Introdução a análise espectral e decomposição em Série de Fourier

Introdução

- O objetivo desta aula é apresentar alguns princípios básicos da análise espectral de sinais através da decomposição em série de Fourier.

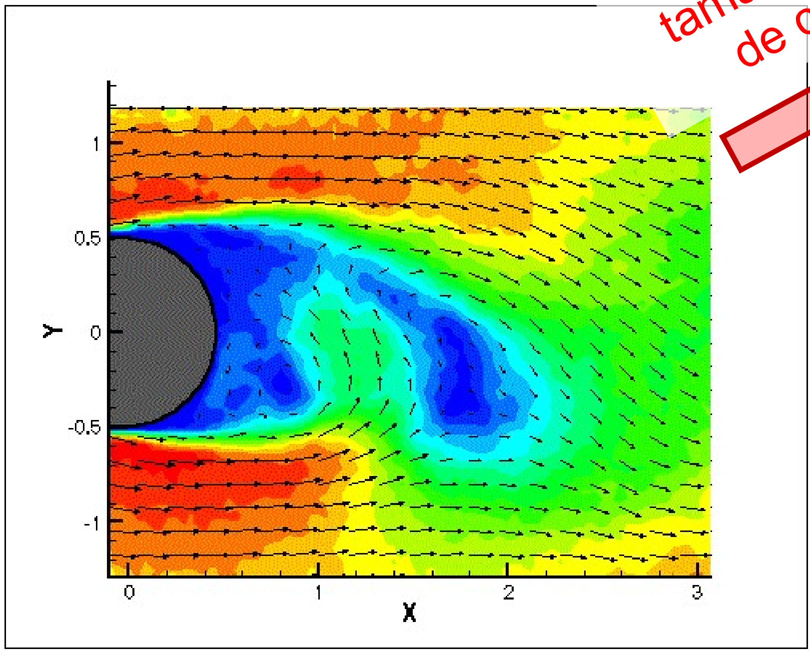
- Para complementar o que foi visto em sala sugere-se a leitura *Random data: Analysis and Measurement Procedures*. Dos autores: J. S. Bendat; A. G. Piersol.

  Digital signal processing. Autores: Oppenheim, A. V., Schafer, R. W

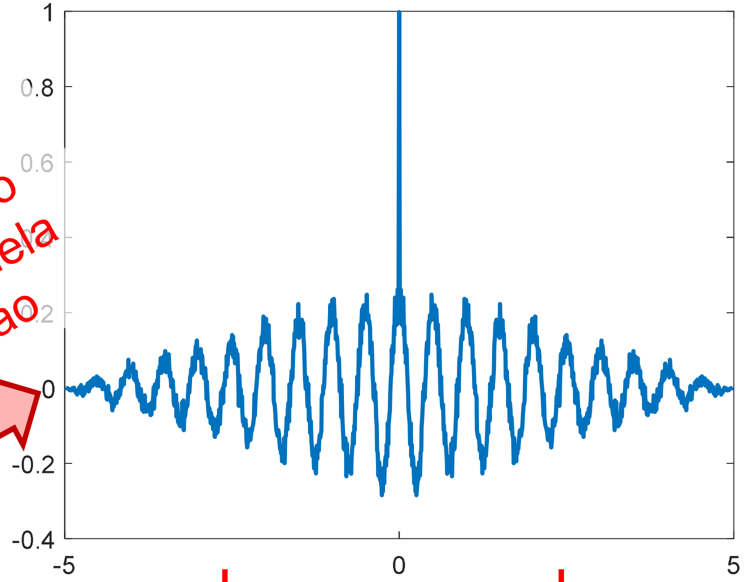
  An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis. Autor: Newland D. E.

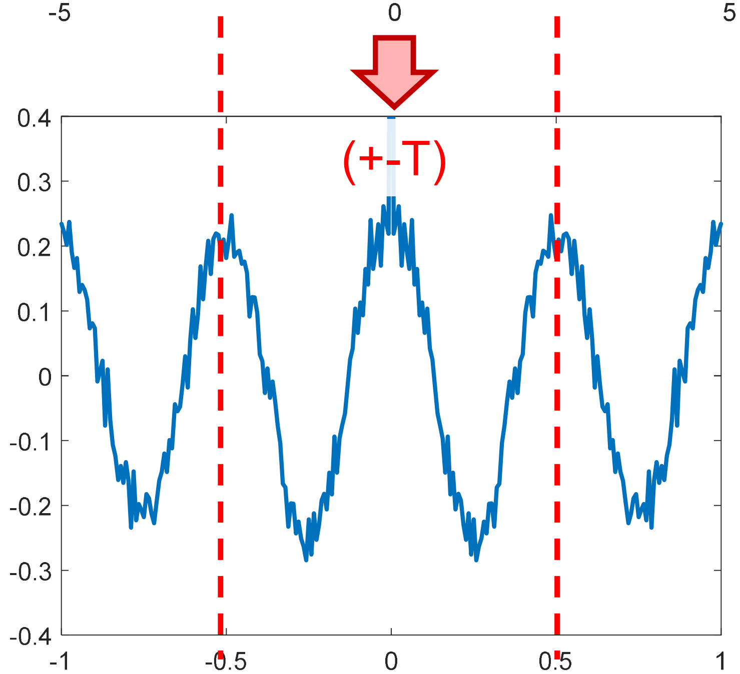
Motivação

- Relembrando o caso do escoamento em torno de um cilindro



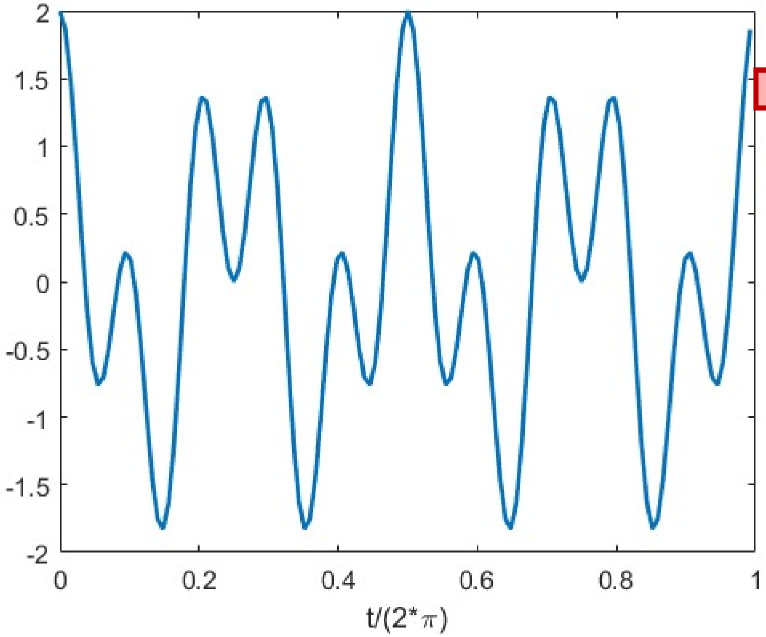
Aplicando autocorrelação
Sem correção do tamanho da janela de correlação

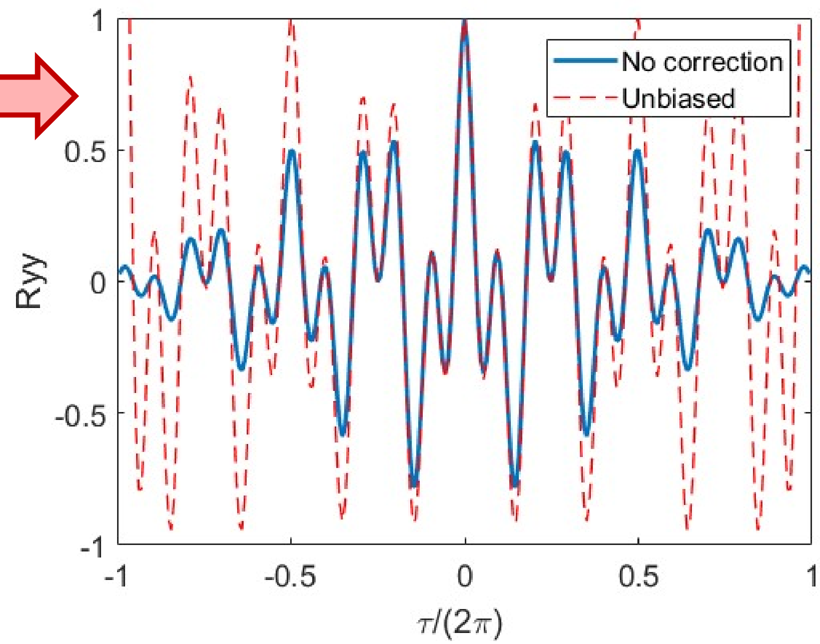




Motivação

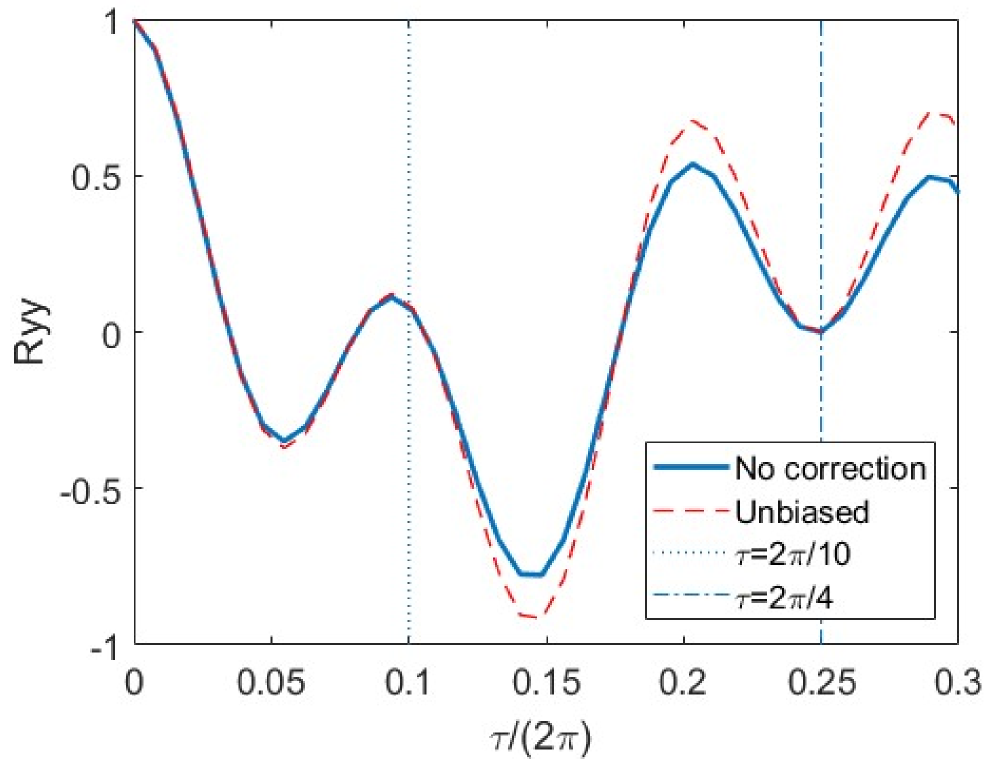
- Para sinais que contém uma combinação de diversas oscilações determinísticas, a correlação não recupera os períodos característicos de cada componente do sinal.
- Ex.: y(t)=cos(4*t+pi)+cos(10*t+0), com $0 \leq t < 2\pi$





