Análise espectral com a transformada de Fourier

Introdução

- O objetivo desta aula é apresentar alguns princípios básicos da transformação de Fourier em tempo contínuo e discreto.
- Para complementar o que foi visto em sala sugere-se a leitura

  Random data: Analysis and Measurement Procedures. Dos autores: J. S. Bendat; A. G. Piersol.

  Digital signal processing. Autores: Oppenheim, A. V., Schafer, R. W

  An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis. Autor: Newland D. E.

  Análise e processamento de sinais. Autores:Sampaio, R. , Cataldo, E., Brandão, A. SBMAC 2006

Motivação

- Foi visto na última aula que é possível descrever sinais periódicos através de somatórios de senos e cossenos.
- A metodologia permite estimar as frequências mais relevantes dentro de um sinal de período conhecido
- Quando se deseja estudar um sinal onde não se conhece o período característico ou que não possua periodicidade, como fazer a decomposição em modos de Fourier?
- Fourier expandiu a teoria de séries para resolver essa limitação e a ferramenta ganhou o nome de transformada de Fourier

Introdução a transformada de Fourier

- Fourier intuiu que sinais sem periodicidade aparente ou mesmo aperiódicos, podem ser vistos como periódicos para um período tendendo a infinito ($T \to \infty$)

- Essa consideração tem implicações na decomposição de um sinal em senos e cossenos, que serão discutidas a seguir.

- Lembrando da série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\omega_0 kt} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega_0 kt} dt$$

- Fazendo uma mudança onde $X(\omega_0)/T = c_k$

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega_0 k) e^{i\omega_0 kt}$$

Introdução a transformada de Fourier

- como $T=2\pi/\omega_0$, a relação pode ser reescrita como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega_0 k) e^{i\omega_0 k t} \omega_0$$

- Para $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$ e o somatório torna-se uma integral contínua em ω. Assim, a relação fica:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- onde $X(\omega)$ é a representação do sinal $x(t)$ no domínio da frequência. Se consideramos a frequência em ciclos por período o 2π desaparece e a relação fica

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Introdução a transformada de Fourier contínua

- O sinal X(ω) do domínio da frequência é dado por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Transformada de Fourier

FT

Tempo, espaço

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Frequência, número de onda

IFT

Introdução a transformada de Fourier contínua

- A transformada permite que o mesmo sinal possua representação tanto no tempo quanto na frequência.
- A relação entre a representação do sinal x(t) no domínio da frequência [X(ω)] é normalmente representada das seguintes formas

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

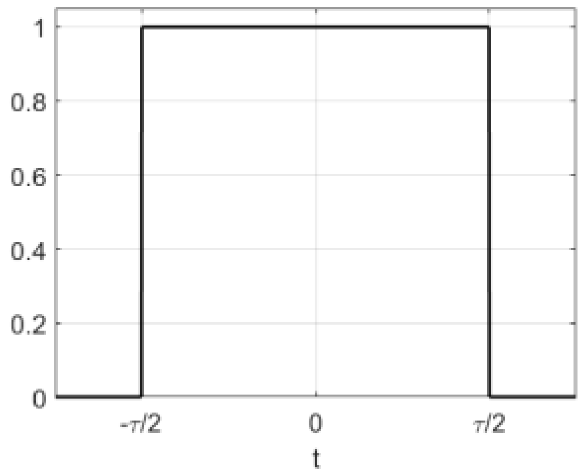
- A transformada inversa é denotada por

$$X(\omega) \xleftrightarrow{IFT} x(t)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

Introdução a transformada de Fourier contínua

- Exemplo clássico – função boxcar: H(t-τ/2)-H(t+τ/2) onde H é a função Heaviside



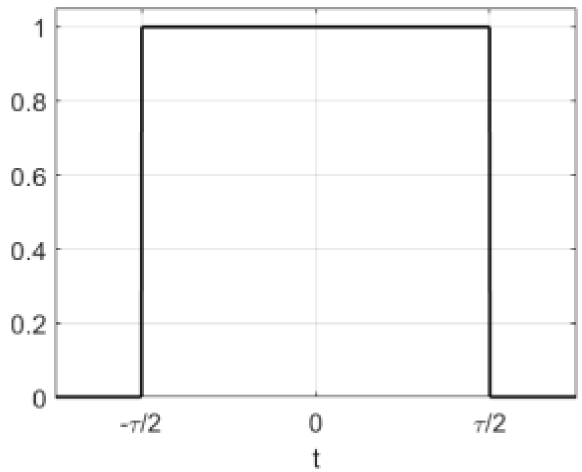
$$x(t) = \begin{cases} 1 & para\ |t| \le \tau/2 \\ 0 & para\ |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Para ω=0

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \tau$$

Introdução a transformada de Fourier contínua

- Exemplo clássico – função boxcar: H(t-τ/2)-H(t+τ/2) onde H é a função Heaviside



