:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_0^{2\pi} -p a d\theta \cos(\theta) \\
 &= \rho \int_0^{2\pi} \left[ 2 a^2 \frac{dU}{dt} \cos^2(\theta) + 2 U^2 a \sin^2(\theta) \cos(\theta) - F(t) a \cos(\theta) \right] d\theta \\
 &= \rho \left\{ 2 a^2 \frac{dU}{dt} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + 2 U^2 a \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta + \right. \\
 &\quad \left. - F(t) a \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \right\} \\
 &= \rho \left( 2 a^2 \frac{dU}{dt} \pi \right)
 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$F_x = 2 \pi a^2 \rho \frac{dU}{dt} \quad \Longrightarrow \quad M' = 2 \pi a^2 \rho$$

onde  $M'$  é a *massa aparente*. É como se tivéssemos um cilindro de fluido com raio  $r = a \sqrt{2}$  sendo acelerado.

## 9.7 Cinemática da Vorticidade

Um escoamento é dito irrotacional se o vetor vorticidade,  $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ , é nulo em todo o escoamento.

Pelo teorema de Stokes:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \hat{n} dS = 0$$

então, para um escoamento irrotacional, a circulação é zero ao longo de uma curva fechada.

**Relembrando:** vetor vorticidade é numericamente igual a 2 vezes a velocidade angular de rotação de um elemento de fluido em torno do seu próprio eixo. Devemos notar que um elemento de fluido pode percorrer uma linha de corrente circular tendo vorticidade igual a zero. Vorticidade é proporcional à velocidade angular de rotação do elemento de fluido em torno do seu eixo principal (e não em torno de um eixo passando por um ponto).

De maneira análoga às linhas de corrente e aos tubos de corrente, podemos definir linhas de vorticidade e tubos de vorticidade:

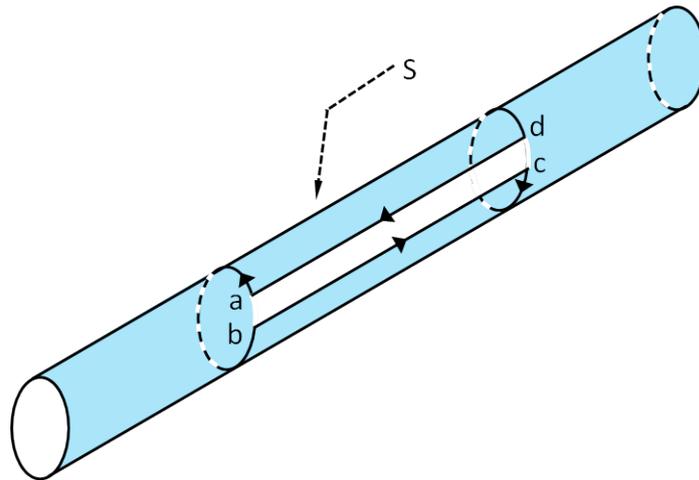
*Linha de Vorticidade:* são linhas paralelas ao vetor vorticidade em qualquer ponto, i.e.:  
 $\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{w}$

*Tubo de Vorticidade:* é um tubo cuja superfície longitudinal é formada por linhas de vorticidade. Então, não há fluxo de vorticidade através da superfície de um tubo de vorticidade:  $\vec{w} \cdot \hat{n} = 0$ . Um tubo de vorticidade com área de seção reta infinitesimal é chamado de *filamento de vorticidade*.

Note-se que  $\text{div } \vec{w} = 0$  sempre. Isto significa que não podem existir nem fontes e nem sumidouros de vorticidade no fluido. Isto é, linhas de vorticidade devem formar “loops” fechados ou terminar nas fronteiras do fluido (ex: anéis de fumaça, vórtice de pia).

A intensidade de um tubo de vorticidade é definida como a circulação em torno de um caminho que inclua o tubo de vorticidade.

Vamos provar que a circulação em torno de um tubo de vorticidade é constante em qualquer seção:



Se não há fluxo de vorticidade através de  $S$ , então:

$$\int_S \vec{w} \cdot d\vec{s} = 0$$

Usando o teorema de Stokes:

$$\Gamma = \oint_{abcda} \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{w} \cdot d\vec{s} = 0$$

tomando uma superfície que inclua a tampa do tubo (área “A”), temos:

$$\Gamma = \int_{A+S+A} \vec{w} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{w} \cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_S \vec{w} \cdot d\vec{s}}_{=0} + \int_A \vec{w} \cdot d\vec{s}$$

então, escrevendo esquematicamente:

$$\Gamma = \int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \quad \text{mas, no limite:} \quad \int_{bc} = - \int_{da}$$

logo:

$$\Gamma = \int_{ab} - \int_{dc} = 0 \quad \implies \quad \int_{ab} = \int_{dc} \quad \text{ou:} \quad \Gamma_{ab} = \Gamma_{dc}$$

ou seja: *a circulação é a mesma !* Isto significa que, se a área da seção reta do tubo de vorticidade aumenta, o valor médio da vorticidade naquela seção deve diminuir.

$$\text{Para o caso uni-dimensional:} \quad w_1 A_1 = w_2 A_2$$

Algumas situações práticas são modeladas por regiões de vorticidade concentrada, tais como: *linhas de vórtices em teoria de asas, camadas de cisalhamento*, dentre outras.

## 9.8 Teorema de Kelvin para Circulação

Vimos que, para escoamentos barotrópicos com forças de corpo conservativas, a aceleração tem um potencial, i.e.:  $\vec{a} = \vec{\nabla}\sigma$ .

**Teorema de Kelvin:** “*para escoamentos barotrópicos de um fluido perfeito com forças de corpo conservativas, a vorticidade de cada partícula fluida será preservada*”

$$\text{Ou seja:} \quad \frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

**Prova:**

$$\text{Sejam:} \quad \vec{a} = \vec{\nabla}\sigma \quad \text{e:} \quad \Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D\Gamma}{Dt} &= \oint_C \left[ \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{x} + \vec{u} \cdot \frac{D}{Dt}(d\vec{x}) \right] \\
&= \oint_C \left[ \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{x} + \vec{u} \cdot d\vec{u} \right] && \text{mas: } d\vec{u} = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} \\
&= \oint_C \left[ \vec{\nabla}\sigma \cdot d\vec{x} + \vec{u} \cdot d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} \right] \\
&= \oint_C \left[ \vec{\nabla}\sigma \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} \right] && \text{mas: } \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u} \times \vec{w} \\
&= \oint_C \left\{ \vec{\nabla}\sigma \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \left[ \frac{\vec{\nabla}|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u} \times \vec{w} \right] \right\} \\
&= \oint_C \left[ \vec{\nabla}\sigma \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \frac{\vec{\nabla}|\vec{u}|^2}{2} - \underbrace{d\vec{x} \cdot \vec{u} \times \vec{w}}_{=0} \right] \\
&= \oint_C \vec{\nabla} \left( \sigma + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \cdot d\vec{x} \\
&= \oint_C d \left( \sigma + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

Usando o teorema de Kelvin pode-se afirmar que:

$$\text{se: } \vec{w}|_{t=0} = \vec{0} \quad \text{então: } \vec{w}|_{t=t} = \vec{0}$$

Pelo teorema de Kelvin:

$$\Gamma_0 = \Gamma_t \implies \oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{S(t)} \vec{w} \cdot \hat{n} dS = 0$$

para todo  $S(t)$ , então  $\vec{w}_t = \vec{0}$

**Nota:** o lado direito da equação correspondente ao teorema de Kelvin foi provado ser zero devido às hipóteses feitas: fluido sem viscosidade, escoamento barotrópico e forças de corpo conservativas. Se uma dessas condições for relaxada, o lado direito poderá ser diferente de zero. Ou seja, a circulação pode ser alterada através da ação da viscosidade, forças de corpo não conservativas ou variações de densidade diferente de  $\rho = \rho(p)$ .

Podemos provar que superfícies de vorticidade são superfícies materiais se  $\vec{a} = \vec{\nabla}\sigma$ .