Motivação

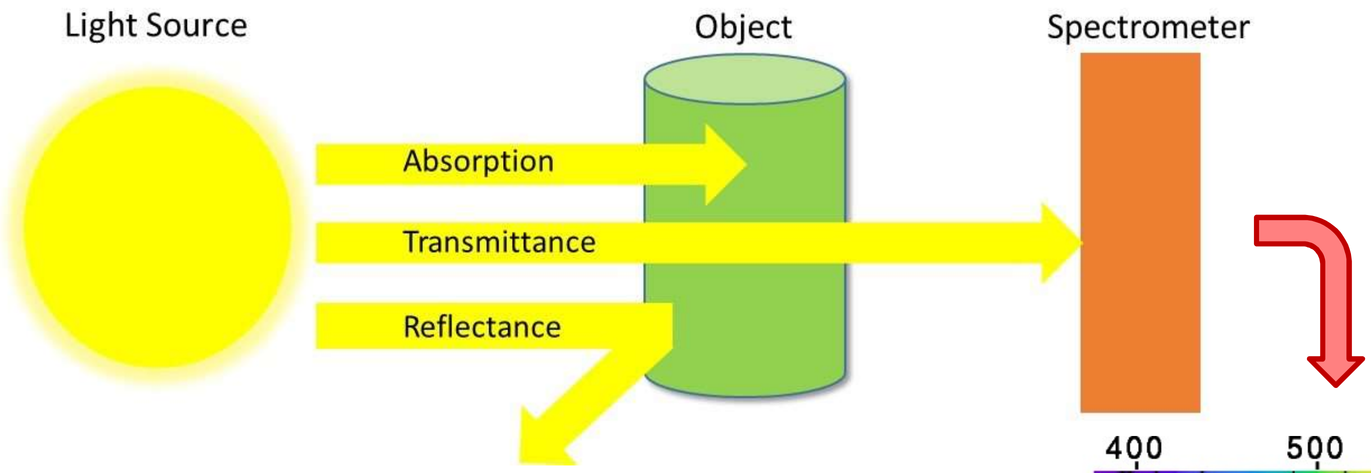
- Ex.: y(t)=cos(4*t)+cos(10*t), com 0≤t<2π

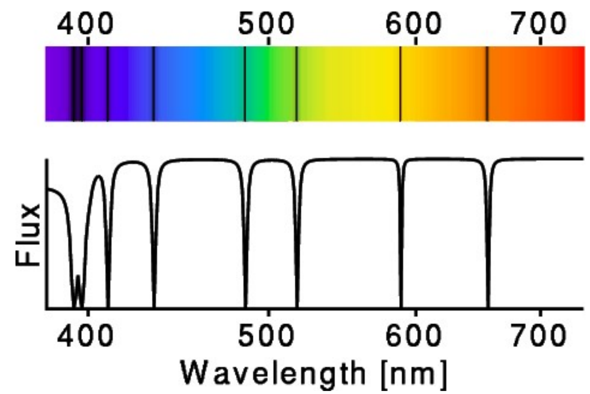


Nota-se, claramente, que a correlação não é robusta o suficiente para se extrair as frequências contidas no sinal.

Motivação

- Para diversas aplicações é <u>extremamente</u> importante saber com exatidão as frequências das oscilações que compõe um sinal.
- Ex.: Caracterização de materiais

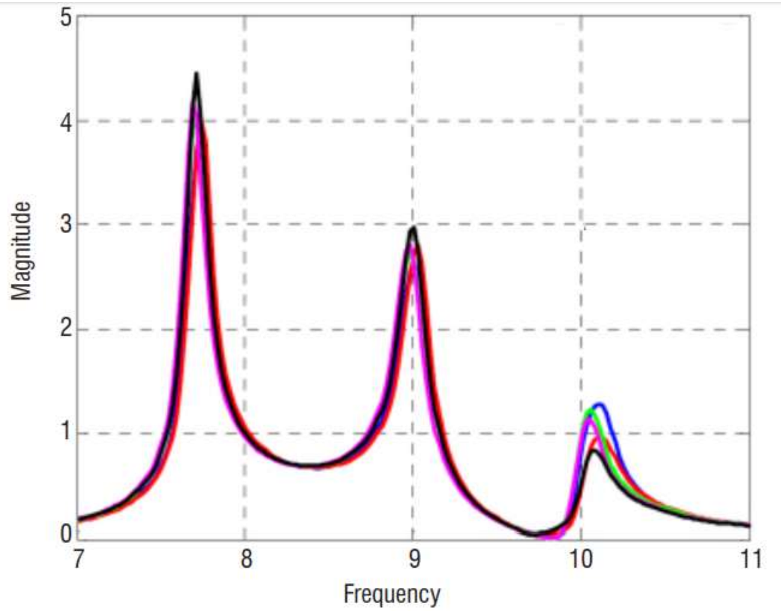




Extraído de edaphic.com.au

Motivação

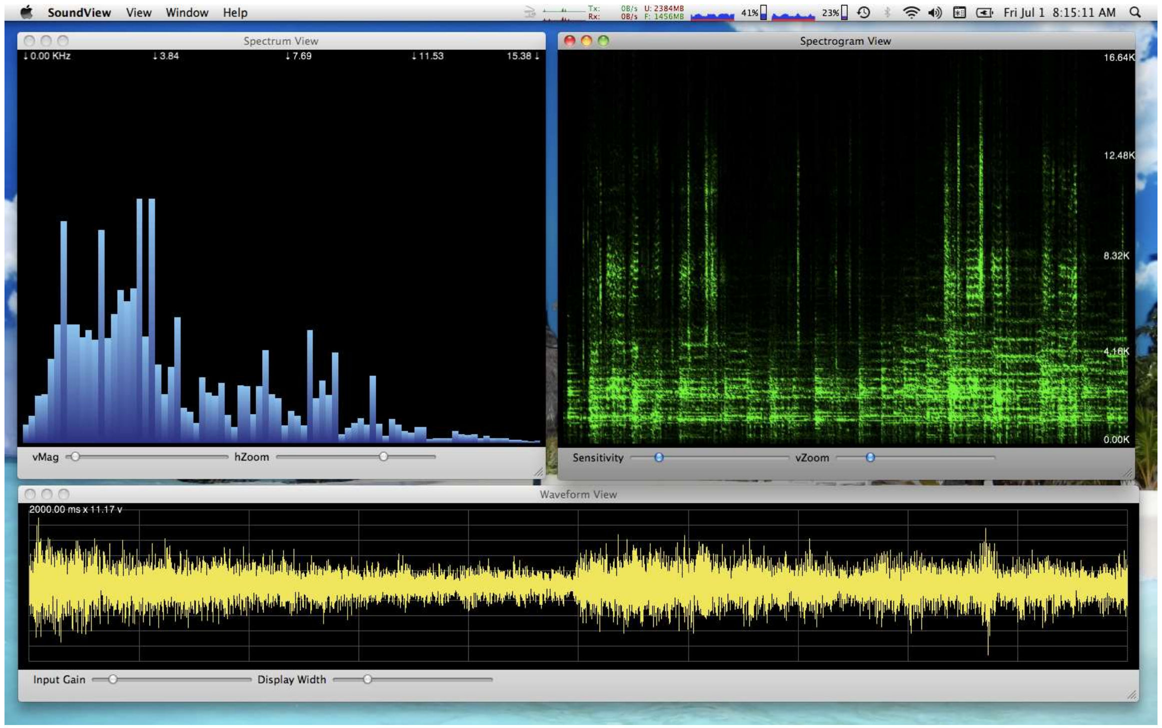
- Ex.: Análise de vibrações



Extraído de C-130 cargo aircraft vibration mode shapes in flight Don Blanchet 3B Associates