$$x(t)=\begin{cases}1 & para\ |t|\le \tau/2\\ 0 & para\ |t|>\tau/2\end{cases}$$

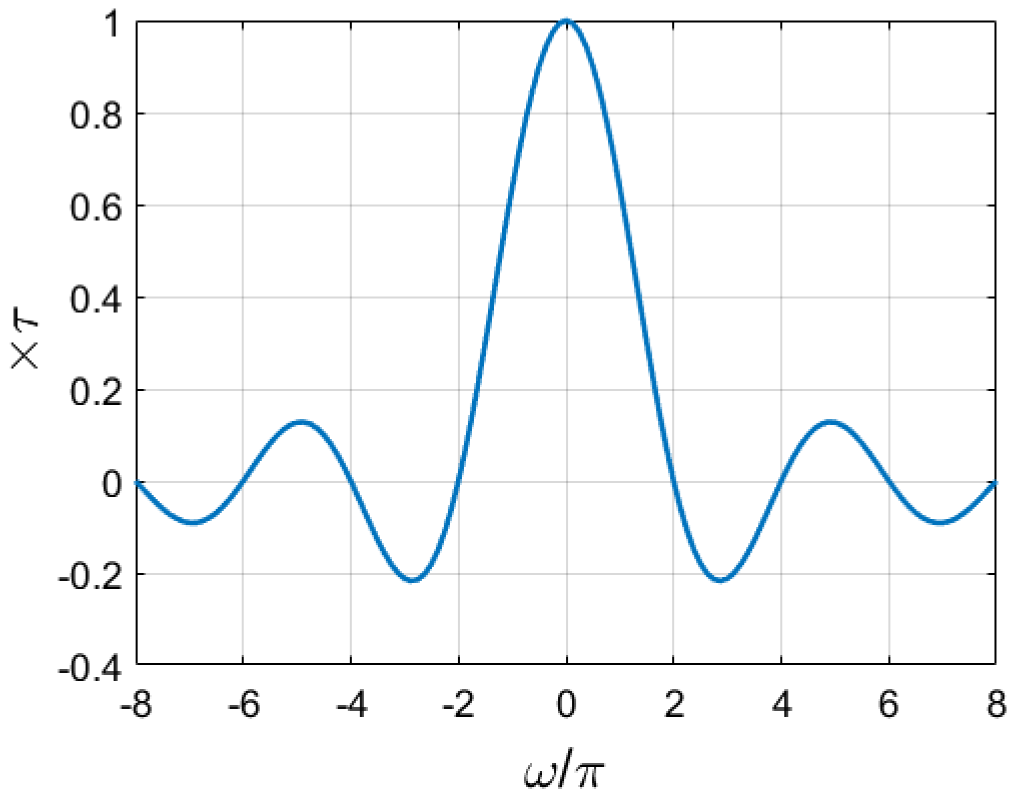
Para ω≠0

$$\mathcal{F}\{x(t)\}=X(\omega)=\int_{-\tau/2}^{-\tau/2}e^{-i\omega t}dt=\left.\frac{e^{-i\omega t}}{-\omega i}\right|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{2}{\omega}\frac{e^{i\omega\tau/2}-e^{-i\omega\tau/2}}{2i}$$

$$=\frac{2\tau/2}{1}\frac{sen(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=\tau\frac{sen(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Introdução a transformada de Fourier contínua

- A solução da função boxcar corresponde a função sinc, que pe definida como sen(ωt)/ω e que no limite de ω →0 vale 1

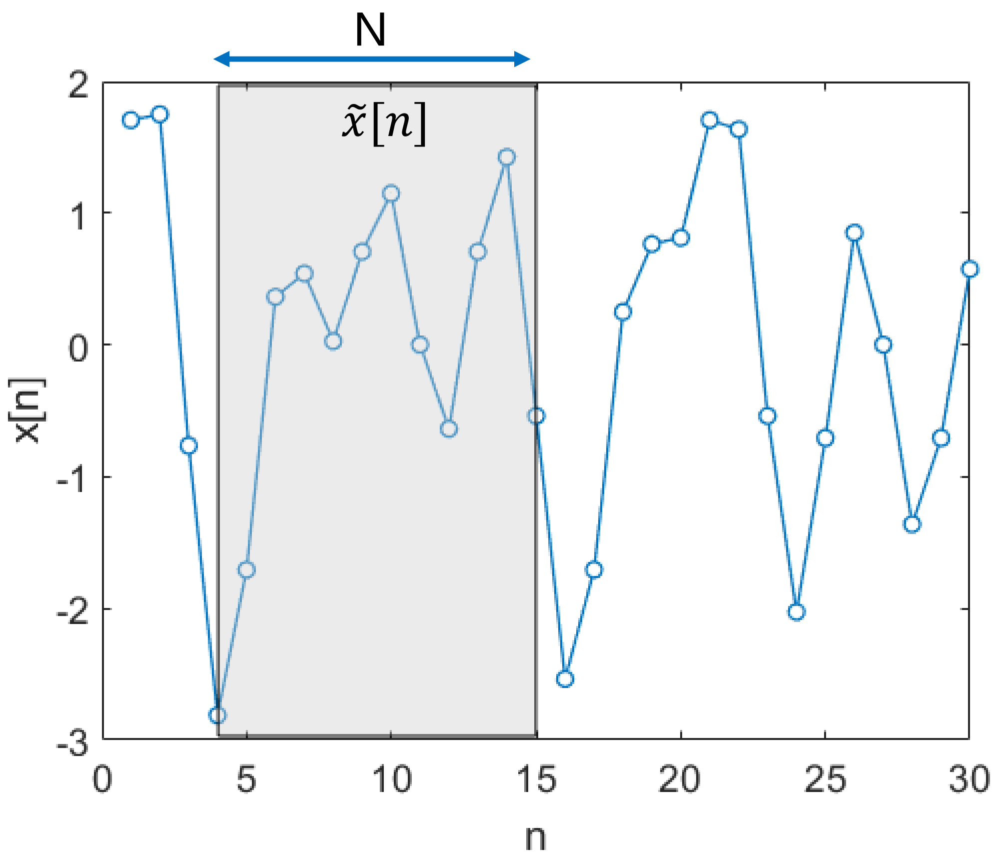


Introdução a transformada de Fourier discreta

- Foi visto que existe uma representação contínua no espectro de sinais contínuos no tempo, via transformação de Fourier.
- Para o processamento digital de sinais, as informações são discretas no tempo e finitas.
- Logo, é necessário adaptar os conceitos para um domínio discreto

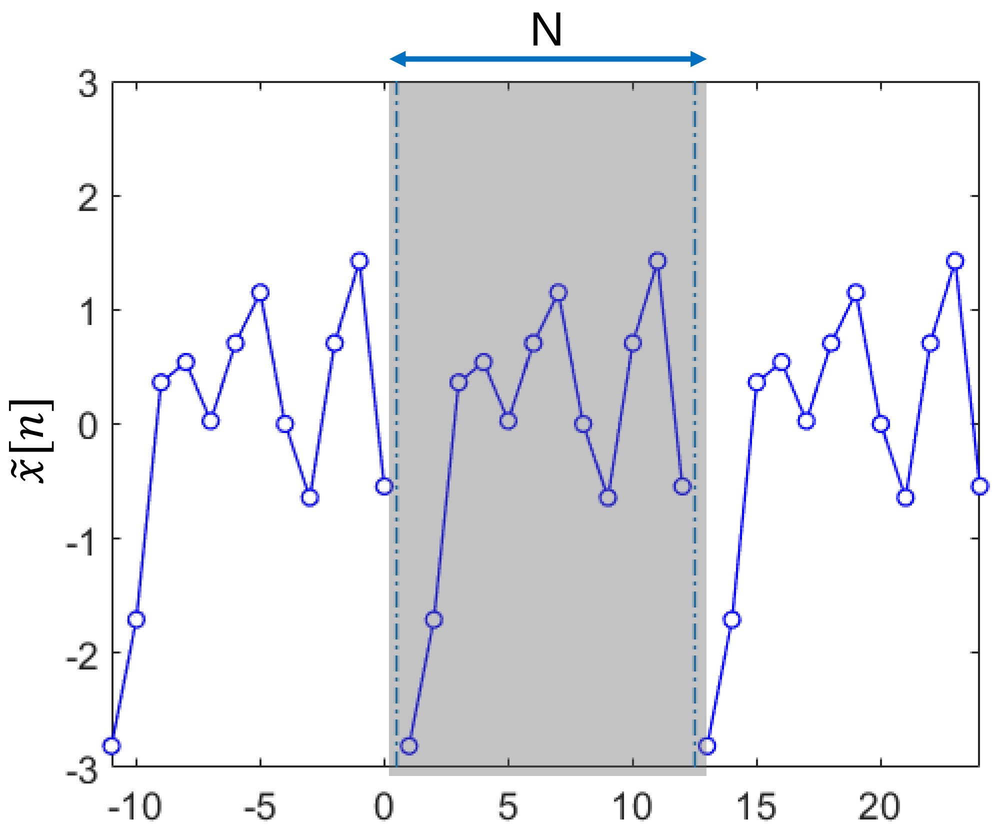
Introdução a transformada de Fourier discreta

- Para isso consideremos um sinal x[n] sem período definido. E um sinal periódico $\tilde{x}$[n], com período fundamental N, que contém parte de x[n].