**Prova:**

Pelo teorema de Kelvin:  $\Gamma(0) = \Gamma(t)$

$$\oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{C(0)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \int_{S(0)} \vec{w} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{usando Stokes})$$

Se  $S(0)$  é uma superfície de vorticidade, tem-se que:  $\vec{w} \cdot \hat{n} = 0$ . Então:

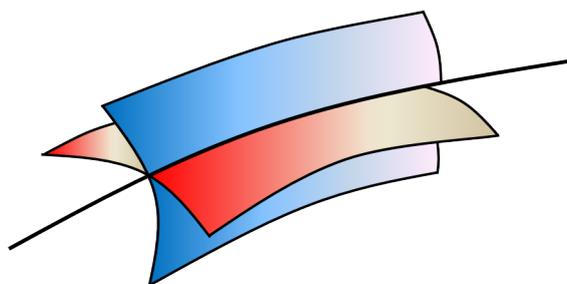
$$\oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \int_{S(0)} \vec{w} \cdot \hat{n} dS = 0$$

mas:

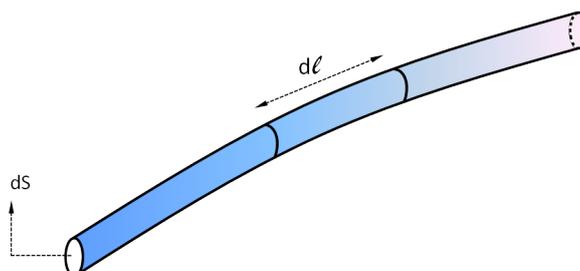
$$\oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \int_{S(t)} \vec{w} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad \text{então: } \vec{w} \cdot \hat{n} = 0$$

ou seja, a superfície  $S(t)$  é ainda uma superfície de vorticidade (se constitui das mesmas partículas). Como exemplo podemos citar um anel de fumaça que mantém as mesmas partículas até que a viscosidade possa dissipá-lo.

Podemos estender esta prova dizendo que linhas de vorticidade são linhas materiais, pois correspondem à interseção entre duas superfícies materiais:



Considere um filamento de vorticidade:



Suponha que  $\vec{a} = \vec{\nabla}\sigma$ .

Usando o teorema de Stokes:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{w} \cdot \hat{n} dS \approx w dS \quad (*)$$

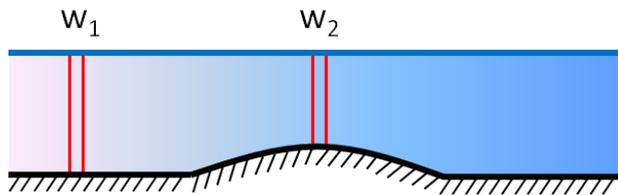
provamos que superfícies de vorticidade são superfícies materiais, então o volume  $dS d\ell$  é um volume material. O produto  $\rho dS d\ell$  também é constante seguindo o movimento.

Aplicando Kelvin em (\*):

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \implies w dS \text{ é constante seguindo o movimento.}$$

mas  $\left(\frac{w dS}{\rho dS d\ell}\right)$  também é constante seguindo o movimento. Então:

$$\left(\frac{w}{\rho d\ell}\right) \text{ é constante seguindo o movimento.}$$



---

# Capítulo 10

## Aplicações

### 10.1 Escoamento Viscoso

Não existem, até o momento, soluções analíticas de caráter geral para a integração das equações de Navier-Stokes. Por esta razão, são normalmente estudados casos limites para viscosidade muito pequena e viscosidade muito elevada. Para estes casos limite as dificuldades matemáticas são atenuadas. O caso de viscosidade moderada **não** pode ser interpolado entre esses limites.

Mesmo os limites de viscosidade alta e baixa apresentam dificuldades consideráveis. Por esta razão, o estudo de escoamentos viscosos tem sido, em grande parte, desenvolvido experimentalmente e, mais recentemente, através de soluções numéricas.

Antes de passarmos à solução das equações, podemos explorar algumas de suas características, através de um processo de adimensionalização das equações. Consideremos, no momento, *fluidos incompressíveis*.

#### Adimensionalização das Equações Básicas

Usaremos as seguintes propriedades de referência para adimensionalizar as equações:

- *comprimento de referência*:  $L$
- *velocidade de referência*:  $U_\infty$  ( $\nu/L$ , no caso de convecção natural)
- outras propriedades:  $p_\infty, T_\infty, \rho_\infty, \mu_\infty, k_\infty, c_{p_\infty}$

As variáveis adimensionais são:

$$x'_i = \frac{x_i}{L}, \quad \vec{u}' = \frac{\vec{u}}{U_\infty}, \quad T' = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad p' = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$$
$$t' = \frac{t U_\infty}{L}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_\infty}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad k' = \frac{k}{k_\infty}, \quad c'_p = \frac{c_p}{c_{p_\infty}}$$

Vamos levar estas variáveis em algumas das principais equações estudadas neste curso:

**(a) Equação de Conservação de Massa**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

temos:

$$\frac{U_\infty \rho_\infty}{L} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{1}{L} \vec{\nabla}' \cdot (\rho_\infty U_\infty \rho' \vec{u}') = 0$$

ou seja:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \cdot (\rho' \vec{u}') = 0$$

então vemos que a equação da continuidade não apresenta parâmetros adimensionais.

**(b) Equação da Quantidade de Movimento Linear**

(considerando fluido incompressível,  $\mu = \text{const}$ )

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

sem perda de generalidade, podemos desprezar o termo  $\rho \vec{g}$ . Este termo pode (mais tarde) ser incorporado à parcela  $-\vec{\nabla} p$ .

assim:

$$\rho_\infty \frac{U_\infty^2 \rho'}{L} \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \rho_\infty \rho' U_\infty^2 \vec{u}' \cdot \frac{1}{L} \vec{\nabla}' \vec{u}' = -\rho_\infty \frac{U_\infty^2}{L} \vec{\nabla}' p' + \frac{\mu_\infty U_\infty}{L^2} \nabla'^2 \vec{u}'$$

$$\rho' \left[ \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' \vec{u}' \right] = -\vec{\nabla}' p' + \frac{\mu_\infty U_\infty L}{L^2 \rho_\infty U_\infty^2} \nabla'^2 \vec{u}'$$

$$\rho' \frac{D \vec{u}'}{Dt} = -\vec{\nabla}' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \vec{u}'$$

o parâmetro  $Re = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}$  é o *número de Reynolds* que pode ser interpretado como uma relação entre forças de inércia e viscosas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{forças de inércia: } \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L} \\ \text{forças viscosas: } \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\mu_\infty U_\infty}{L^2} \end{array} \right\} \implies \frac{\rho_\infty U_\infty^2 L^2}{L \mu_\infty U_\infty} = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} = Re$$

A teoria de modelos diz que escoamentos sobre corpos geometricamente similares terão linhas de corrente similares se  $Re$  for o mesmo.