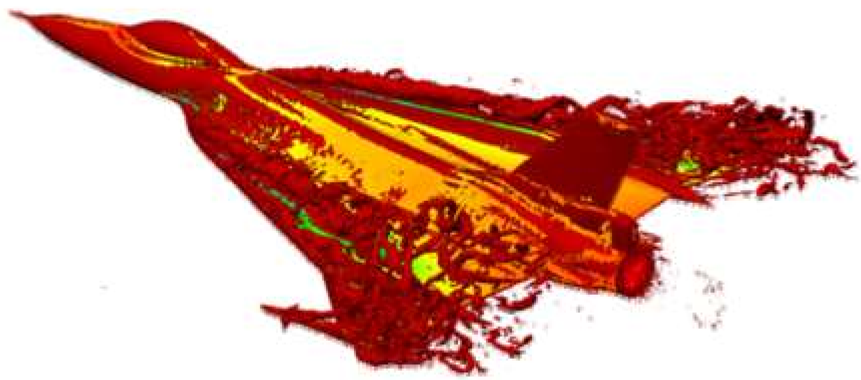
Motivação

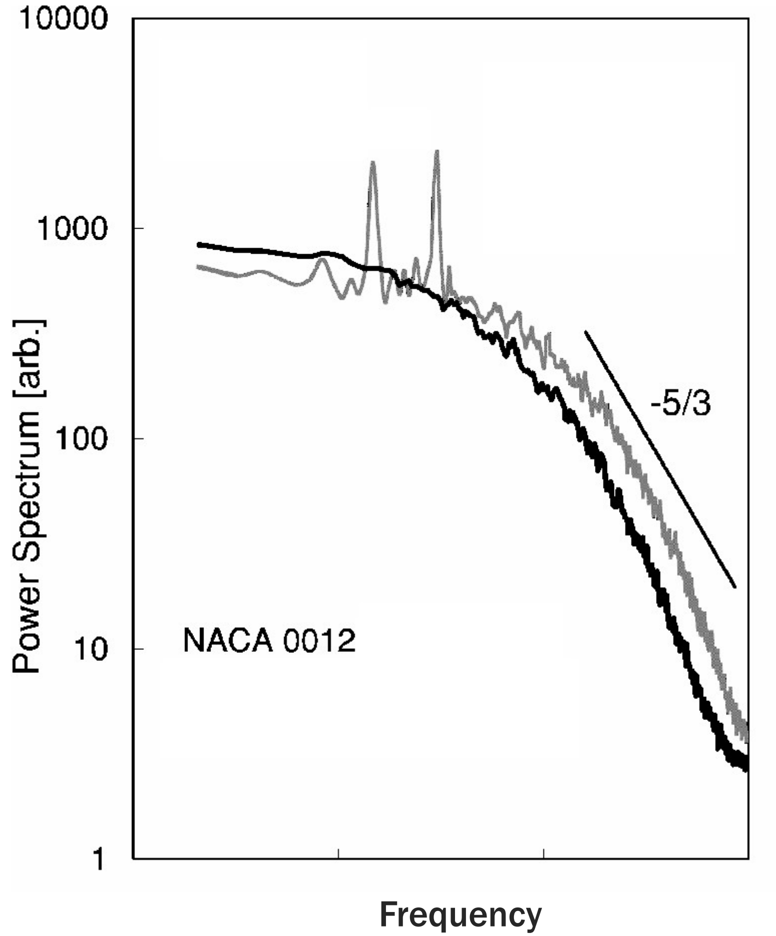
- Ex.: Análise acústica



Motivação

- Ex.: Dinâmica de escoamentos, interação fluido estrutura e aeroacústica

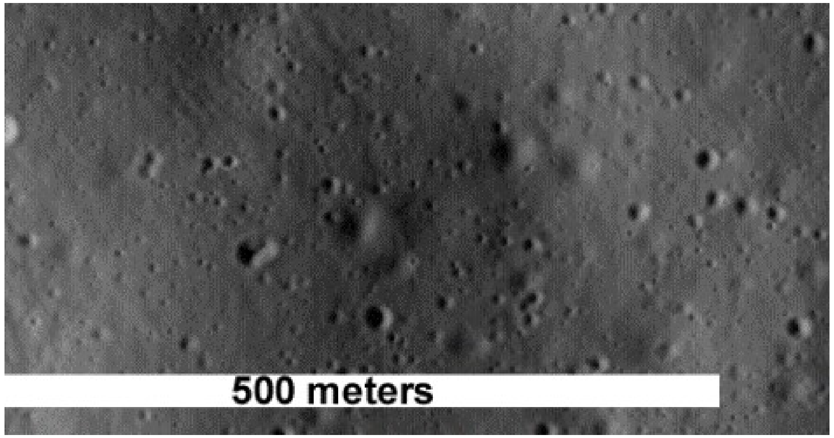




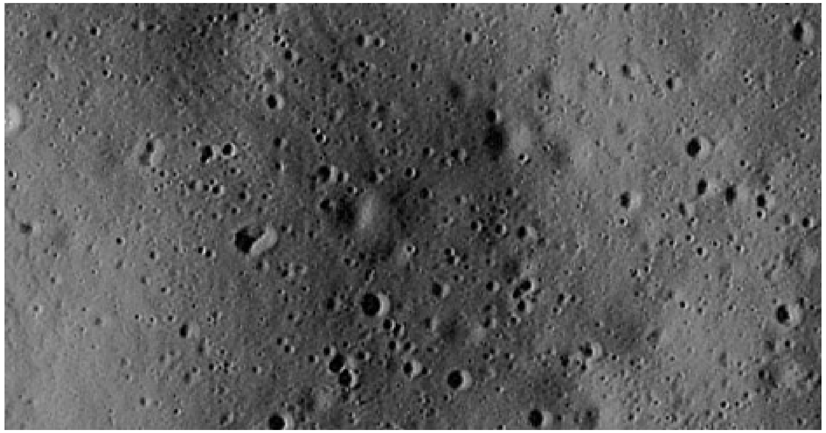
Motivação

- Ex.: Processamento de imagens (Superfície Lunar – Apolo 14);

Sem Processamento



Após processamento

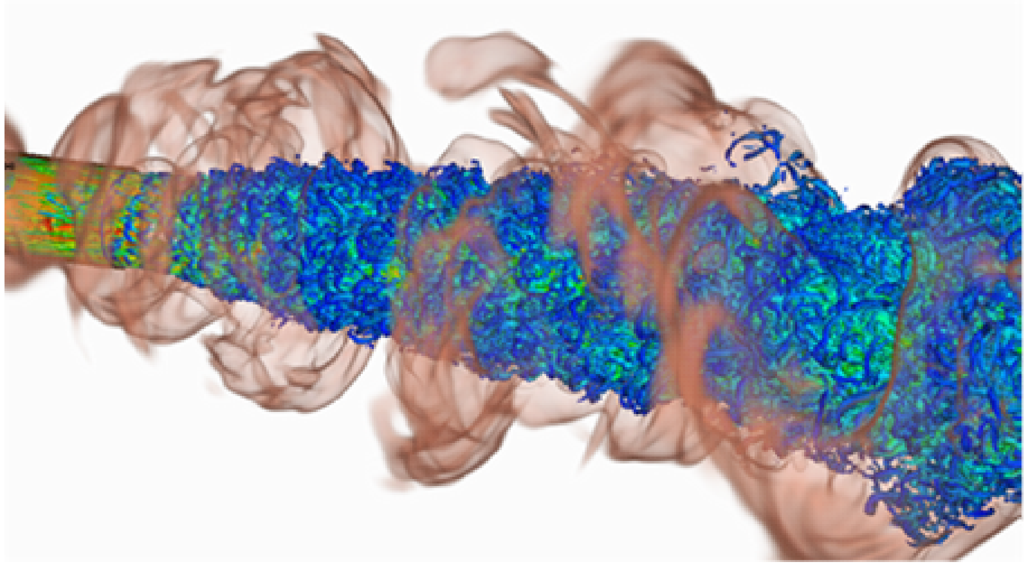


Motivação

- Ex.: Simulação numérica de equações diferenciais (Métodos espectrais).

  Simulação das Eq. de Navier-Stokes de um jato.

  Obs: campo acústico em cinza



Existem inúmeras aplicações, os exemplos mostrados servem para ilustrar como a análise no domínio é amplamente utilizada em diversas áreas.

Introdução a análise espectral

- Como decompor um sinal periódico e recuperar as amplitudes, frequências e fases contidas nesse sinal?
- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) mostrou que é possível representar qualquer sinal periódico através de séries de senos e cossenos harmonicamente relacionadas.
- O conjunto de métodos propostos por Fourier e seu contemporâneo Laplace (1749-1827) para a análise no domínio da frequência, compõe algumas das ferramentas e conceitos mais importantes para a análise de sinais e de sistemas dinâmicos.
- Nesse curso iremos abordar somente os métodos propostos por Fourier.

Introdução a análise espectral

- Primeiro, vamos evitar o uso de atraso de tempo na descrição de sinais senoidais

$$y(t) = c.cos[\omega(t-\tau)] = \underbrace{c.cos(\omega\tau)}_{a}cos(\omega t) + \underbrace{c.sen(\omega\tau)}_{b}sen(\omega t)$$

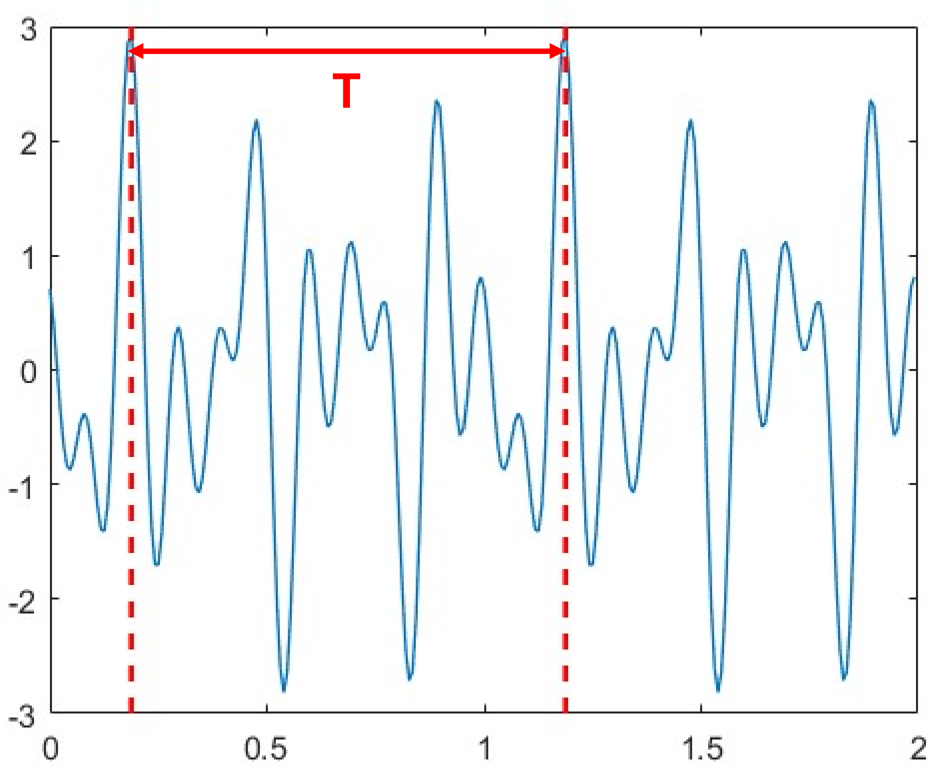
$$= a.cos(\omega t) + b.sen(\omega t)$$

- Onde:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tau * \omega = \theta = tan^{-1}\left({}^{b}/_{a}\right)$$

Introdução a análise espectral

- Consideremos agora uma função arbitrária qualquer, mas que é periódica e tem período conhecido (T)



$$x(t) = x(t + T)$$

Para esse sinal ser periódico, a menor frequência contida em um período é dada por:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Essa frequência é chamada de fundamental

Introdução a análise espectral

- Fourier mostrou que é possível representar qualquer sinal periódico através da combinação linear de séries senoidais harmonicamente relacionadas.

- A combinação linear utilizada por Fourier foi uma soma simples de sinais harmônicos a frequência fundamental, na forma.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt \right) + b_k sen\left(\frac{2\pi}{T} kt \right) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k sen(\omega_0 kt) \right]$$

onde T é o período fundamental do sinal x(t), ω0 (=2π/T) a frequência fundamental, k é um inteiro correspondente ao número do harmônico.