Introdução a transformada de Fourier discreta

➢ Se o sinal $\tilde{x}[n]$ é periódico, ele pode ser visualizado conforme ilustrado abaixo.



Introdução a transformada de Fourier discreta

- Sendo $\tilde{x}$[n] um sinal periódico podemos representa-lo através da série de Fourier discreta

$$\tilde{x}[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i\omega_0 kn}$$

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-i\omega_0 kn}$$

- Apesar da série de Fourier ser uma aproximação de um sinal periódico, no caso de dados discretos e periódicos ela permite que todos os valores discretos de $\tilde{x}$[n] sejam recuperados com exatidão.

Introdução a transformada de Fourier discreta

- A prova dessa afirmação pode ser verificada conforme descrito a seguir.
- Sendo $$\tilde{x}[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i\omega_0 kn}$$
- A afirmação é verdadeira se:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i\omega_0 kn} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\tilde{x}[n]\}\}$$

- Para evitar confusão nos contadores do dado discreto, vamos chamar o $\tilde{x}$[n] dentro da transformada como $\tilde{x}$[r]

Introdução a transformada de Fourier discreta

- Assim, temos que a igualdade do slide anterior pode ser escrita como:

$$\sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i\omega_0 kn} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}[r]e^{-i\omega_0 kr}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\{\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}[r]e^{-i\omega_0 kr}\}e^{i\omega_0 kn}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{N}\tilde{x}[r]e^{-i\omega_0 k(r-n)}$$

- Alterando a ordem do somatório

$$= \sum_{r=0}^{N-1}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega_0 k(r-n)}\right\}\frac{1}{N}\tilde{x}[r]$$

Introdução a transformada de Fourier discreta

- Uma vez que k, n e r são inteiros, o somatório entre chaves é sempre zero, com exceção dos casos onde r=n

$$\left\{\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega_0 k(r-n)}\right\} = 0 \qquad para \;\; r \neq n$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega_0 k(r-n)}\right\} = N \qquad para \;\; r = n$$

- Voltando a igualdade do slide anterior, temos que

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=0}^{N-1}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega_0 k(r-n)}\right\}\frac{1}{N}\tilde{x}[r] = \tilde{x}[r]$$

- Isso demonstra que a transformação de sinais discretos permite recuperar exatamente os valores discretos da série temporal

Introdução a transformada de Fourier discreta

- Logo sinais discretos no tempo, possuem representação discreta no domínio da frequência e vice versa.
- Assim a definição da transformada de Fourier Discreta de um sinal x[n], pode ser escrita de maneira similar a série.

$$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i\omega_0 kn} \quad para\ k = 0,1,2,\ldots,(N-1)$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\omega_0 kn} \quad para\ n = 0,1,2,\ldots,(N-1)$$

- É importante notar hipótese implícita de periodicidade do sinal. Assim, amostras de sinais de sem periodicidade são consideradas como periódicas. Isso contrasta com a transformada contínua

Propriedades da transformada de Fourier

- As propriedades da transformada de Fourier discreta e da série são similares, portanto já foram discutidas na última aula
- Já a transformada contínua possui algumas diferenças em relação a série
- A transformada de Fourier resulta em uma função contínua no domínio da frequência, em contraste com a série de Fourier que é discreta nesse domínio.

Algumas propriedades da TF

Propriedade	Função (t)	TF (ω)
Linearidade	$\mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}y(t)$	$\mathrm{A}X(\omega) + \mathrm{B}Y(\omega)$
Deslocamento no tempo	$x(t - t0)$	$e^{-i\omega t0}X(\omega)$
Reflexão no tempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Multiplicação	$x(t)y(t)$	$X(\omega) \otimes Y(\omega)$
Convolução	$x(t) \otimes y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Diferenciação no tempo	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(i\omega)^n X(\omega)$
Integração no tempo	$\int x(t)dt$	$\frac{1}{i\omega}X(\omega)$
Simetria	Para $x(t)$ real	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $Re\{X(\omega)\} = Re\{X^*(-\omega)\}$ $Im\{X(\omega)\} = -Im\{X^*(-\omega)\}$

Transformada rápida de Fourier

- Para reduzir o número de operações e aumentar a eficiência no cálculo da transformada foram criados algoritmos chamados de transformadas rápidas de Fourier (Fast Fourier Transform- FFT).
- Nesses métodos o número de operações realizadas para o cálculo da transformada é reduzido para O(Nlog(N)) operações.
- Ex: Para uma série de 1024 dados:

N2=1048576;

Nlog(N)~3083!!!

Esses métodos são extremamente úteis mesmo com o atual aumento da capacidade de processamento dos computadores

Transformada rápida de Fourier

- Os coeficientes da FFT permitem que a amplitude e a fase do sinal sejam obtidos para cada modo k de maneira análoga à série de Fourier

$$A_k = \sqrt{re(X_k)^2 + im(X_k)^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{im(X_k)}{re(X_k)}\right)$$

Transformada rápida de Fourier

- Como os limites de integração são finitos, consequentemente a resolução no domínio das frequências fica limitada ao período de amostragem do sinal

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T} = \frac{f}{N}$$

- A frequência de cada modo k da FFT é dada por:

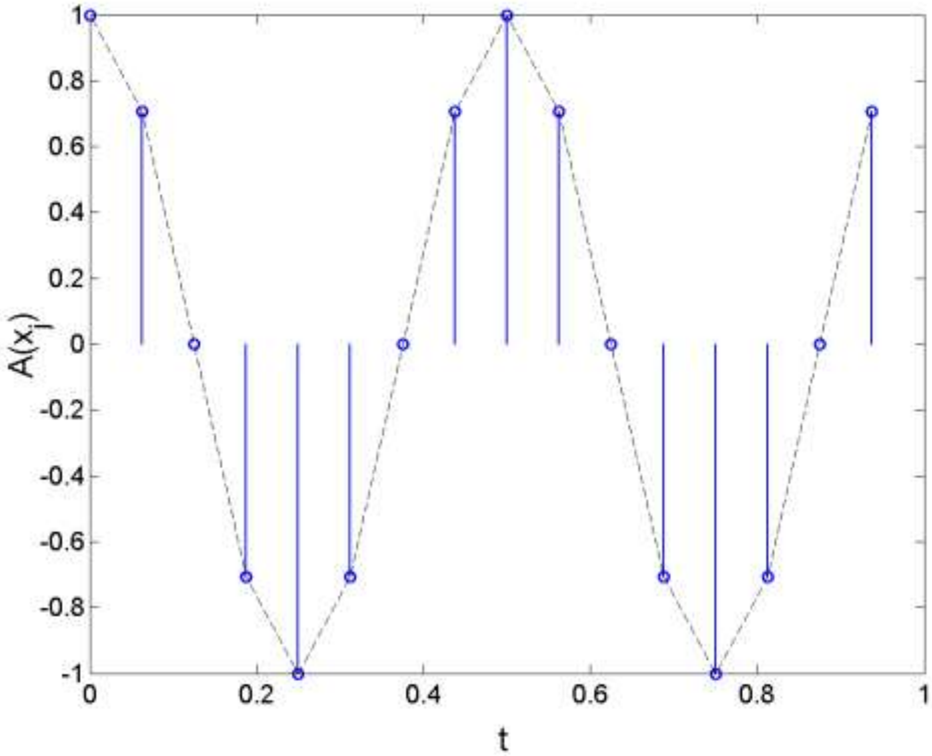
$$f_k = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{kf}{N}$$