**(c) Equação da Energia**

(considerando fluido incompressível, sem fontes)

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \phi$$

$$\text{onde } \phi = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2$$

então:

$$\begin{aligned} \rho_\infty \rho' c_{v\infty} c'_v \left[ \frac{U_\infty (T_w - T_\infty)}{L} \frac{\partial T'}{\partial t'} + \frac{U_\infty (T_w - T_\infty)}{L} \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' T' \right] &= \\ \frac{k_\infty (T_w - T_\infty)}{L^2} \vec{\nabla}' \cdot (k' \vec{\nabla}' T') + \frac{\mu_\infty U_\infty^2}{L^2} \phi' & \\ \Rightarrow \left[ \frac{\rho_\infty c_{v\infty} U_\infty (T_w - T_\infty)}{L} \right] \rho' c'_v \frac{DT'}{Dt'} &= \\ \frac{k_\infty (T_w - T_\infty)}{L^2} \vec{\nabla}' \cdot (k' \vec{\nabla}' T') + \frac{\mu_\infty U_\infty^2}{L^2} \phi' & \\ \Rightarrow \rho' c'_v \frac{DT'}{Dt'} &= \frac{1}{Re Pr} \vec{\nabla}' \cdot (k' \vec{\nabla}' T') + \frac{Ec}{Re} \phi' \end{aligned}$$

onde:<sup>1</sup>

$$\begin{cases} E_c = \frac{U_\infty^2}{c_{v\infty} (T_w - T_\infty)} \implies \text{Número de Eckert} \\ P_r = \frac{\mu_\infty c_{v\infty}}{k_\infty} \implies \text{Número de Prandtl} \\ R_e = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} \implies \text{Número de Reynolds} \end{cases}$$

**Nota 1:** as variáveis  $\rho', \mu', k', c'_v = f(p', T')$ , então, quando comparamos fluidos diferentes as relações entre os parâmetros e  $p'$  e  $T'$  devem ser similares, caso contrário os parâmetros  $E_c$ ,  $P_r$  e  $R_e$  não serão suficientes para modelar os resultados. Exemplo:

$$\begin{array}{lll} \text{ar (gás perfeito)} & \mu \approx T^{0.67} & k \approx T^{0.80} \\ \text{vapor d'água} & \mu \approx T^{1.00} & k \approx T^{1.20} \end{array}$$

então, nesse caso, escoamentos com os mesmos  $E_c$ ,  $P_r$  e  $R_e$  darão resultados de transferência de calor bem diferentes.

<sup>1</sup> (a) Número de Ernst R. G. Eckert: expressa a relação entre a energia cinética de um fluido e sua entalpia. (b) Número de Ludwig Prandtl: representa a razão de difusividade de momento de um fluido (viscosidade cinemática) e sua difusividade térmica. (c) A relação  $R_e P_r$  é conhecida como Número de Jean Claude E. Péclet e relaciona a velocidade de advecção de um fluido e sua velocidade de difusão. Fonte: Wikipédia.

**Nota 2:** quando os termos gravitacionais são importantes, aparece um termo do tipo  $\frac{G_r}{R_e^2}$  na equação de Navier-Stokes, onde:<sup>2</sup>

$$G_r = \frac{\rho_\infty^2 g \beta_\infty L^3 (T_w - T_\infty)}{\mu_\infty^2} \implies \text{Número de Grashof}$$

### Condições de Contorno Adimensionais

Assim como as equações, para conhecermos os parâmetros que governam um problema, devemos adimensionalizar as condições de contorno, ou seja:

$$\text{escoamento ao longe} \left\{ \begin{array}{ll} \vec{u} = \vec{u}_\infty & \vec{u}' = 1 \\ p = p_\infty & p' = 0 \\ T = T_w & T' = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{não há parâmetros} \\ \text{adimensionais} \\ \text{adicionais} \end{array}$$

sobre uma superfície sólida parada:

$$\vec{u} = \vec{0} \quad , \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w = q_w$$

assim:

$$\vec{u}' = \vec{0} \quad , \quad T' = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{k_\infty (T_w - T_\infty)}{L} k' \frac{\partial T'}{\partial n'} \Big|_w = q_w$$

onde:<sup>3</sup>

$$k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w = \frac{q_w L}{k_\infty (T_w - T_\infty)} = N_u \quad \implies \text{Número de Nusselt}$$

<sup>2</sup> O número de *Franz Grashof* fornece a relação entre a sustentação de um fluido e sua viscosidade. *Fonte: Wikipédia.*

<sup>3</sup> O número de *Wilhelm Nusselt* representa a razão entre a transferência de calor por convecção e a transferência de calor por condução. *Fonte: Wikipédia.*

No caso de haver *superfícies livres*, 3 novos parâmetros podem surgir:

$$C = \frac{p_a - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} \implies \text{Número de Cavitação}$$

$$F_r = \frac{U_\infty^2}{gL} \implies \text{Número de Froude}$$

$$W = \frac{\rho U_\infty^2 L}{\sigma} \implies \text{Número de Weber}$$

## Soluções Exatas da Equação de Navier-Stokes

### Escoamentos Paralelos

Nestes casos um único componente da velocidade é diferente de zero. Por exemplo, se em um escoamento 3D, temos  $v = w = 0$ , então, da equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{=0} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ ou seja: } u \neq u(x)$$

Desta forma, para o escoamento paralelo:  $u = u(y, z, t)$ ,  $v = 0$  e  $w = 0$ .

Da equação de Navier-Stokes para as direções  $y$  e  $z$  temos:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \implies \text{assim: } p = p(x) \text{ (somente)}$$

A equação para a direção  $x$  fica:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{=0} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

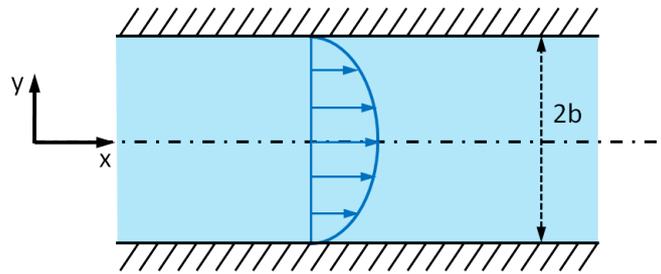
As hipóteses usadas foram:

- escoamento paralelo
- propriedades constantes
- escoamento laminar

**Nota:** na equação acima, a pressão pode ser reescrita para incluir o termo de força de corpo. Assim, se definirmos  $\mathcal{P} = p - \rho g x$ , temos:

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g$$

### Escoamento Paralelo em um Canal



$$\text{hipóteses adicionais: } \left\{ \begin{array}{l} \text{escoamento 1D} \\ \text{regime permanente} \end{array} \right.$$

A equação de Navier-Stokes se torna:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

Usando a condição de não deslizamento:  $u = 0$  em  $y = \pm b$ .

Da equação vemos que  $\frac{dp}{dx} = \text{const.}$ , pois o lado direito é função somente de  $y$  enquanto que  $p = p(x)$  somente.

Integrando:

$$\frac{d}{dy} \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad \implies \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1$$

então:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 y + c_2$$

finalmente:

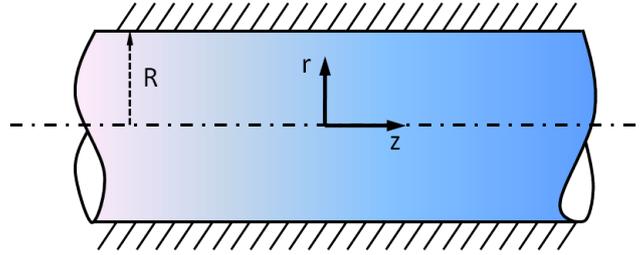
$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2)$$

### Escoamento de Couette

Conforme ilustrado na Figura abaixo, este escoamento pode ser obtido mantendo-se uma placa estacionária enquanto que a outra se move com velocidade constante  $U$  :

$$\text{neste caso: } \left\{ \begin{array}{l} u = 0, \quad \text{para } y = 0 \\ u = U, \quad \text{para } y = H \end{array} \right.$$



**Escoamento de Hagen-Poiseuille**

Usar a equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas:

- direção radial:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r +$$

$$+ \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)$$

- direção circunferencial:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta +$$

$$+ \mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right)$$

- direção axial:

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z +$$

$$+ \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

- continuidade:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

- componentes do tensor das tensões:

$$\sigma_r = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \tau_{r\theta} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\sigma_\theta = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \qquad \tau_{\theta z} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

mas:

- simplificando para o nosso caso:  $\begin{cases} v_r = v_\theta = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$
- redefinindo:  $\begin{cases} v_z \rightarrow u \end{cases}$
- considerando a simetria circular:  $\begin{cases} u = u(r) \end{cases}$

teremos então:

- direção radial:  $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{cases}$
- direção circular:  $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$
- direção axial:  $\begin{cases} \mu \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \\ ou \\ \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) \right] = \frac{dp}{dz} \end{cases}$

Condições de contorno:  $u = 0$  em  $r = R$

A solução da equação é:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + c_1 \ln(r) + c_2$$

Como a velocidade no centro deve ser finita, então  $c_1 = 0$ . Assim:

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2)$$

Podemos calcular a vazão volumétrica total:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\text{área}} u \, dA = 2\pi \int_0^R u r \, dr = -\frac{2\pi}{4\mu} \frac{dp}{dz} \int_0^R (R^2 r - r^3) \, dr \\ &= \frac{\pi R^4}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \end{aligned}$$

Definindo a velocidade média como  $\bar{u} = \frac{Q}{A}$ , temos:

$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) = \frac{1}{2} u_{max}$$

$$\text{onde: } u_{max} = \frac{R^2}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \quad \text{em } r = 0$$

Tensão cisalhante na parede:

$$\tau_w = \tau_{rz} = \mu \left( \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial z}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R} = \frac{1}{2} R \left( -\frac{dp}{dz} \right) = \frac{4\mu\bar{u}}{R}$$

Vemos que  $\tau_w$  é proporcional à velocidade média no escoamento laminar. Para escoamento turbulento,  $\tau_w$  é proporcional ao termo  $\bar{u}^2$  e à massa específica  $\rho$ . Desta forma, é prática comum adimensionalizar  $\tau_w$  com a pressão dinâmica  $\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$ , o que não faz muito sentido para escoamento laminar (apesar deste procedimento ser adotado!).