Série Contínua

- Os coeficientes que multiplicam cada termo da série, são dados por:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(\omega_0 kt)dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen(\omega_0 kt)dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

- para k=0 o valor de b_k é irrelevante pois o sen(0)= 0. Já o valor do cosseno é 1. Assim, o coeficiente a para k=0 fica

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T x(t)dt, \qquad k = 0$$

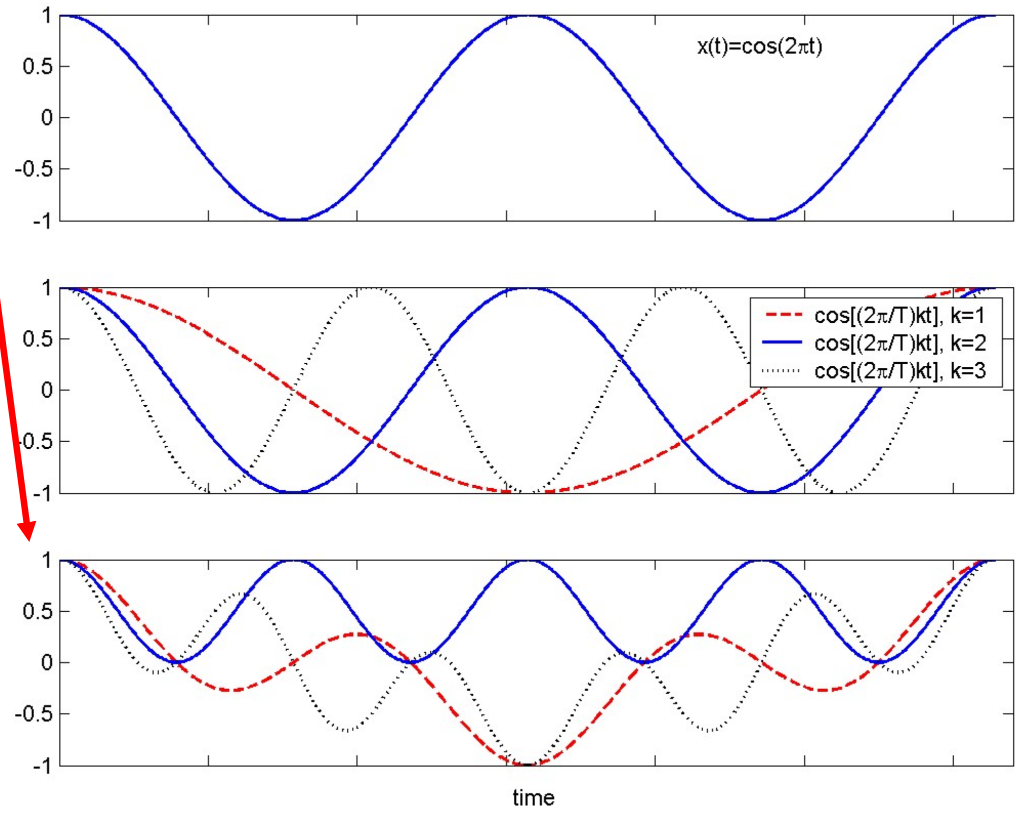
Série Contínua

- Nota-se que todos os sinais possuem frequências que são múltiplos inteiros (k) da frequência fundamental ($\omega 0$)
- Observa-se também que, o número de harmônicos que podem ser utilizados para a reconstrução do sinal é infinito
- O termo a0 refere-se a média da série em um período de tempo T. Não tem fase pois não possui variação com o tempo [sen(0t) e cos(0t), são sempre 0 e 1, respectivamente]

Série Contínua

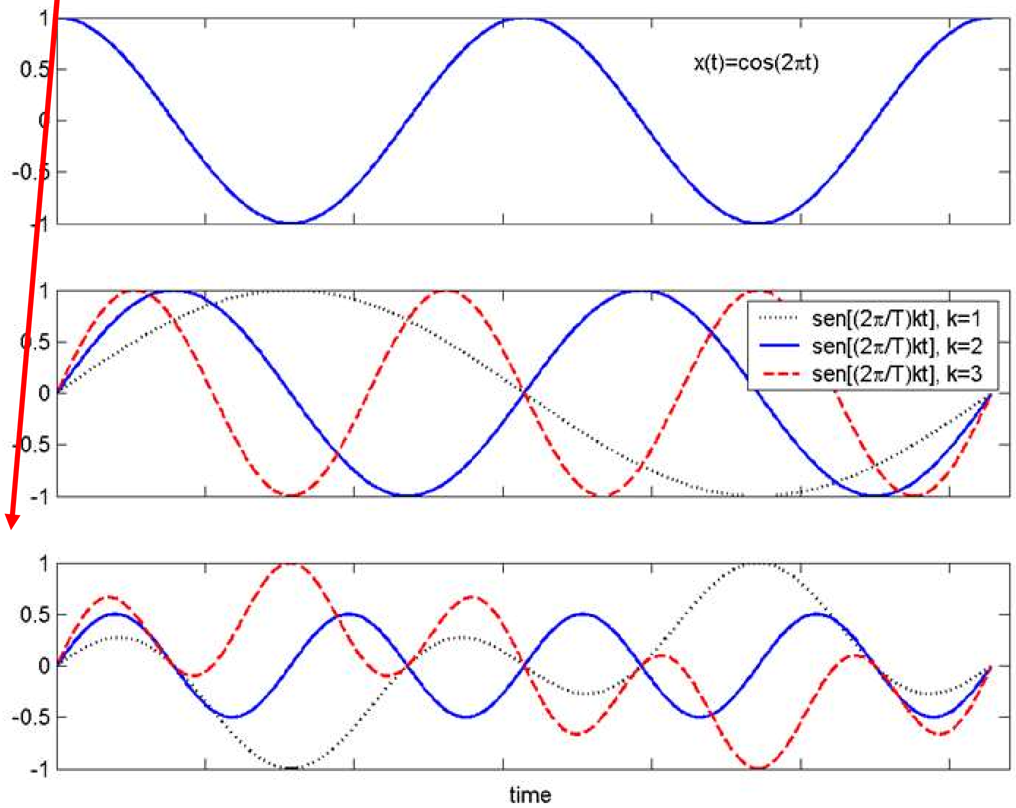
$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(\omega_0 kt)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen(\omega_0 kt)dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

- Como funciona? Com base no que já foi visto no curso é possível compreender o princípio



Série Contínua

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(\omega_0 kt)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen(\omega_0 kt)dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$



Série Contínua

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(\omega_0 kt)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)sen(\omega_0 kt)dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Visualização da representação em série de Fourier. Extraído de Wikimedia Commons

Série Contínua

- Observa-se uma estreita relação com os conceitos de covariância e correlação.

- A amplitude de cada termo da série é estimada com um procedimento análogo ao cálculo da covariância. Ao invés de se estimar a covariância entre sinais desconhecidos [x(t) e y(t)], somente um dos sinais é desconhecido x(t)

- O atraso de fase em relação ao tempo t=0 é dado pela combinação de termos senos e cossenos, conforme já mostrado.

- O mais importante: a ferramenta permite que uma função definida no tempo seja representada no domínio da frequência!

Introdução a análise espectral - Série Continua

- Amplitude e Fase do sinal

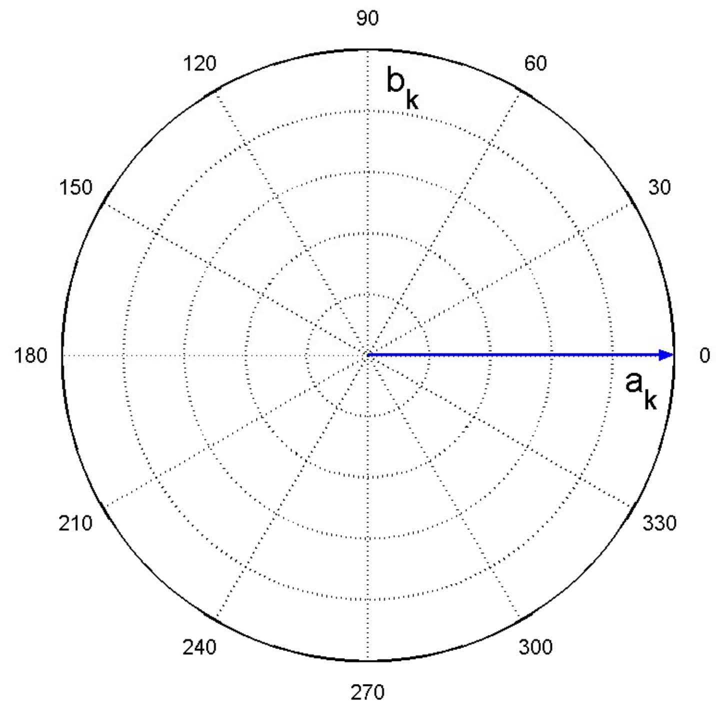
$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

- Análise da Fase:
  Continuando com
  ex: cos(2πt)

  $a_k>0$; $b_k=0$;

- logo, ϕ=0



Série Contínua

- Amplitude e Fase do sinal

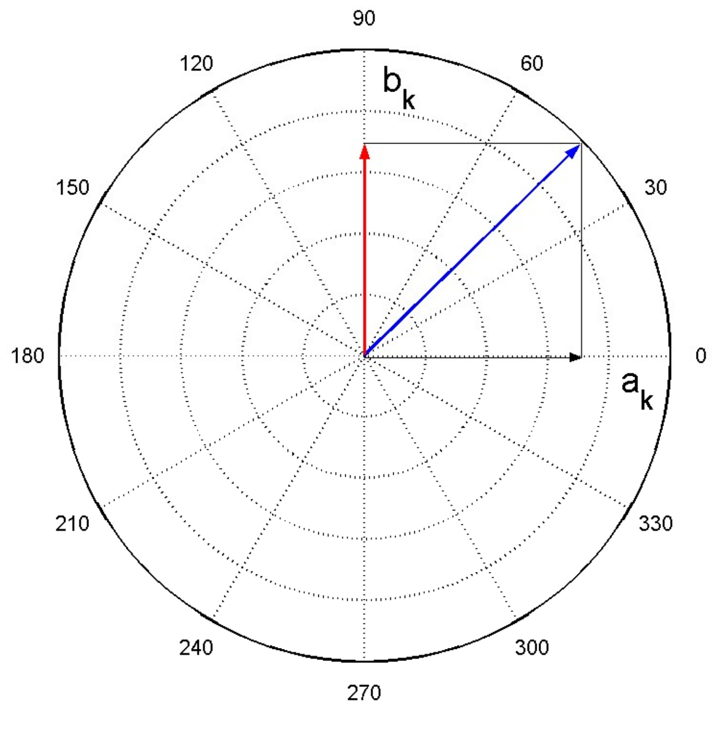
$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