Transformada rápida de Fourier

- Como já foi visto na aula passada, a discretização dos dados no tempo limita a máxima frequência observável no espectro.
- A relação entre intervalo de amostragem e a frequência máxima do espectro é dada pela teoria de amostragem de Shannon-Nyquist.
- A frequência máxima que pode ser resolvida é igual a metade da frequência de amostragem fs, onde $fs = 1/\Delta t$.
- Essa frequência limite é chamada de frequência de Nyquist.

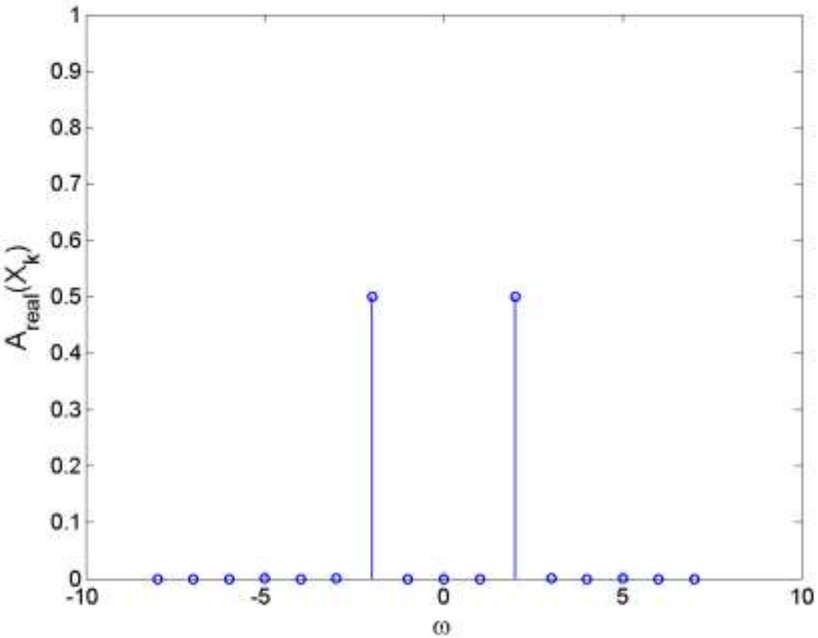
Transformada rápida de Fourier

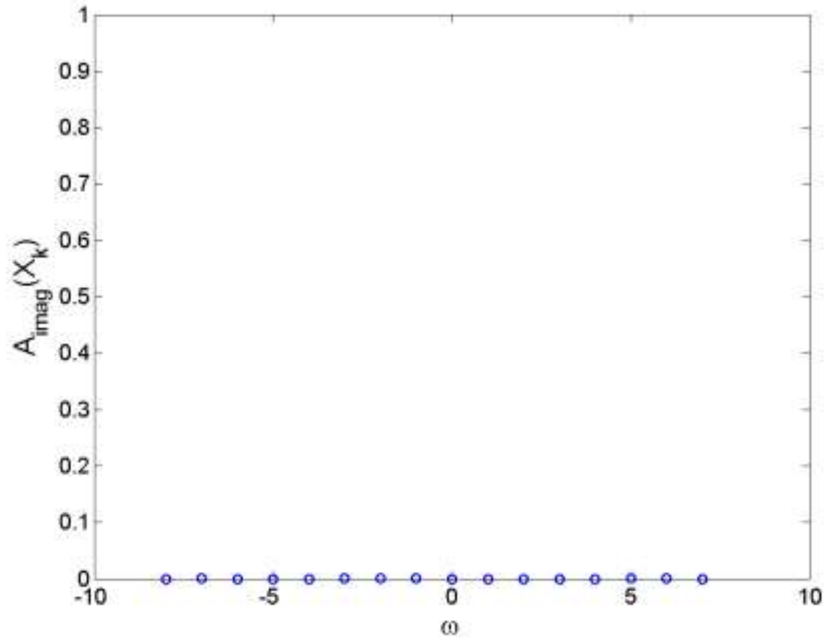
- Exemplo: $\cos(4\pi t)$ com t=[0,1| e com N=16



Transformada rápida de Fourier

- Exemplo: cos(4πt) com t=[0,1| e com N=16



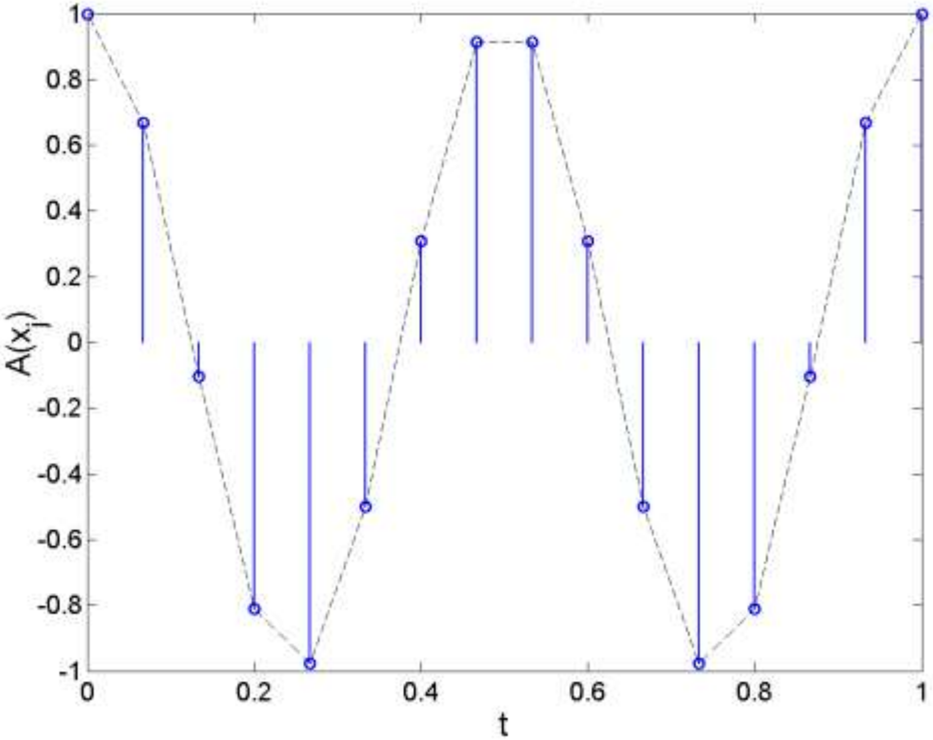


Frequências positivas e negativas? FFT assume periódico de –∞ a + ∞.