No estudo prático da resistência ao escoamento em tubos, usa-se o coeficiente de atrito dado pela “*equação de Darcy-Waisbach*”:

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{D} \rho \bar{u}^2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2}$$

usando:

$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{dp}{dz} = \frac{\bar{u} 8\mu}{R^2} = \frac{4\bar{u} 8\mu}{D^2}$$

ou:

$$\frac{32\bar{u}\mu}{D^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{D} \rho \bar{u}^2$$

$$\lambda = \frac{64}{\frac{\rho\bar{u}D}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{64}{Re_D}$$

(este resultado é verificado experimentalmente)

É também definido o “*coeficiente de atrito de Fanning*”:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho\bar{u}^2} = \frac{\lambda}{4}$$

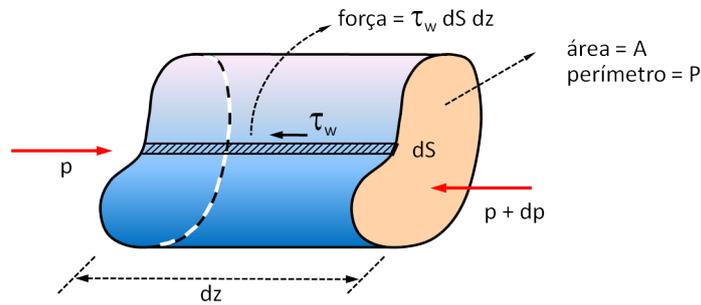
## O Conceito de Diâmetro Hidráulico

A definição do coeficiente de atrito  $\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2}$  não é adequada para dutos de seção não circular, pois  $\tau_w$  varia ao longo do perímetro. Podemos então, definir uma tensão média na parede:

$$\bar{\tau}_w = \frac{1}{P} \int_0^P \tau_w dS$$

onde  $P$  é o perímetro da seção e  $dS$  é um elemento de comprimento.

Fazendo-se um balanço de forças em um elemento de fluido (note que a aceleração é igual a zero pois o escoamento é desenvolvido), temos para uma geometria qualquer:



$$dz \int_0^P \tau_w dS = -A dp$$

usando a definição de tensão média, temos:

$$\bar{\tau}_w = \frac{A}{P} \left( -\frac{dp}{dz} \right)$$

que é uma expressão análoga à expressão para o duto circular, ou seja;

$$\tau_w = \frac{R}{2} \left( -\frac{dp}{dz} \right)$$

onde, neste caso:  $\frac{A}{P} = \frac{R}{2}$ .

Por analogia, para um duto não circular:  $\frac{A}{P} = \frac{R_H}{2}$ , onde  $R_H$  é o raio hidráulico, definido como:

$$R_H = \frac{2A}{P} = \frac{2(\text{área do escoamento})}{\text{perímetro molhado}}$$

Podemos usar  $R_H$  para redefinir o coeficiente de atrito para dutos não circulares, da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{8 \bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}^2} = \frac{4 R_H \left( -\frac{dp}{dz} \right)}{\rho \bar{u}^2}$$

Por razões dimensionais, pode-se escrever:

$$\lambda = \frac{\text{const.}}{R_{e_{DH}}} \quad \text{onde} \quad R_{e_{DH}} = \frac{2 R_H \bar{u}}{\mu}$$

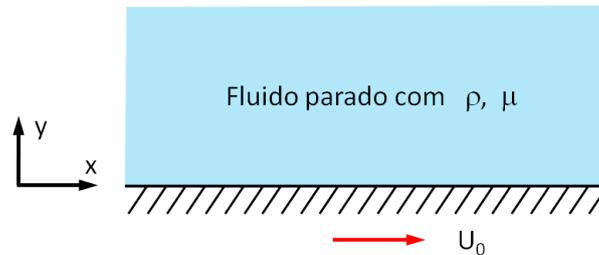
Não se pode garantir que a constante da expressão acima seja igual a 64.

O conceito de diâmetro hidráulico produz resultados dentro de 20% para diferentes geometrias. Já para escoamentos turbulentos, os resultados são bem melhores.

### Placa Plana Infinita Submetida a um Movimento Impulsivo

(Primeiro Problema de Stokes)

Trata-se de um escoamento paralelo transiente:



- condições iniciais e de contorno:

$$t = 0 \implies \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$t > 0 \implies \begin{cases} y = 0 \implies \begin{cases} u = U_0 \\ v = 0 \end{cases} \\ y = \infty \implies \begin{cases} u = 0 \end{cases} \end{cases}$$

- continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} = 0$$

- Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=0} + u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=0} + v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{=0} \right)$$

Podemos concluir que:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{da segunda equação acima})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{pois o fluido ao longe está parado})$$

Então, chegamos a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Obs: esta equação é idêntica à equação de condução de calor que descreve a propagação de calor em um meio semi-infinito, quando em  $t = 0$  a parede  $y = 0$  é aquecida.

A equação diferencial parcial pode ser reduzida à uma equação diferencial ordinária pela substituição (solução similar):

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad e \quad \frac{u}{U_0} = f(\eta)$$

substituindo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_0 f'}{2\sqrt{\nu t}} \quad \text{onde} \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{U_0 f'}{2\sqrt{\nu t}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_0 f''}{2\sqrt{\nu t}} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} = \frac{U_0 f''}{4\nu t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = U_0 f' \left[ \frac{y}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{\nu}{\sqrt{(\nu t)^3}} \right]$$

$$-\frac{U_0 f' y \nu}{4\sqrt{(\nu t)^3}} = \nu \frac{U_0 f''}{4\nu t} \implies -2\eta f' = f''$$

$$f'' + 2\eta f' = 0$$

condições de contorno:

$$y = 0 \implies \eta = 0, \quad f(0) = 1$$

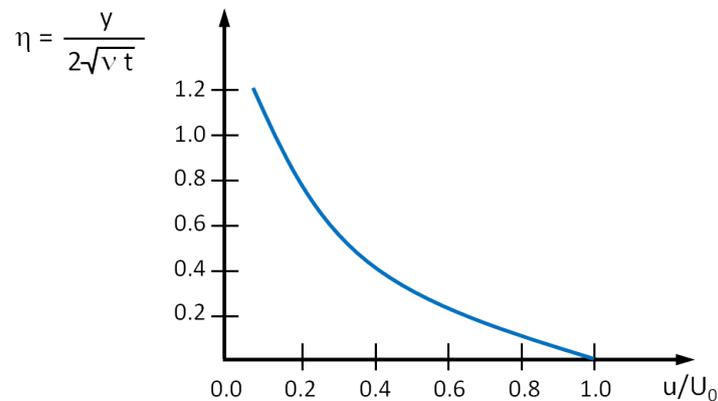
$$y \rightarrow \infty \implies \eta = \infty, \quad f(\infty) = 0$$

Integrando-se a equação acima (considerando-se as condições de contorno), obtém-se:<sup>4</sup>

$$f(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta)$$

$$f(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \quad (\text{função tabelada})$$

<sup>4</sup>“erf” e “erfc” são conhecidas, respectivamente, como “função erro” e “função erro complementar”.