- Análise da Fase: Continuando com ex: cos(2πt+45º)

  $a_k \geq 0$; $b_k > 0$;

- logo, $0 < \phi \leq 90º$



Série Contínua

- Amplitude e Fase do sinal

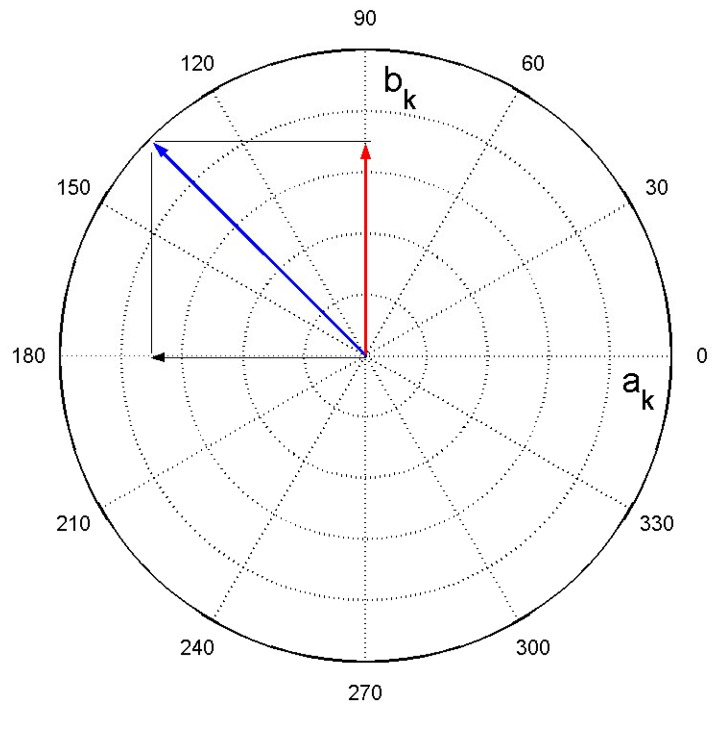
$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

- Análise da Fase: Continuando com ex: cos(2πt+135º)

  $a_k < 0$; $b_k \geq 0$;

- logo, 90<ϕ≤180º



Série Contínua

- Amplitude e Fase do sinal

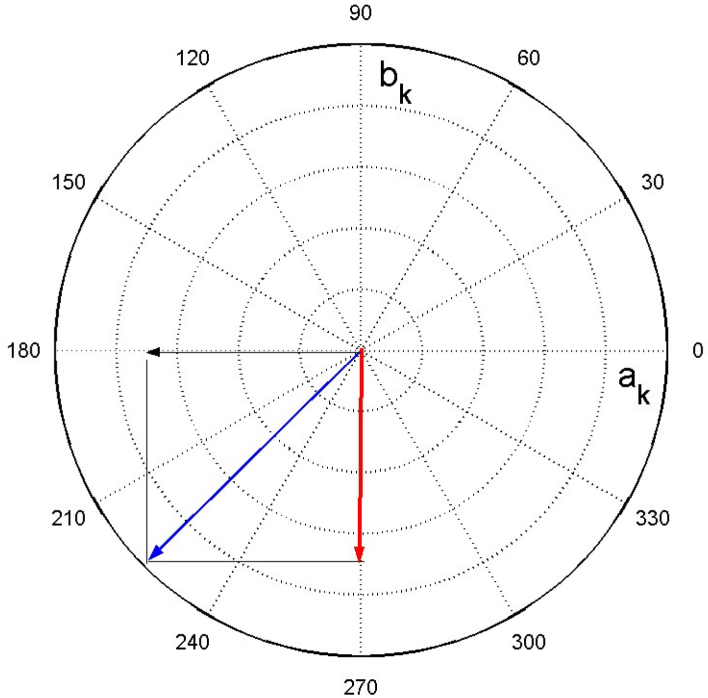
$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

- Análise da Fase: Continuando com ex: cos(2πt+225º)

  $a_k \leq 0$; $b_k < 0$;

- logo, 180<ϕ≤270º



Série Contínua

- Amplitude e Fase do sinal

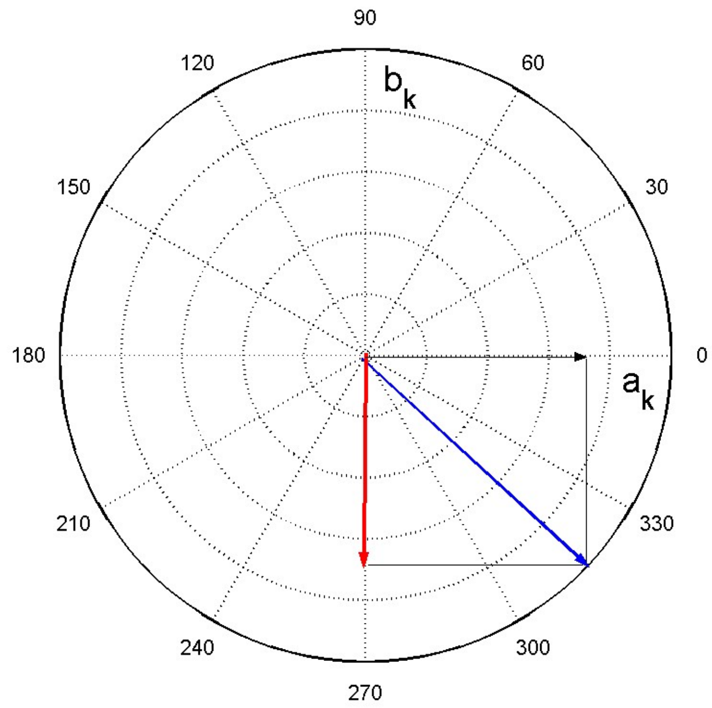
$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

- Análise da Fase:
  Continuando com
  ex: cos(2πt+315º)

  $a_k > 0$; $b_k \leq 0$;

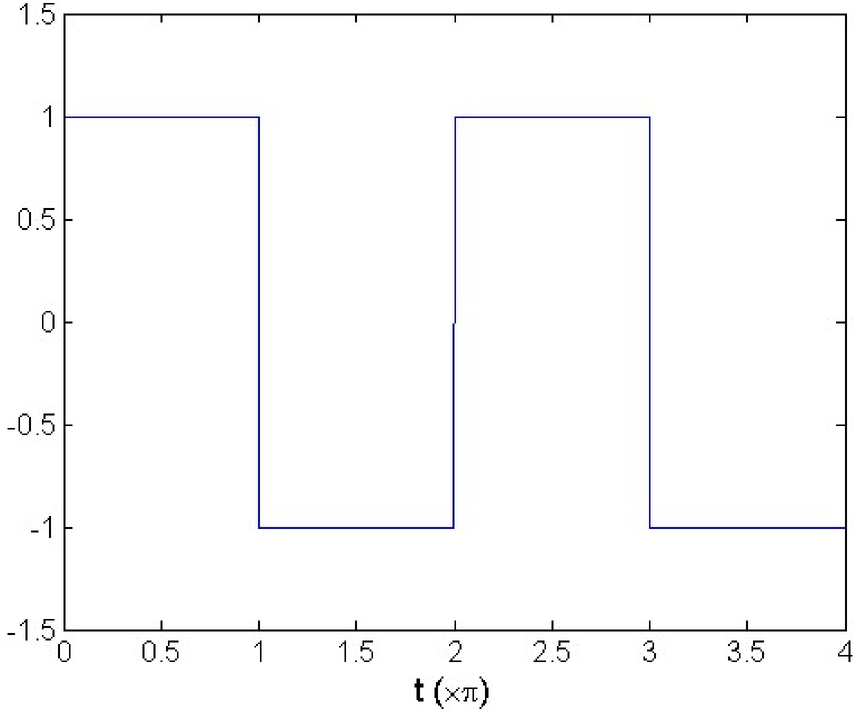
- logo, 270<ϕ≤360º



Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign[sen(t)]$

$$x(t) = \begin{cases} -1 & se \;\; sen(t) < 0 \\ 0 & se \;\; sen(t) = 0 \\ +1 & se \;\; sen(t) > 0 \end{cases}$$



Série Contínua

- Resolvendo a série: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 1$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int x(t)dt = \int_0^{\pi} 1dt + 0 + \int_{\pi}^{2\pi} -1dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int x(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{k\pi}\left[1\cdot sen(kt)\Big|_0^{\pi} + 0 + (-1)sen(kt)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 0, \qquad k = 1,2,3\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int x(t)sen(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 1\cdot sen(kt)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot sen(kt)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\cos(kt)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi}, & para\ k\, impar \\ 0\ , & para\, k\ par \end{cases}$$

Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign\left[sen(t)\right]$

- A série fica: $a_k = a_0 = 0$

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi}, & para\ k\, impar \\ 0 \quad , & para\, k\ par \end{cases}$$