A transformada inclui também os valores do conjugado complexo dos coeficientes X_k, de modo que para uma série de dados real X_k=-i*X_{-k}.

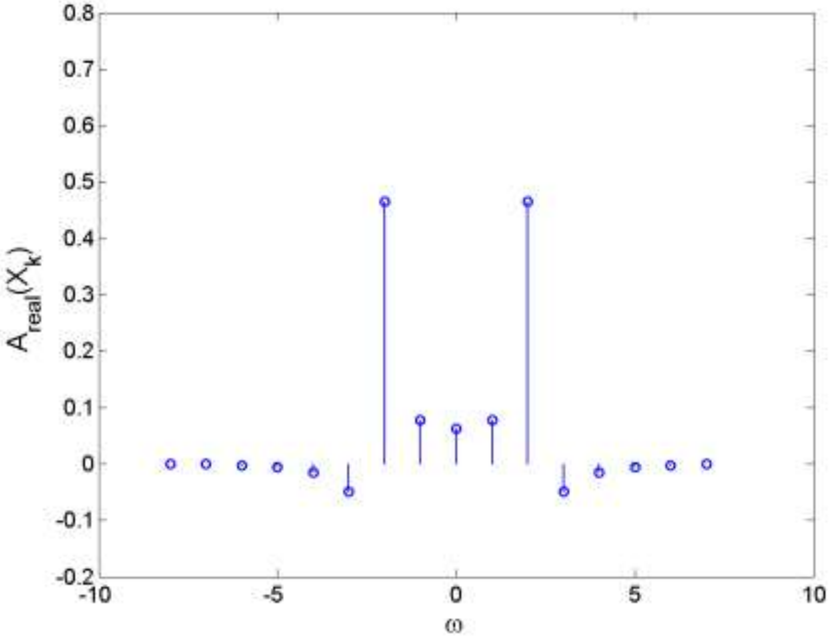
Transformada rápida de Fourier

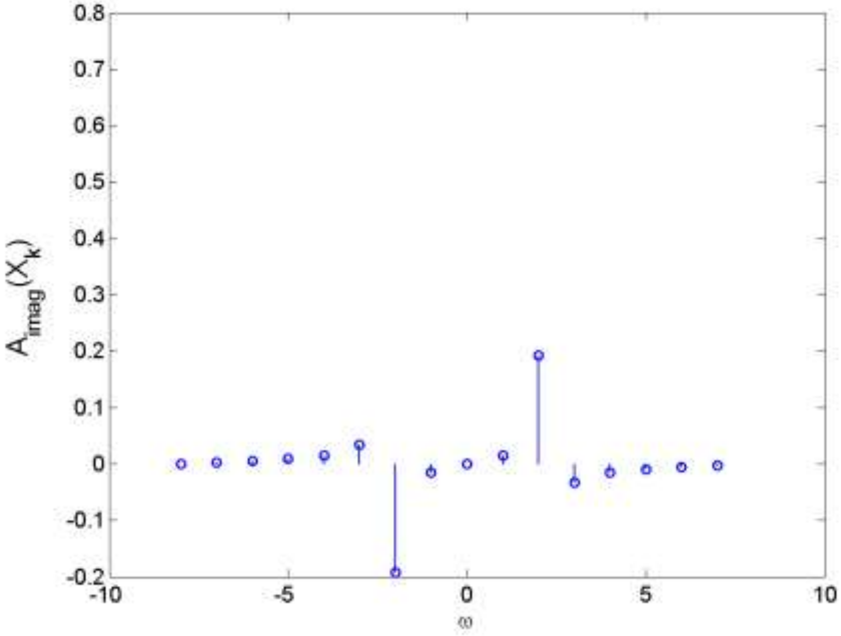
- Exemplo: cos(4πt) com t=[0,1] e com N=16



Transformada rápida de Fourier

➢ Exemplo: cos(4πt) com t=[0,1] e com N=16





➢ Apesar da frequência do cosseno não ter sido alterada, a transformada apresenta diferenças significativas ao caso anterior. Porque?

Algumas aplicações a problemas já vistos

- Lembrando do estimador da correlação cruzada de sinais estocásticos, estacionários e contínuos

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt$$

- No caso de sinais reais e que possuem transformada de Fourier, pode-se utilizar a propriedade de simetria para se escrever a correlação em termos de um produto no domínio da frequência (convolução no tempo).

Algumas aplicações a problemas já vistos

- Como $X(-\omega) = X^*(\omega)$, uma estimação alternativa para correlação pode expressa no domínio da frequência como:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)\right\} = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\} = \frac{1}{T}X^*(\omega)Y(\omega)$$

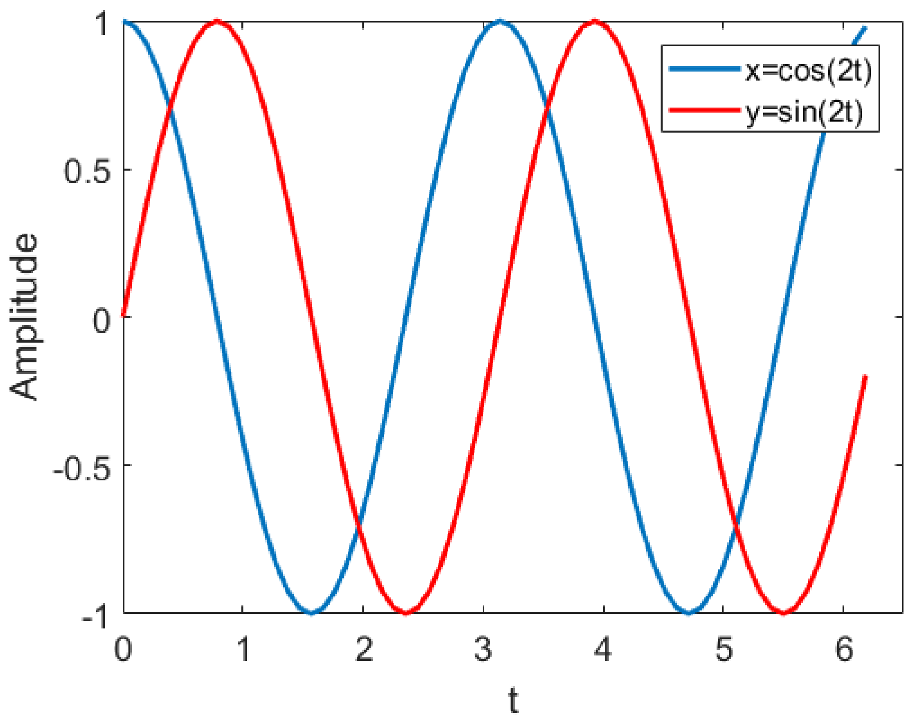
- No caso da autocorrelação, tem-se

$$\mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \frac{1}{T}X^*(\omega)X(\omega)$$

- Essas relações são verdadeiras e exatas para sinais contínuos de duração infinita e foram demonstradas independentemente por Einsten,Wiener e Khinchin.