Note que os perfis de velocidade para diversos tempos são similares, i.e., eles podem ser reduzidos a uma única curva por meio de uma mudança de escala.

Uma maneira arbitrária e tradicional de se estimar os efeitos viscosos é calcular a distância  $y = \delta$  onde os efeitos viscosos caíram a 1% dos valores na parede:

$$f(\delta) = \frac{u(\delta)}{U_0} = 0.01 \quad (\text{da tabela obtém-se } \delta \approx 1.32)$$

então, a espessura da camada afetada é:

$$\delta|_{1\%} \approx 3.64 \sqrt{\nu t}$$

Para a água a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\delta|_{1\%} \approx 0.36 \sqrt{t}$ , com  $t \rightarrow \text{segundos}$  e  $\delta \rightarrow \text{cm}$

### Escoamento Próximo a uma Placa Oscilante

(Segundo Problema de Stokes)



- equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

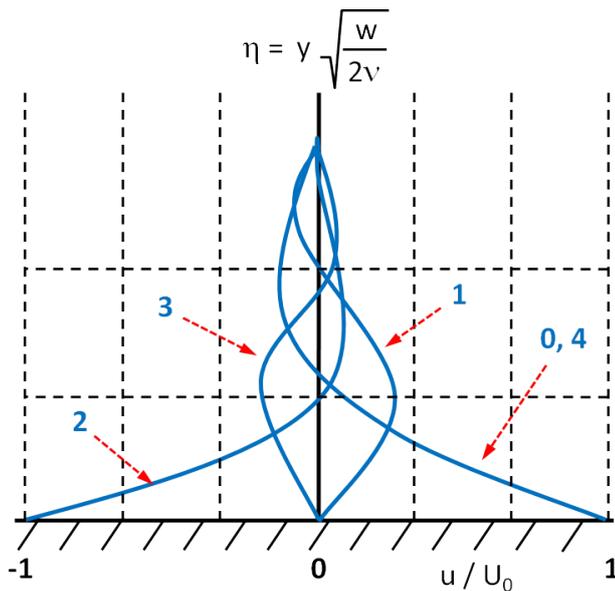
- condições de contorno:

$$y = 0 \implies u(0, t) = U_0 \cos(\omega t)$$

A solução é da forma:

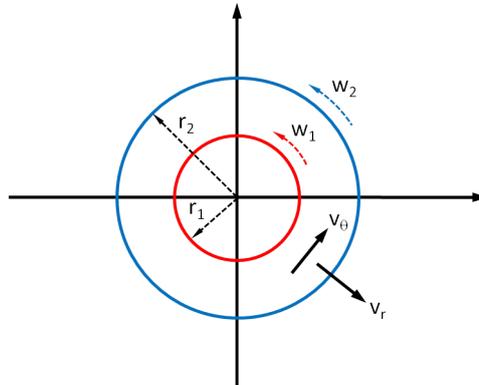
$$u(y, t) = U_0 e^{-y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \cos\left(\omega t - y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)$$

ou seja: uma oscilação harmônica amortecida com amplitude  $U_0 e^{-y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}$ , onde uma camada de fluido a uma distância  $y$  está defasada de  $y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$  em relação à placa.



$\omega t$	curva
0	0
$\pi/2$	1
$\pi$	2
$3\pi/2$	3
$2\pi$	4

### Escoamento entre Dois Cilindros Concêntricos



Notar que:  $v_z = v_r = 0$  e  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

A equação de Navier-Stokes fica:

- direção radial:

$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

- direção circunferencial:

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = 0 \quad (*)$$

- continuidade:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

- condições de contorno:

$$r = r_1 \quad \Longrightarrow \quad u_\theta = w_1 r_1$$

$$r = r_2 \quad \Longrightarrow \quad u_\theta = w_2 r_2$$

A solução da equação (\*), na forma adimensional, é dada por:<sup>5</sup>

$$\frac{v_\theta}{r_1 w_1} = \frac{\frac{r}{r_1}}{\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1} \left[ \left( \frac{w_2 r_2^2}{w_1 r_1^2} - 1 \right) - \frac{r_2^2}{r_1 r} \left( \frac{w_2}{w_1} - 1 \right) \right]$$

<sup>5</sup> Como exercício, obter a expressão de  $p(r)$ .

Podemos observar que a equação acima é da forma:  $v_\theta = a r + \frac{b}{r}$ , ou seja, uma combinação de uma rotação de corpo rígido ( $a r$ ) com vórtice livre ( $\frac{b}{r}$ ).

Casos Limite:

(I)  $r_1 \rightarrow 0 \implies$  obtemos  $v_\theta = w_2 r$ , ou seja, uma rotação de corpo rígido.

(II)  $w_2 = 0$

$$u_\theta = \frac{w_1 r_1}{\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1} \left( \frac{r_2^2}{r_1 r} - \frac{r}{r_1} \right) \quad (**)$$

$$\text{quando } r_2 \rightarrow \infty \implies v_\theta = \frac{w_1 r_1^2}{r} \implies \text{vórtice livre: } \left( v_\theta = \frac{A}{r} \right)$$

Note que obtivemos como solução da equação de Navier-Stokes um escoamento sem viscosidade! Isto se deve à condição de não deslizamento estar representada neste problema por uma velocidade finita  $v_\theta = w_1 r_1$ .

(III)  $r_2 - r_1 \leq r_1$  (pequenos espaçamentos).

mantendo o cilindro externo parado (i.e.,  $w_2 = 0$ ), a equação (\*\*) fica:

$$v_\theta = w_1 r_1 \left[ 1 - \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right]$$

(escoamento linear de Couette para placas paralelas)

Usa-se esta configuração em viscosimetria (cilindro externo parado).

O torque exercido pelo cilindro externo sobre o fluido é dado por:

$$M_2 = 4 \pi \mu h \left( \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) w_2$$

onde  $h$  é a altura do cilindro.

Cuidado: Estabilidade de Taylor:

$$T = \frac{U_{int} d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{r_i}}$$

onde  $d$  é o gap entre os dois cilindros. Temos:

$$T \leq 40 \implies \text{Couette laminar}$$

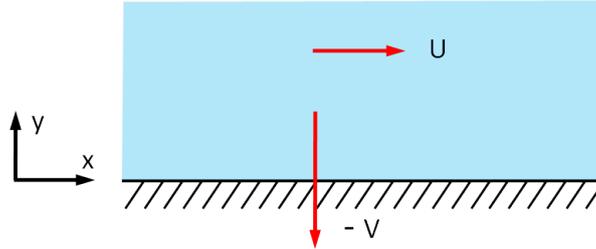
$$40 < T \leq 400 \implies \text{Escoamento com células}$$

$$T > 400 \implies \text{Escoamento turbulento}$$

### Escoamento sobre uma Parede Porosa

Este é um problema onde os termos de inércia são linearizados.

Considere o escoamento uniforme em regime permanente sobre uma placa plana. A placa é permeável e o fluido está sendo sugado de maneira que o componente normal da velocidade vale  $V$ .



Vamos tentar uma solução onde  $p = const.$  e  $u = u(y)$  somente. Isto é, estamos buscando uma solução para as equações de conservação na qual a “*magnitude*” da sucção é ajustada de forma que o componente tangencial da velocidade seja independente de  $x$ . As equações de continuidade e de Navier-Stokes ficam:

$$\text{Continuidade: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ = 0 \end{cases}$$

$$\text{Navier-Stokes: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ = 0 \end{cases}$$

$$\text{Que resultam em: } \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v \frac{du}{dy} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

com as condições de contorno: 
$$\begin{cases} (a) & u(0) = 0 \\ (b) & v(x, 0) = -V \\ (c) & u(y) \rightarrow U \text{ quando } y \rightarrow \infty \end{cases}$$

da equação de continuidade:  $v(x, y) = \text{const. com } y$

da condição de contorno (b):  $v(x, y) = -V$

com estas informações podemos reescrever as equações de momento:

$$-V \frac{du}{dy} = \nu \frac{d^2u}{dy^2}$$

vemos que o termo de inércia foi mantido, mas com  $u = V = \text{const.}$ , ou seja, *linear*. A equação acima pode ser integrada, chegando-se a:

$$u(y) = A + B e^{-y \left( \frac{V}{\nu} \right)}$$

da condição de contorno (a) temos que  $A = -B$  e da condição de contorno (c) temos que  $A = U$ . Então:

$$u(y) = U \left[ 1 - e^{-y \left( \frac{V}{\nu} \right)} \right]$$

Observe que a solução acima diverge para valores negativos de  $V$ , ou seja, quando ocorre bombeamento no lugar de sucção.