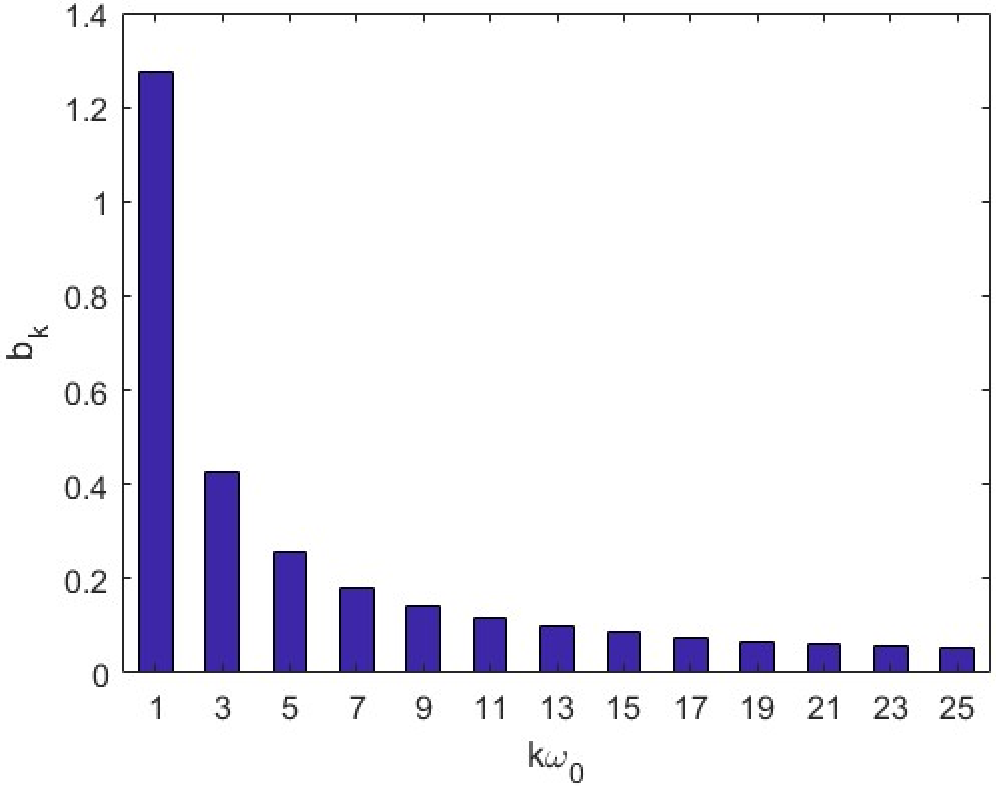
- O somatório de funções harmonicamente dependentes pode ser escrito como:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} sen(t) + \frac{4}{3\pi} sen(3t) + \frac{4}{5\pi} sen(5t) + \frac{4}{7\pi} sen(7t) + \ldots$$

Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign[sen(t)]$

Representação espectral (no domínio das freqüências) da série



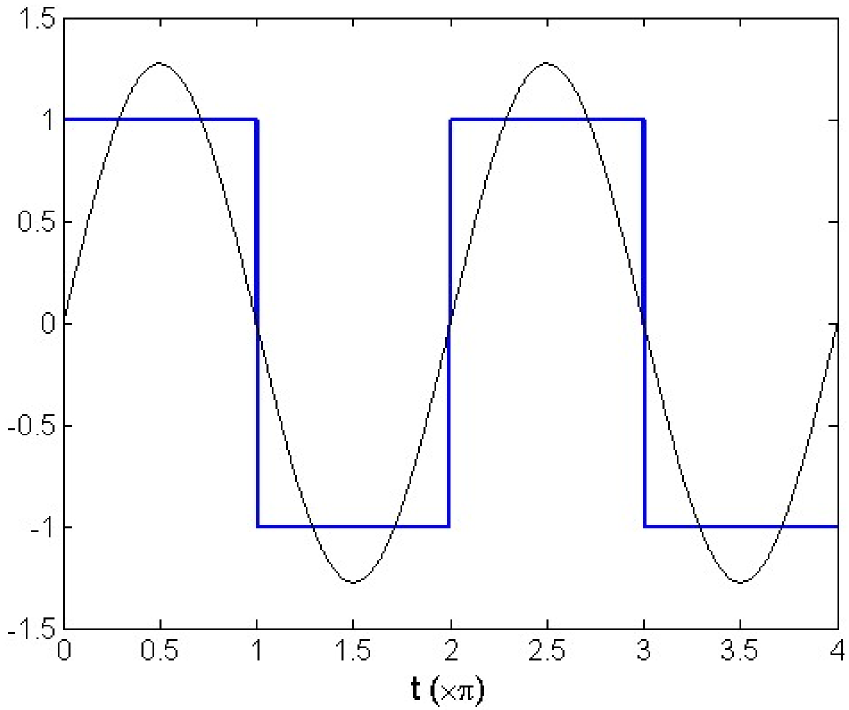
Onde k representa o harmônico da frequência fundamental

Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign[sen(t)]$

  Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1

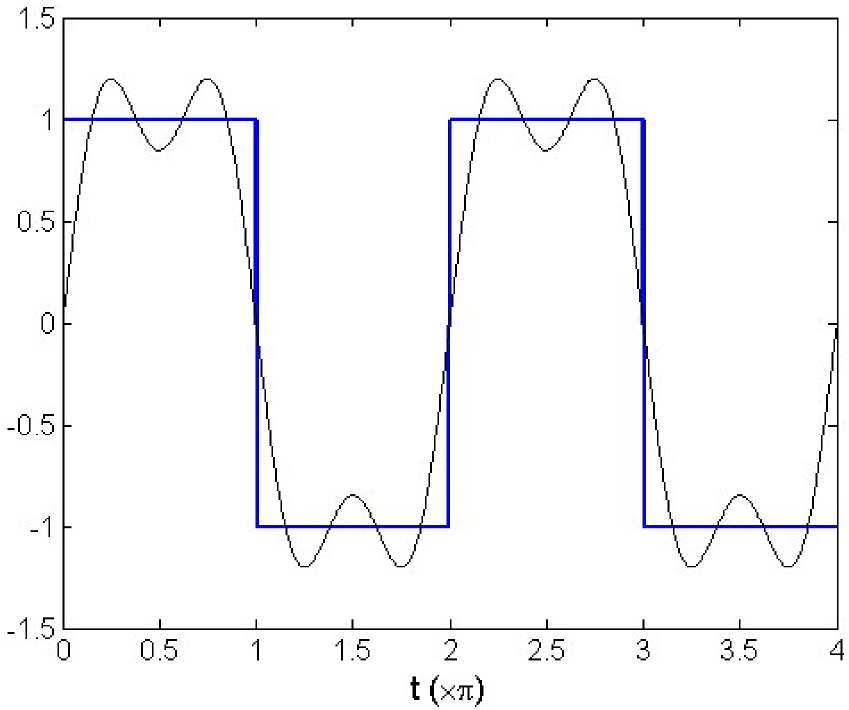


Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign\left[sen(t)\right]$

  Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,3

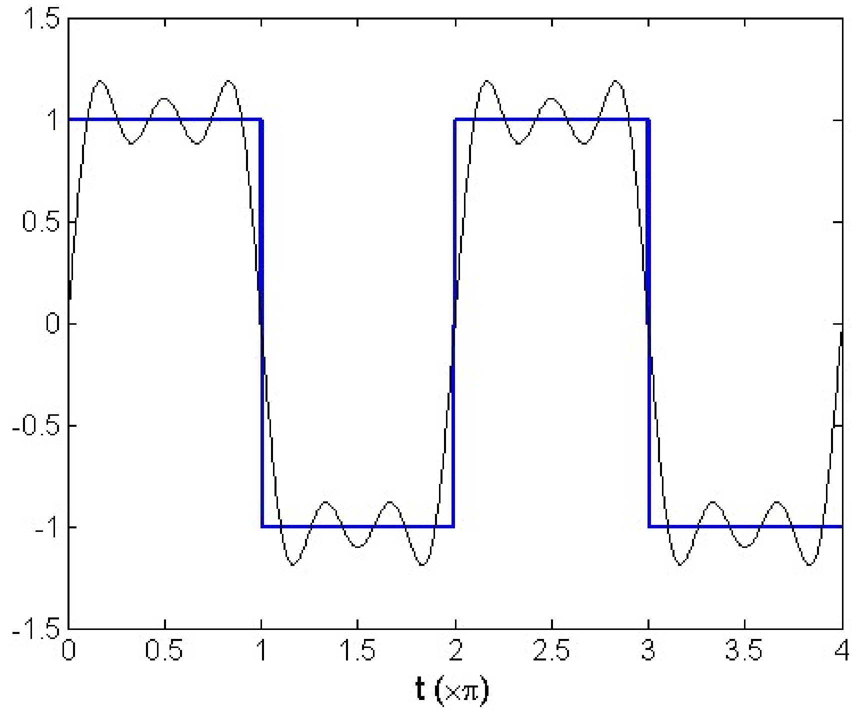


Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign[sen(t)]$

  Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,3,5

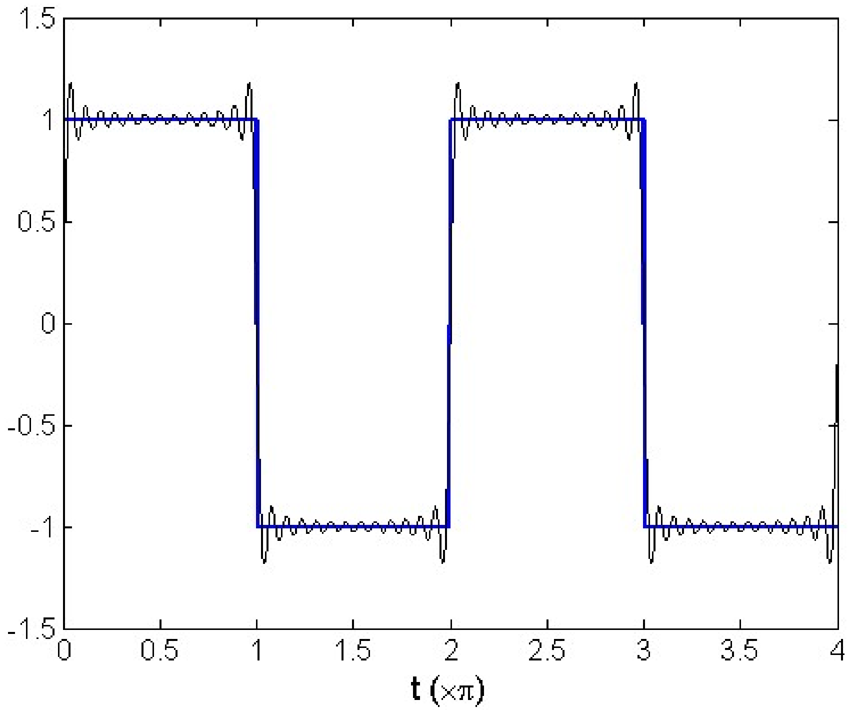


Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign\left[sen(t)\right]$

  Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,3,5...25

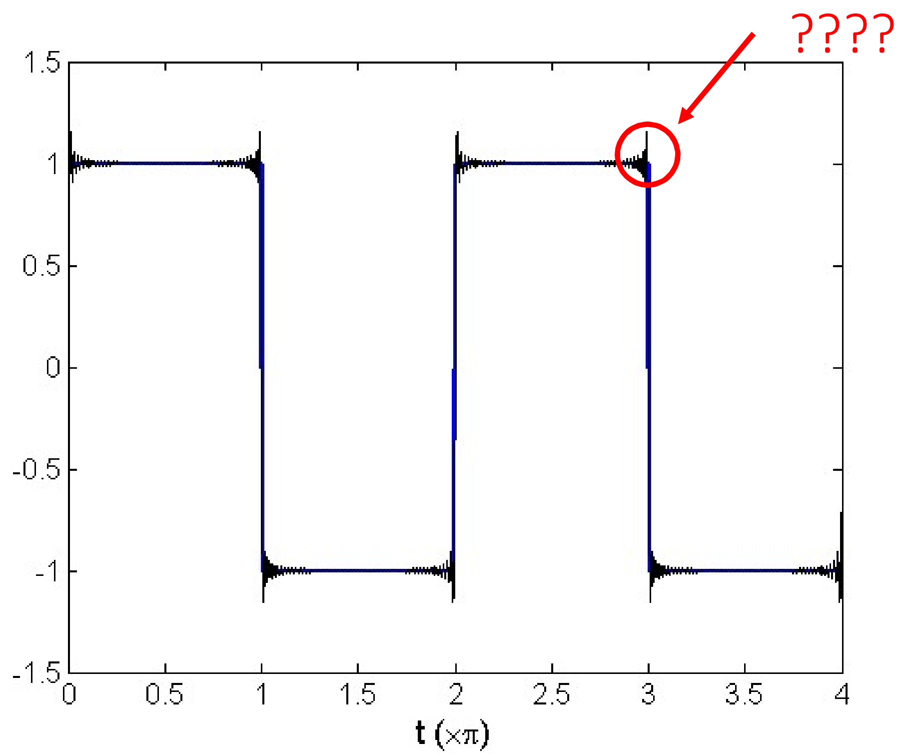


Série Contínua

- Exemplo) $x(t) = sign[sen(t)]$

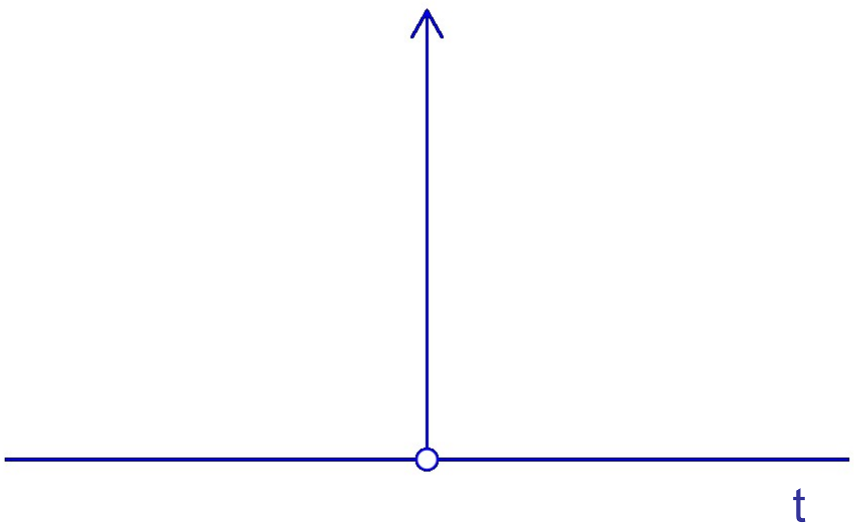
  Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1,3,5...99



Série Contínua

- Exemplo2) Delta de Dirac $x(t) = \delta(t-0)$



Série Contínua

- Exemplo2) Delta de Dirac $x(t) = \delta(t-0)$
- Antes de calcular a série de Fourier é necessário relembrar algumas propriedades fundamentais da função delta de Dirac.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1;$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-\tau) f(t)dt = f(\tau)$$

- E também definir um período para a função: $-\pi<t<\pi$.

Introdução a análise espectral - Série Continua

- Exemplo2) Delta de Dirac $x(t) = \delta(t-0)$
- Os coeficientes da serie de Fourier dessa função são dados por:

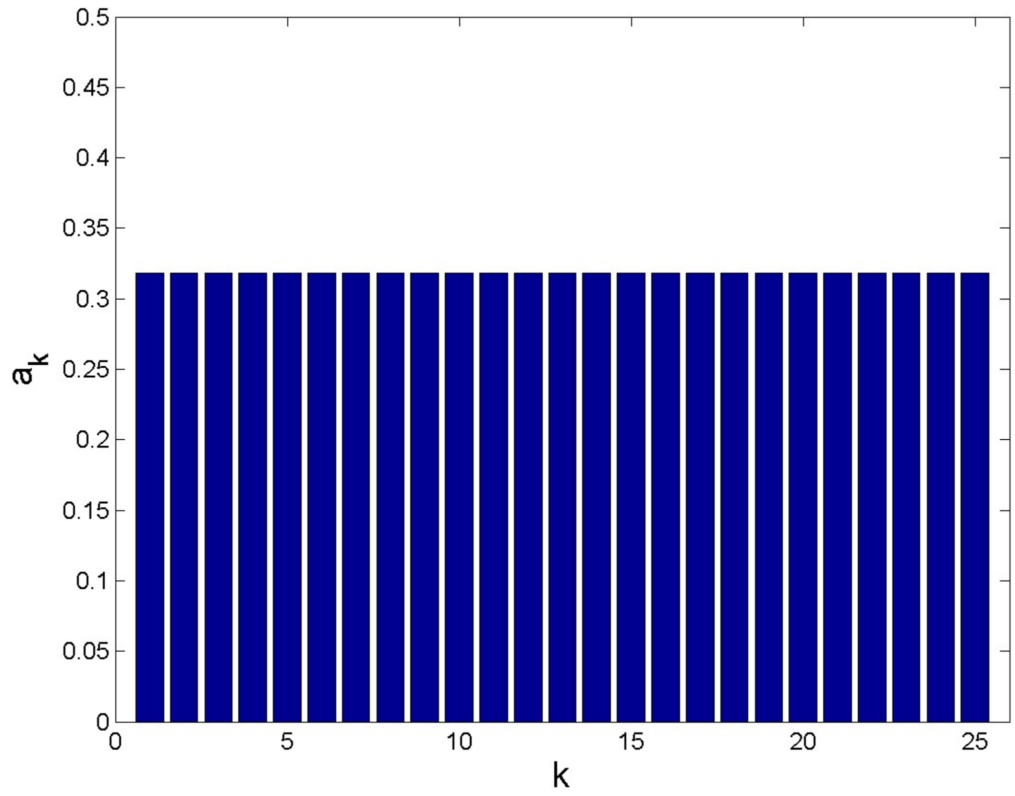
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)dt = \frac{1}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\cos(k\cdot 0) = \frac{1}{\pi}, \qquad k = 1,2,3\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)sen(kt)dt = \frac{1}{\pi}sen(k\cdot 0) = 0, \qquad k = 1,2,3\ldots$$

Série Contínua

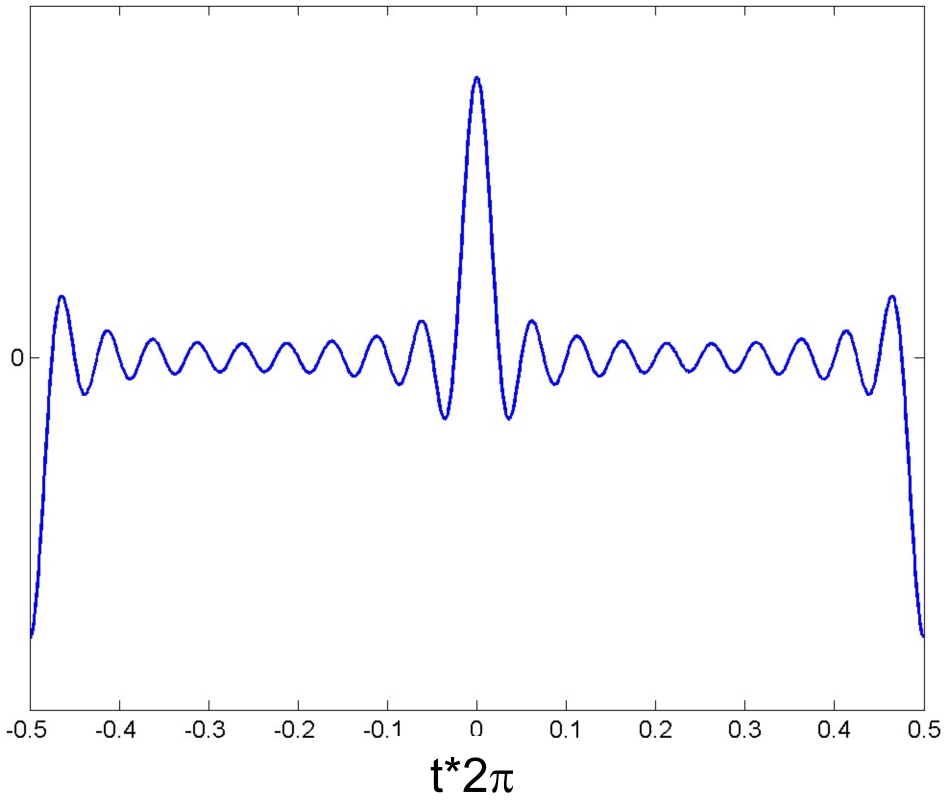
- Exemplo2) Delta de Dirac $x(t) = \delta(t-0)$
- Representação espectral da série



Série Contínua

- Exemplo2) Delta de Dirac $x(t) = \delta(t-0)$
- Representação da série truncada a um número finito de modos