Aplicações a problemas já vistos

- Exemplo: Correlação com transformada de Fourier



$$\mathcal{F}\{R_{xx}(k)\} \Rightarrow \frac{1}{T}|X(k)|^2$$

Para se estimar a correlação entre os sinais, no domínio do tempo, é necessário:

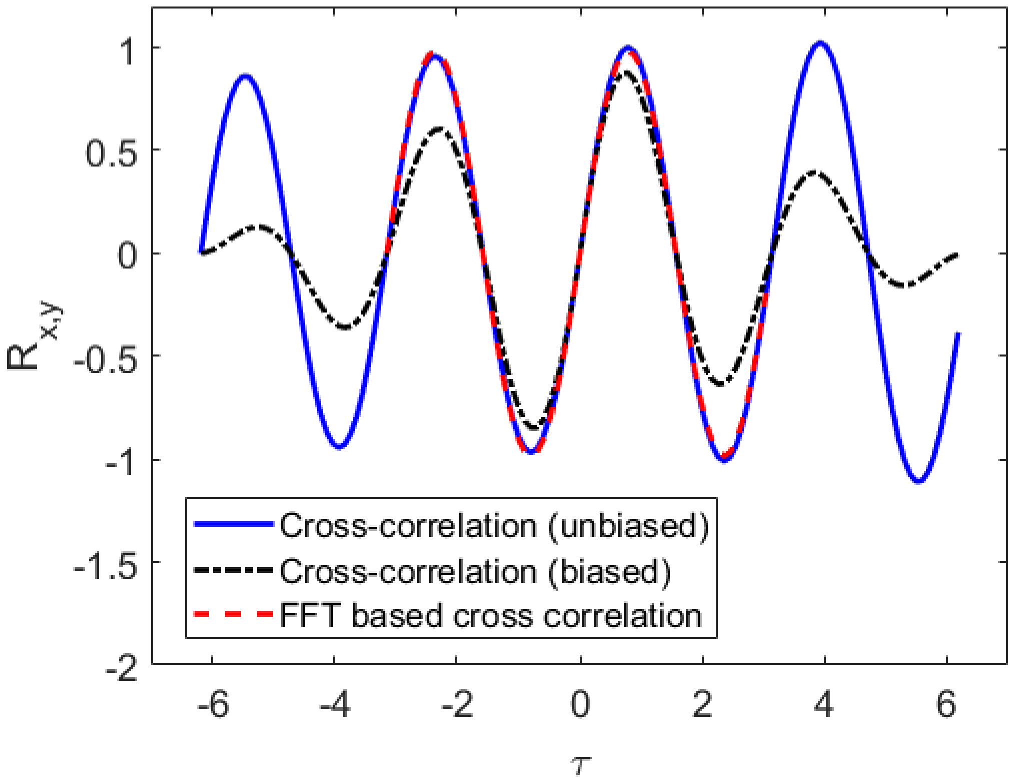
1)transformar os sinais para o domínio da frequência

2)efetuar o produto

3)retornar para o domínio do tempo

Aplicações a problemas já vistos

- Exemplo: Correlação com transformada de Fourier



No exemplo, observa-se que o cálculo com a FFT só é feito até +-N/2 (Nyquist)

Além disso, deve-se lembrar no caso da FFT o sinal é considerado periódico (no exemplo não há efeito de decaimento do valor de R com o aumento de τ)

Densidade Espectral de Potência

- Na análise de sinais, frequentemente, é muito útil conhecer a potência média contida no sinal. Pela relação de Parseval, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{-\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{-\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

- O módulo da função complexa $X(\omega)$é dado por$X^*(\omega)X\ (\omega)$, e representa a energia contida em cada frequência do sinal.
- Utilizando-se a correlação, pode-se estabelecer uma relação com Densidade Espectral de Potência S_{xx}.

$$S_{xx} = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \tilde{R}_{xx}(\omega) = \frac{1}{T}|X(\omega)|^2$$

Densidade Espectral de Potência

- A unidade da densidade espectral de potência é (Unidade do sinal)^{2}s ou (Unidade do sinal)^2/Hz
- No caso de sinais estocásticos, estacionários, discretos a estimação de S_{xx} a partir do produto de FFT não é uma aproximação exata. A demonstração pode ser encontrada em Bendat & Piersol 3rd. Ed (sec. 5.2.2 – Spectra Via Finite Fourier Transforms/ Oppenheim & Schafer 2nd Ed, chapter 11).
- A dedução formal não será discutida aqui, pois o foco é o uso da técnica no processamento de sinais.
- Na literatura, existem várias métodos para se tentar estimar PSDs.

Periodograma

- Dentre elas, uma bastante utilizada é o periodograma
- Adota-se aqui a notação sugerida no *Numerical Recipes (ISBN 0-521-43108-5)* para alguns estimadores da densidade spectral de potência não paramétrica (onde se assume que o sinal tenha uma distribuição conhecida).
- Assumindo que o periodograma I_T é um estimador de S_{xx}, para um sinal contínuo no tempo

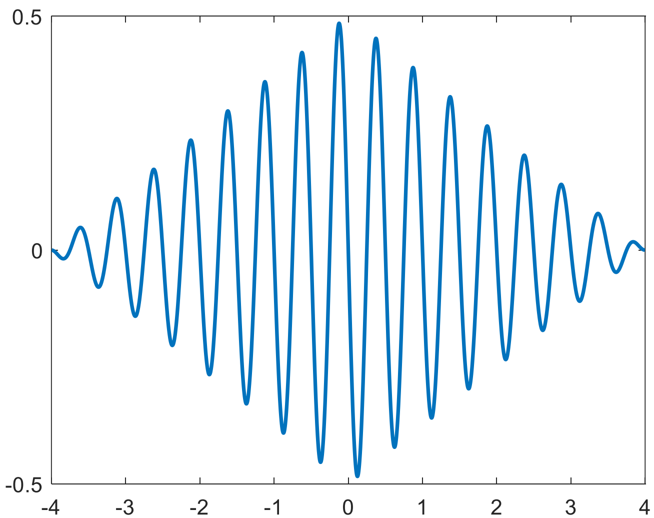
$$I_T(\omega) \Rightarrow \frac{1}{T}\left|X(\omega)\right|^2$$

- A definição equivalente para um sinal discreto pode ser escrita como:

$$I_N(k) \Rightarrow \frac{1}{N}\left|X(k)\right|^2$$

Periodograma

- O período de T pode ser visto como $N\Delta t$. Logo, é possível verificar que $I_T(\omega)$ está relacionado com $\Delta t I_N(k)$ e portanto o periodograma de tempos discretos pode ser entendido como uma versão em escala do periodograma contínuo.
- O periodograma é um estimador tendencioso, se considerarmos que a correlação de séries finitas tende a 0 nos limites de atraso