**Obs:** As soluções exatas da equação de Navier-Stokes podem ser divididas em 2 categorias:

1. *Soluções onde o termo não linear  $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$  é nulo devido à natureza do escoamento:*

- escoamento de Couette
- escoamento de Hagen-Poiseuille
- escoamento entre cilindros girantes
- 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> problemas de Stokes
- escoamento pulsante entre placas paralelas

2. *Soluções onde o termo não linear não é nulo:*

- escoamento de estagnação (solução similar produzindo uma equação diferencial ordinária resolvível numericamente)
- escoamentos em canais convergentes ou divergentes (mesmo que o anterior)
- escoamento sobre parede porosa

## 10.2 Escoamento Lento (*Creeping Flow*)

Para escoamentos onde uma solução exata não é conhecida, podemos obter soluções aproximadas. Por soluções aproximadas entendemos uma solução analítica que satisfaz uma forma aproximada das equações de conservação, e não uma aproximação numérica para as equações.

### Aproximação de Stokes

Para escoamento lento de fluidos viscosos, as forças de inércia podem ser desprezadas em presença das forças viscosas. Isto equivale a dizer  $Re \ll 1$ .

Neste caso, as equações de conservação ficam:

$$\text{conservação de massa (fluido incompressível):} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{quantidade de movimento linear:} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Podemos verificar que temos 4 equações para 4 incógnitas. A condição de contorno de não deslizamento nas superfícies sólidas deve ser utilizada.

Uma característica interessante de escoamentos lentos pode ser obtida tomando-se o divergente da equação da quantidade de movimento linear:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\text{div } \vec{u})}_{=0} = -\frac{1}{\rho} \text{div} \left( \vec{\nabla} p \right) + \nu \nabla^2 \underbrace{(\text{div } \vec{u})}_{=0}$$

ou seja,  $\nabla^2 p = 0$ , isto é, o campo de pressão no escoamento lento satisfaz a equação de Laplace.

De maneira análoga, tomando-se o rotacional da equação da quantidade de movimento linear para regime permanente:

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \times \underbrace{\left( \vec{\nabla} p \right)}_{=0} + \mu \nabla^2 \underbrace{\left( \vec{\nabla} \times \vec{u} \right)}_{=\vec{w}}$$

assim, a vorticidade no escoamento lento satisfaz a equação de Laplace  $\nabla^2 \vec{w} = \vec{0}$ .

Note que as distribuições de  $\vec{u}$  e  $p$  não dependem da viscosidade absoluta  $\mu$ . Este parâmetro  $\mu$  determina a relação entre  $p$  e  $\vec{u}$ .

A aproximação para escoamentos lentos encontra aplicação em várias áreas de interesse, por exemplo:

- escoamento lento em torno de corpos – arraste sobre esfera (*Stokes, 1851*).
- escoamento em passagens estreitas variáveis – lubrificação
- escoamento em meios porosos

### Escoamento Lento em Torno de Corpos

Para a solução deste problema necessitamos solucionar a equação:

$$\vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (\text{regime permanente})$$

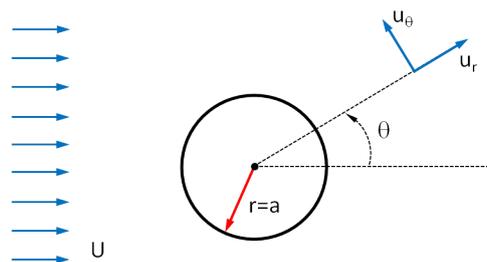
para a geometria do corpo impondo a condição de não-deslizamento nas superfícies sólidas e com pressão e velocidade conhecidas no “*infinito*”.

Stokes provou que esta solução não é possível de ser obtida para escoamentos bi-dimensionais, pois é impossível satisfazer a equação acima em ambas as condições de contorno.

As soluções 3D não apresentam este problema. Oseen (*1910*), no entanto, criticou a hipótese que despreza os termos de inércia no infinito, propondo uma solução.

### Solução de Stokes para Escoamento Lento sobre Esfera

Considere o escoamento lento sobre uma esfera de raio  $a$ . São utilizadas coordenadas esféricas  $(r, \theta)$  e a simetria do problema.



Stokes propôs a utilização de uma função de corrente que automaticamente satisfaz a continuidade:

$$u_r = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad u_\theta = -\frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

A equação da quantidade de movimento se torna:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cotg(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \psi = 0$$

com as condições de contorno:<sup>6</sup>

$$\begin{cases} \text{em } r = a & \implies \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ \text{em } r \rightarrow \infty & \implies \psi = \frac{1}{2} U r^2 \text{sen}^2(\theta) + \text{const} \end{cases}$$

O problema tem solução do tipo:

$$\psi(r, \theta) = f(r) g(\theta)$$

Solução:

$$\psi = \frac{1}{4} U a^2 \text{sen}^2(\theta) \left( \frac{a}{r} - \frac{3r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right)$$

o campo de velocidade, calculado a partir de  $\psi$ , fica:

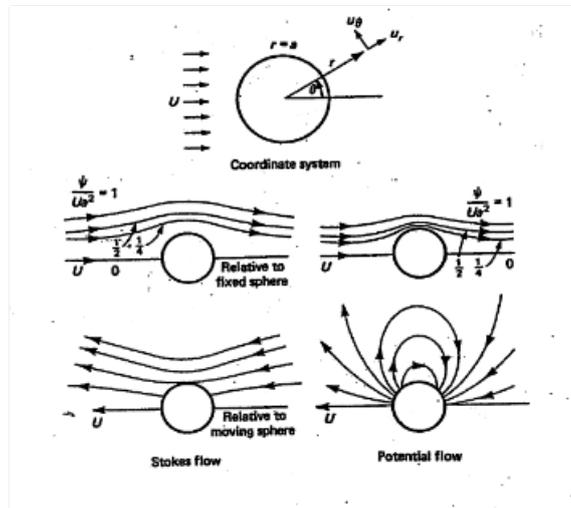
$$\begin{cases} u_r = U \cos(\theta) \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} - \frac{3a}{2r} \right) \\ u_\theta = U \text{sen}(\theta) \left( -1 + \frac{a^3}{4r^3} + \frac{3a}{4r} \right) \end{cases}$$

#### Notas:

- as linhas de corrente e o campo de velocidade são totalmente independentes da viscosidade do fluido.
- as linhas de corrente apresentam simetria perfeita. Não há esteira. Esteiras são produzidas pelos termos convectivos que não estão presentes neste caso.
- a velocidade local é sempre menor que o valor da velocidade “ao longe”. Não há regiões mais rápidas como é o caso do escoamento potencial (onde  $u/U = 1.5$ ). Verifique isto notando que o termo, entre parêntesis, que multiplica  $u_r$  e  $u_\theta$ , varia de 0 a 1.
- o efeito da presença da esfera no escoamento se estende a grandes distâncias. Por exemplo, para  $r = 10a$ , a velocidade ainda vale aproximadamente  $0.9U$ .
- para uma esfera fixa, as duas configurações de linhas de corrente são similares. Note que para o caso de escoamento de Stokes as linhas são mais deslocadas pelo corpo.
- para a esfera se movendo (obtido subtraindo-se a função de corrente do escoamento livre,  $\psi = \frac{1}{2} U r^2 \text{sen}^2(\theta)$ , de  $\psi$ ) o resultado é completamente diferente para escoamento lento e potencial. No escoamento potencial,  $\psi$  apresenta recirculação. No escoamento lento o fluido é arrastado pela esfera.