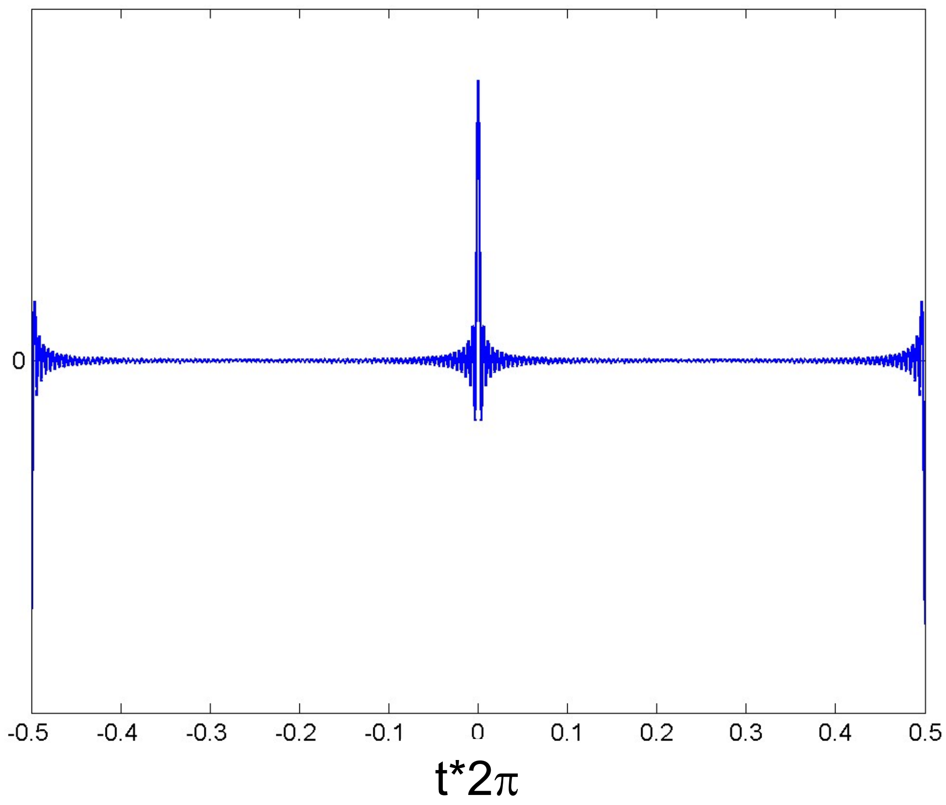
k=1...10



Série Contínua

- Exemplo2) Delta de Dirac $x(t) = \delta(t - 0)$
- Representação da série truncada a um número finito de modos

k=1...100



Série Contínua

- Com base na representação da função delta de Dirac, nota-se que um evento localizado no tempo distribui energia para todos os modos no domínio da frequência;

- Regiões onde existe descontinuidade no tempo necessitam de um grande número de termos para um representação razoável da série temporal.

- Esse efeito devido ao truncamento da série a um número finito de modos é conhecido como <u>efeito de Gibbs</u>

Série Contínua

- Usando a notação de Euler

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$$

- Pode-se escrever a série de maneira mais compacta.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\omega_0 kt}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-i\omega_0 kt}dt$$

Introdução a análise espectral - Série discreta

- Para sinais discretos e periódicos, que são tipicamente obtidos através de amostragem de um sinal contínuo, existe um número de amostras N, tal que

$$x[n] = x[n+N]\,\forall n$$

- Logo, há somente N harmônicos da frequência fundamental, que nesse caso é:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- Isso significa que o somatório de harmônicos da série de Fourier fica limitado a N valores distintos de k

$$x[n] = \sum_{0}^{N-1} c_k \cdot e^{i\omega_0 kn}$$

Série discreta

- Como o período definido pelo número de amostras os coeficientes da série podem ser obtidos a partir de

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\omega_0 kn}$$

- Logo, a representação em série de Fourier de um sinal periódico discreto é uma série finita.

- Se lembrarmos do teorema de amostragem de Shannon-Nyquist, podemos concluir que os valores de k estão restritos a faixa de +-N/2

- Nota-se também que para se obter todos os coeficientes da série é necessário realizar NxN operações.

Propriedades da Série de Fourier

- **Linearidade** – Seja um sinal z[n] formado pela combinação linear dos sinais x[n] e y[n], com coeficientes A e B constantes, na forma

$$z[n] = Ax[n] + By[n]$$

os coeficientes c_{zk} de z[n], correspondem a combinação linear dos coeficientes da série de Fourier de x[n] e y[n]

$$z[n] \xleftrightarrow{S.F.} c_{zk} = Ac_{xk} + Bc_{yk}$$

Propriedades da Série de Fourier

- **Deslocamento no tempo** – Quando um deslocamento no tempo é aplicado a um sinal x[n], os coeficientes da série de Fourier resultante podem ser expressos como

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{S.F.} r_k = c_k e^{-ik\omega_0 n_0}$$

- **Reflexão no tempo** – Seja um sinal x[-n] a reflexão do sinal x[n]. Os coeficientes da série de Fourier do sinal x[-n]

$$x[-n] \xleftrightarrow{S.F.} r_k = c_{-k}$$

Propriedades da Série de Fourier

- **Multiplicação**– Os coeficientes da série de Fourier e_k de um sinal que resulta da multiplicação de x[n] e y[n] são:

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{SF} e_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n]e^{-i\omega_0 kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\sum_{m=0}^{N-1} c_{x\_m} e^{i\omega_0 mn}\right\} y[n]e^{-i\omega_0 kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} c_{x\_m}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n]e^{-i\omega_0 n(k-m)}\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} c_{x\_m} c_{y\_(k-m)}$$

Produto no tempo vira uma convolução no domínio da frequência!

Propriedades da Série de Fourier

- Convolução– Os coeficientes da série de Fourier e_k de um sinal que resulta da convolução de x e y são dados pela relação:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m] \xleftrightarrow{SF} e_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m]e^{-i\omega_0 kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n-m]e^{-i\omega_0 kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]c_{y\_k}e^{-i\omega_0 km}$$

$$= Nc_{x\_k}c_{y\_k}$$

A convolução vira um produto no domínio da frequência

Propriedades da Série de Fourier

- **Diferenciação**– a derivação de um sinal periódico e contínuo x(t) em relação a t é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t)=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\omega_0 kt}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\frac{\partial}{\partial t}e^{i\omega_0 kt}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k i\omega_0 k e^{i\omega_0 kt}$$

- **Primeira diferença** – Para sinais discretos x[n] os coeficientes de Fourier da primeira diferença em relação a n são dados por:

$$x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{SF}e_k=c_k-c_k e^{-i\omega_0 k1}=(1-e^{-i\omega_0 k})c_k$$

Propriedades da Série de Fourier

- **Integração–** a integral de um sinal x(t) periódico e contínuo fica:

$$\int x(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int e^{i\omega_0 kt} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{i\omega_0 k} e^{i\omega_0 kt}$$

Só tem sentido para k≠0,

- **Soma acumulada –** Para sinais discretos x[n] os coeficientes de Fourier da soma acumulada são dados por:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \xleftrightarrow{SF} \left(\frac{1}{1-e^{-i\omega_0 k}} \right) c_k$$

Só tem sentido para k≠0,

Propriedades da Série de Fourier

- Relação de Parserval– A relação mostra que a potência média de um sinal no domínio do tempo é igual a soma das potências de todas as suas componentes harmônicas.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|c_k\right|^2$$

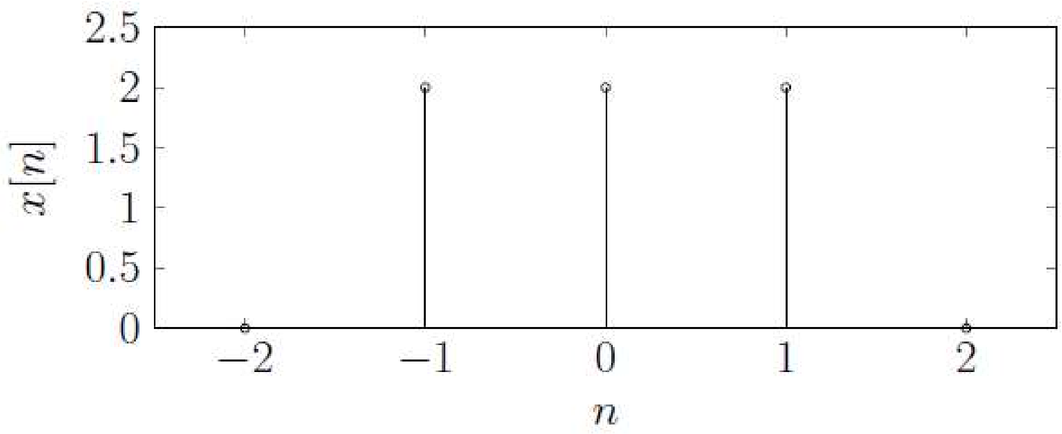
Exercícios em sala que devem ser finalizados e entregues na aula seguinte

- Q1) Para o sinal periódico de tempo contínuo

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4sen\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

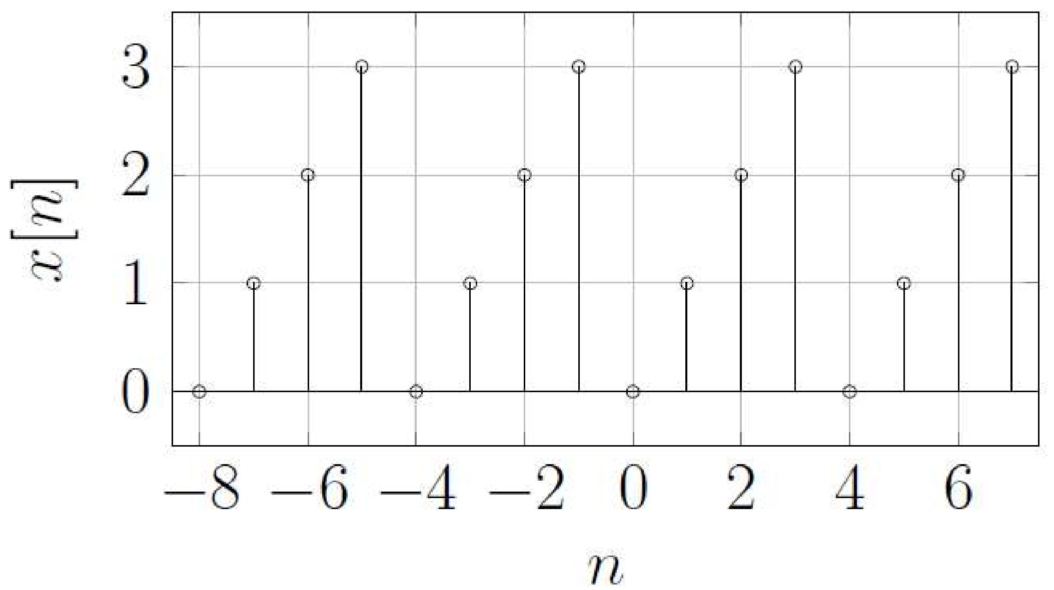
  determine a frequência fundamental e os coeficientes da série de Fourier

- Q2) Obtenha a série de Fourier do sinal x[n],discreto, periódico, com período N=5, que é ilustrado abaixo:



Exercícios em sala que devem ser finalizados e entregues na aula seguinte

- Q3) Encontre os coeficientes da série de Fourier do sinal discreto e periódico a seguir



Exercícios em sala que devem ser finalizados e entregues na aula seguinte

- Q4) Encontre os coeficientes da série de Fourier do sinal discreto e periódico a seguir