Periodograma

- A correção dessa tendência (unbiased autcorrelation) é dada por:

$$R'_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{j=1}^{N}(x_j)(x_{j+m}) \quad com \;\; m = -(N-1),\ldots,N-1$$

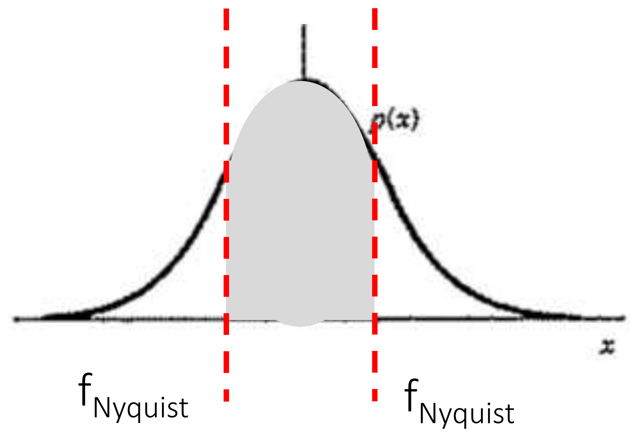
- Logo, o periodograma calculado a partir da correlação de uma série finita, equivale a transformada de Fourier da correlação não tendenciosa (unbiased) multiplicada por uma função do tipo.

$$w_N(m) = \left(\frac{N-|m|}{N}\right) \;\; com\; m = 0,\ldots.,N-1$$

- No espectro isso equivale a convolução entre a função wn e a densidade espectral.

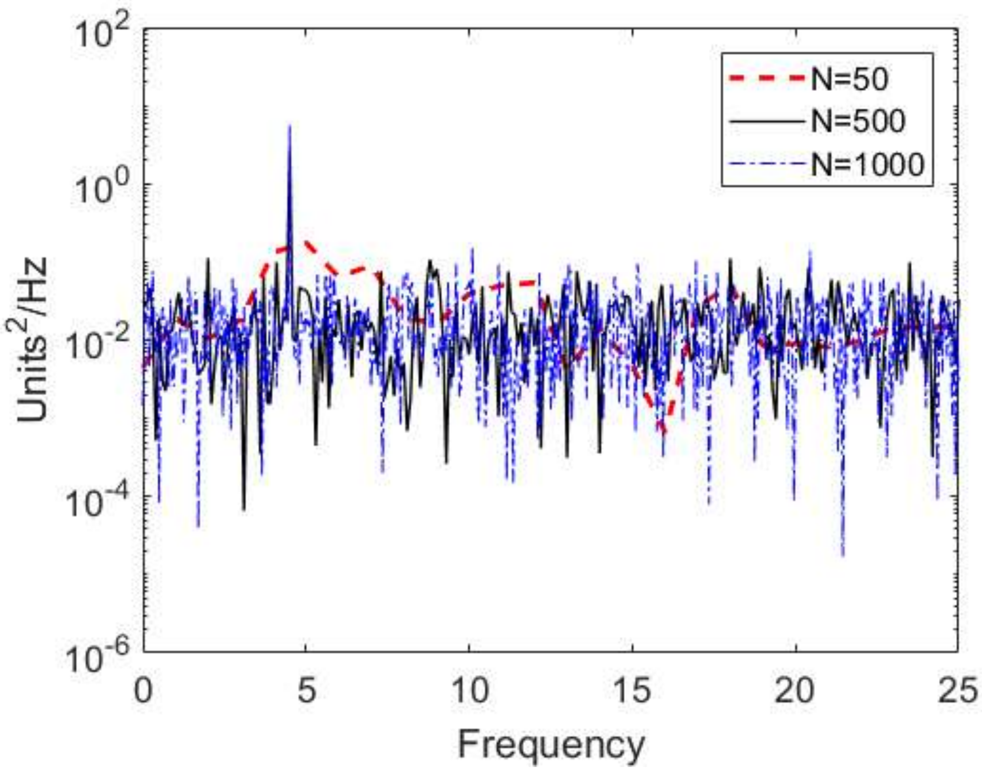
Periodograma

- Isso introduz o efeito de enjanelamento que causa algum espalhamento de energia. Esse espalhamento depende da transformada de Fourier da função wn (será visto em detalhe na aula que vem)
- Outra tendência advém do fato da frequência de amostragem ser finita. Logo a PDF das frequências fica restrita



Periodograma

- Uma observação importante é que a variância de I_N não diminui a medida que N aumenta. Além disso, para valores de m tendendo ao número de amostras a correção N-|m| a incerteza na estimação de $R'_{xx}(m)$ aumenta



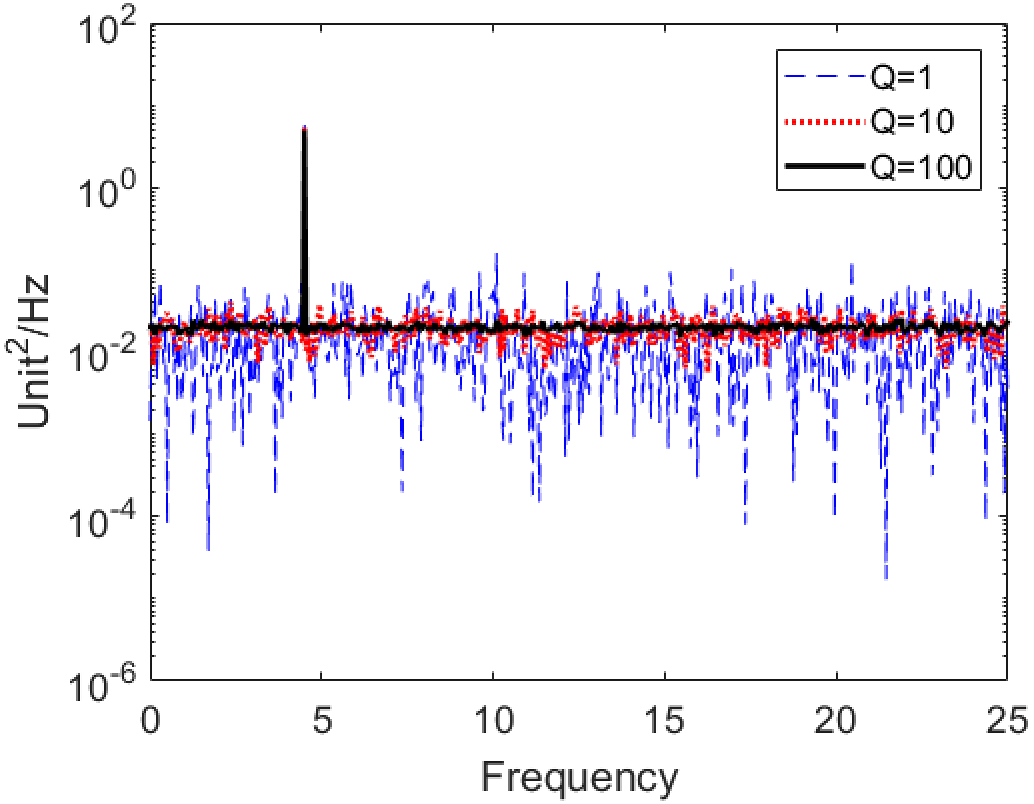
Periodograma

- Existem diversos métodos para se reduzir a variância no periodograma. Nessa aula será abordado o método da média de periodogramas.
- O conceito é simples, e consiste basicamente na extração de um periodograma médio a partir de diversos blocos de amostras.
- O método proposto por Barlett é o mais simples e se baseia na média de amostragens independentes.