6

$$\text{Verificação: } \begin{cases} u_r = \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \frac{2}{2} U r^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) = U \cos(\theta) \\ u_\theta = -\frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{2}{2} U r \text{sen}^2(\theta) = -U \text{sen}(\theta) \end{cases}$$



Com  $u_r$  e  $u_\theta$  conhecidos, pode-se obter o campo de pressão, integrando-se:

$$\vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{u}$$

cujo resultado é dado por:

$$p = p_\infty - \frac{3\mu a U}{2r^2} \cos(\theta) \quad (\text{onde } p_\infty \text{ é a pressão "ao longe"})$$

Note que a distribuição de pressão é anti-simétrica, sendo mínima em  $\theta = 0$  e máxima em  $\theta = \pi$ . A distribuição de pressão é proporcional à viscosidade do fluido ( $\mu$ ).

A não simetria da distribuição de pressão cria um “arraste de pressão” sobre o corpo. Para obtermos a força total devemos considerar ainda o arraste viscoso:

$$\tau_{r\phi} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \underbrace{\frac{\partial u_\phi}{\partial r}}_{=0} \right) = 0 \quad \tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\text{Assim: } \tau_{r\theta} = \frac{-U \mu \text{sen}(\theta)}{r} \left( 1 - \frac{3a}{4r} + \frac{5a^3}{4r^3} \right)$$

A força total de arraste é:

$$F = \int_0^\pi \tau_{r\theta}|_{r=a} \text{sen}(\theta) \underbrace{2\pi a^2 \text{sen}(\theta) d\theta}_{dA} + \int_0^\pi p|_{r=a} \cos(\theta) \underbrace{2\pi a^2 \text{sen}(\theta) d\theta}_{dA}$$

resultando em:

$$F = 4\pi \mu U a + 2\pi \mu U a \implies F = 6\pi \mu U a$$

Fórmula de Stokes para arraste sobre esfera (válida para  $Re \ll 1$ )

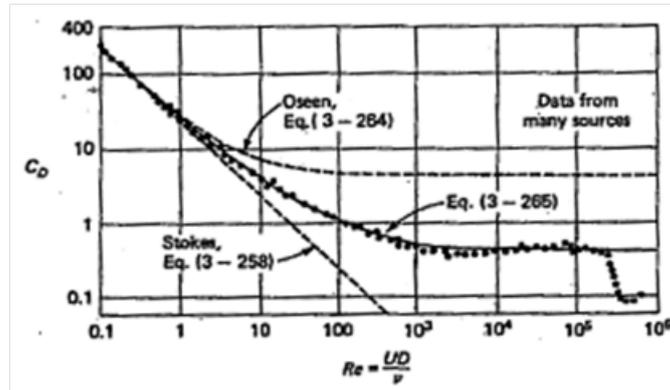
Na verdade, os experimentos mostram que a fórmula de Stokes dá bons resultados para  $Re \approx 1$ . Note que do total da força de arraste,  $\frac{2}{3}$  sai devido ao atrito viscoso e  $\frac{1}{3}$  devido ao arraste de pressão. Um coeficiente de arraste apropriado seria:  $\frac{F}{\mu U a} = 6\pi = const$ . No entanto, tornou-se comum usar uma definição de coeficiente de arraste,  $C_D$ , própria para escoamentos com efeitos inerciais relevantes. Assim:

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2}$$

Usando o resultado de Stokes:

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad \text{com} \quad Re = \frac{2 a \rho U}{\mu}$$

Note que isto, artificialmente, introduz  $Re$  onde ele não é relevante.



A figura acima mostra a variação do coeficiente de arraste,  $C_D$ , para a esfera em função de Reynolds. Note o limite de validade da solução de Stokes.

### Equação de Oseen

Oseen propôs não desprezar os termos de inércia “ao longe”. Sua sugestão implica em fazer:

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \approx U \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad \text{com} \quad \vec{U} = U \hat{i}$$

A equação de Oseen para o escoamento “ao longe” fica:

$$\begin{cases} \rho U \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Obs: note que a equação continua linear.

Resolvendo os campos de velocidade e pressão, a expressão para o coeficiente de arraste fica:<sup>7</sup>

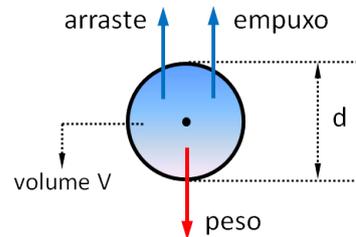
$$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right)$$

experimentos mostram que esta expressão é válida até  $Re \approx 5$ .

### Velocidade Terminal de Sedimentação

Uma aplicação muito útil da equação de Stokes é o cálculo da velocidade terminal de sedimentação de uma partícula esférica. Em condições onde a aceleração da partícula pode ser desprezada, o equilíbrio das forças fornece:

$$F_{\text{arraste}} + F_{\text{empuxo}} = F_{\text{Peso}}$$



$$F_{\text{arraste}} = 6 \pi \mu U \frac{d}{2} \quad (\text{Stokes})$$

$$F_{\text{empuxo}} = \rho_f V g = \frac{\rho_f \pi d^3 g}{6} \quad (\rho_f = \text{densidade do fluido})$$

$$F_{\text{Peso}} = \rho_p V g = \frac{\rho_p \pi d^3 g}{6} \quad (\rho_p = \text{densidade da partícula})$$

resolvendo para  $U = V_T$  (velocidade terminal):

$$V_T = \frac{g (\rho_p - \rho_f) d^2}{18 \mu}$$

lembrando a limitação imposta pela lei de Stokes:

$$Re_d = \frac{\rho V_T d}{\mu} < 1$$

**Exemplo de Aplicação:** Como exemplo numérico de aplicação da velocidade terminal de queda, suponha que em uma erupção vulcânica, material particulado seja lançado na atmosfera a uma altura de  $10 \text{ km}$ . Calcule o tempo de queda de partículas de rocha ( $\rho_p = 3000 \text{ kg/m}^3$ ) com diâmetros de  $1 \text{ mm}$  e  $10 \mu\text{m}$ .

<sup>7</sup> Ver, por exemplo, referência: *Viscous Fluid Flow*, de F. M. White.

(a)  $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_p = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \rho_f = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \mu = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \end{array} \right. \quad V_T = \frac{g (\rho_p - \rho_f) d^2}{18 \mu}$$

ou seja:

$$V_T = \frac{(9.8) (3000 - 1) (10^{-3})^2}{(18) (10^{-3})} = 1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{tempo de queda} = \frac{10000}{1.6} = 6250 \text{ s} \approx 1.7 \text{ h}$$

(b)  $d = 10 \mu\text{m} = 10 \times 10^{-6} \text{ m}$

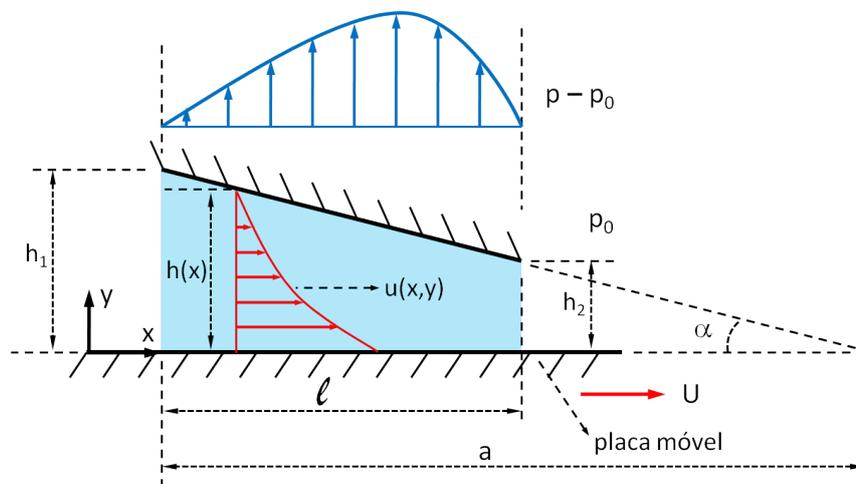
Usando os mesmos dados anteriores, chega-se a:  $V_T = 1.6 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\text{tempo de queda} = \frac{10000}{1.6 \times 10^{-4}} = 6.250 \times 10^7 \text{ s} \approx 17360 \text{ h}$$

### Introdução à Teoria Hidrodinâmica da Lubrificação

O escoamento entre superfícies de mancais lubrificadas é um outro exemplo de escoamento onde predominam as forças viscosas. Devido à geometria dos mancais, o escoamento de fluido produz elevadas pressões que sustentam a carga, evitando o contato metal-metal.

Vamos estudar um caso simplificado.



Hipóteses:

1. escoamento laminar
2. fluido incompressível
3. espessura do filme é pequena, ou seja:  $h(x) \ll \ell$
4. efeitos de borda desprezíveis
5. escoamento bi-dimensional
6. regime permanente

O fato das paredes não serem paralelas implica em:  $u \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ .

Se compararmos forças de inércia com viscosas:<sup>8</sup>

$$\frac{\text{forças inércia}}{\text{forças viscosas}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \approx \frac{\rho (U^2/\ell)}{\mu (U/h^2)} = \frac{\rho U h^2}{\mu \ell} = \frac{\rho U \ell}{\mu} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2$$

Definição:  $R_e^* = \frac{U \ell}{\nu} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \implies$  “Número de Reynolds Reduzido”

Para podermos desprezar os termos de inércia:  $R_e^* \ll 1$

As equações de conservação ficam:

$$\bullet \text{ direção } x : \quad u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\approx 0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\bullet \text{ direção } y : \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\bullet \text{ conservação de massa:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Note que, na segunda equação (*direção y*), podemos desprezar os termos que envolvem as derivadas parciais de  $v$ , uma vez que  $v \ll u$ . Fica somente:  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ .

Observe também que, o termo  $\frac{\partial p}{\partial x}$  não é mais constante como nos escoamentos anteriores. A equação fica:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

<sup>8</sup>O termo  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  representa a maior parcela das forças viscosas.

Vamos satisfazer uma condição integral de continuidade: a vazão em qualquer seção é constante:

$$Q = \int_0^{h(x)} u \, dy = \text{const.} \quad (2)$$

As condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} y = 0 & \longrightarrow u = U & x = 0 & \longrightarrow p = p_0 \\ y = h(x) & \longrightarrow u = 0 & x = \ell & \longrightarrow p = p_0 \end{aligned} \quad (3)$$

A solução de (1) satisfazendo (3) é:

$$u = U \left( 1 - \frac{y}{h} \right) - \frac{h^2}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \quad (4)$$

Ainda temos que satisfazer a continuidade. Vamos determinar o  $\frac{dp}{dx}$  que satisfaz a continuidade. Substituindo (4) em (2) obtemos:

$$Q = \frac{U h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \quad (5)$$

ou:

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \left( \frac{U}{2h^2} - \frac{Q}{h^3} \right) \quad (6)$$

integrando essa expressão e usando a informação de que  $p = p_0$  em  $x = 0$  obtemos:

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu Q \int_0^x \frac{dx}{h^3} \quad (7)$$

Usando que  $p = p_0$  em  $x = \ell$  obtemos uma expressão para a vazão:

$$Q = \frac{1}{2} U \frac{\int_0^\ell \frac{dx}{h^2}}{\int_0^\ell \frac{dx}{h^3}} \quad (8)$$

desta forma, conhecida a forma da passagem, dada por  $h(x)$ , a vazão fica definida.

Vamos definir as quantidades geométricas que aparecem em (7):

$$b_1(x) = \int_0^x \frac{dx}{h^2} \quad b_2(x) = \int_0^x \frac{dx}{h^3} \quad (9)$$

$$c(x) = \frac{b_1(x)}{b_2(x)} \quad (\text{tem dimensão de comprimento}) \quad (10)$$

Podemos definir a “*espessura característica*” como  $H = c(\ell)$ , onde:

$$H = \frac{\int_0^\ell \frac{dx}{h^2}}{\int_0^\ell \frac{dx}{h^3}}$$

A equação (8) é reescrita como:

$$Q = \frac{1}{2} U H \quad (11)$$

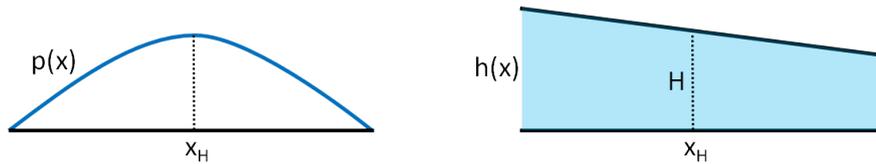
Podemos então escrever:

$$\text{Eq.(7):} \quad p(x) = p_0 + 6\mu U b_1(x) - 12\mu Q b_2(x) \quad (12)$$

$$\text{Eq.(8):} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{H}{h}\right) \quad (13)$$

Note que a expressão anterior passa por um máximo (ou mínimo) quando a espessura do canal  $h = H$ .

Queremos que o “*excesso*” de pressão na passagem seja positivo para que o mancal possa suportar uma carga útil. Portanto, olhando para a Eq.(13), assumindo que  $p - p_0 = 0$  em  $x = 0$  e que a espessura vale  $H$  em  $x = x_H$ , devemos ter:



$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} > 0 \implies h(x) > H \text{ para } 0 < x < x_H \\ \frac{dp}{dx} < 0 \implies h(x) < H \text{ para } x_H < x < \ell \end{cases}$$

ou seja, devemos ter um canal convergente na direção do escoamento.

Para o caso de uma superfície plana:

$$h(x) = \alpha (a - x) \quad \text{onde: } \tan(\alpha) \approx \alpha$$

Obtemos então de (11):

$$Q = U \alpha \left[ \frac{a(a - \ell)}{2a - \ell} \right]$$

e:

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \left[ \frac{x(\ell - x)}{h^2(2a - \ell)} \right]$$

ou, em termos de  $h_1$  e  $h_2 \implies H = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}$

podemos escrever:

$$p(x) = p_0 + 6\mu U \frac{\ell}{(h_1^2 - h_2^2)} \frac{(h_1 - h_2)(h - h_2)}{h^2}$$

A força normal por unidade de comprimento do mancal é dada por:

$$\mathcal{P} = \int_0^\ell [p(x) - p_0] dx = \frac{6\mu U \ell^2}{(k-1)^2 h_2^2} \left[ \ln(k) - \frac{2(k-1)}{k+1} \right] \quad \text{com } k = \frac{h_1}{h_2}$$

A força de atrito total é dada por:

$$F = \int_0^\ell \mu \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0} dx = \frac{\mu U \ell}{(k-1) h_2} \left[ 4 \ln(k) - \frac{6(k-1)}{k+1} \right]$$

Se derivarmos e igualarmos a zero a expressão para  $\mathcal{P}$ , vemos que ela passa por um máximo em  $k = 2.2$ . Esta seria a configuração ideal do mancal, ou seja:

$$\mathcal{P}_{max} \approx 0.16 \frac{\mu U \ell^2}{h_2^2}$$

Nesta situação, a força tangencial vale:

$$F \approx 0.75 \frac{\mu U \ell}{h_2}$$

Note que a razão  $\frac{F}{\mathcal{P}} \approx \frac{h_2}{\ell}$  não depende da viscosidade.

Para  $\alpha$  pequeno,  $k \approx 1$  e a distribuição de pressão é quase parabólica com  $x_H \approx \frac{\ell}{2}$  e centro de pressão em  $\frac{\ell}{2}$ .

A posição do centro de pressão é dada por:

$$x_C = \frac{1}{2} \ell \left[ \frac{2k}{k-1} - \frac{k^2 - 1 - 2k \ln(k)}{(k^2 - 1) \ln(k) - 2(k-1)^2} \right]$$