$$\bar{I}_N(k) = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} I_N^{(q)}(k)$$

Periodograma

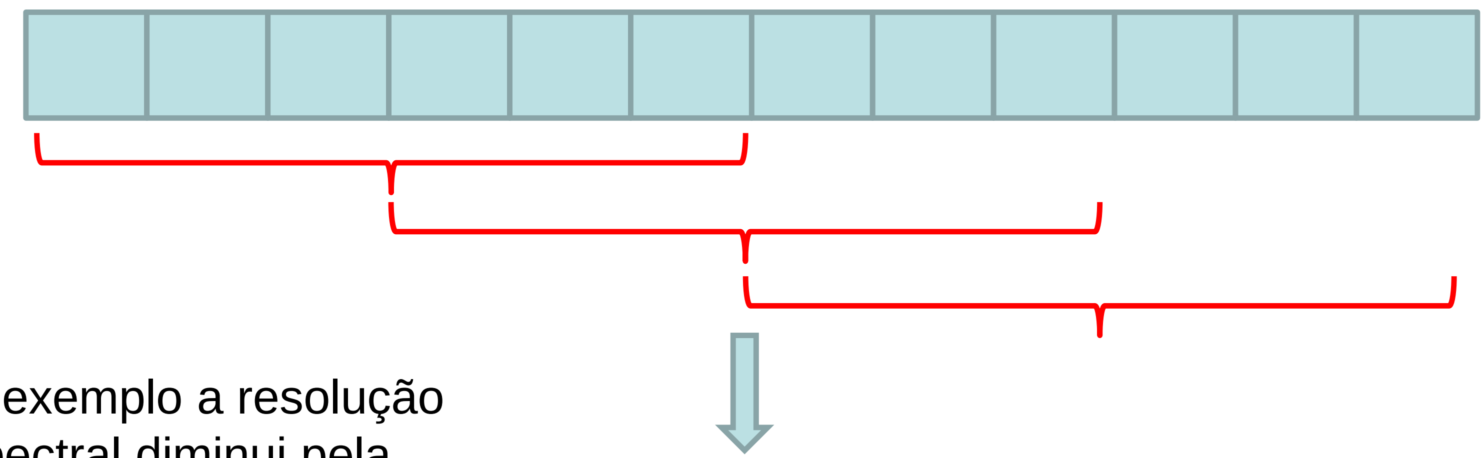
- Exemplo da redução de variância com a média dos periodogramas (N=1000 e Q=[1,100]) utilizando o método de Barlett



Periodograma

- Welch propôs aumentar o número de blocos de amostras independentes. Para isso ele sugeriu reduzir o número de dados em cada série e permitir a repetição de até 50% dos dados em cada bloco, conforme ilustrado abaixo

Amostras em um bloco

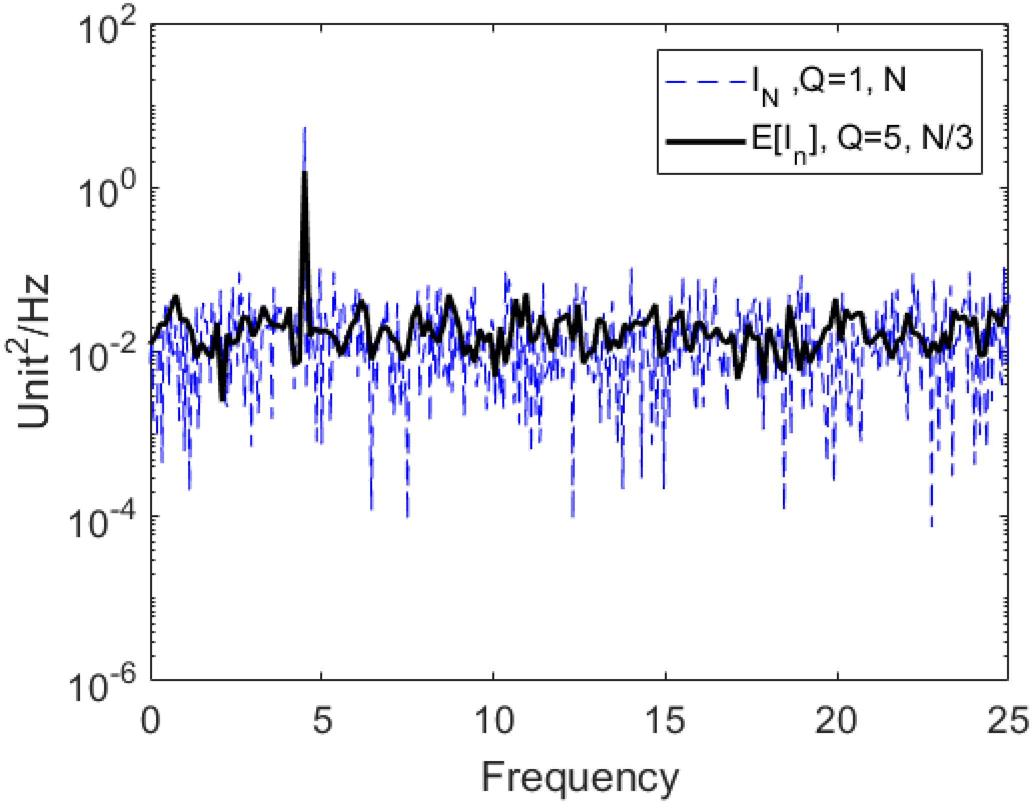


No exemplo a resolução espectral diminui pela metade e o número de blocos aumenta por um fator de 3

$$\bar{I}_N(k) = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} I_N^{(q)}(k)$$

Periodograma

- Exemplo de aplicação do método proposto por Welch (janela retangular)



Exercícios

- 1. Calcular a transformada de Fourier de um sinal senoidal monotônico discreto utilizando FFT. A frequência e o número de amostras utilizados fica a critério do aluno. Avaliar magnitude e fase. Analisar os resultados obtidos
- 2. Recalcular o espectro de magnitudes e fases do sinal utilizado no problema 1 utilizando somente 2/3 do número e amostras (arredondar para inteiro mais próximo). Comentar resultados e comparar com resultado do exercício anterior.
- 3. Aumentar o período de amostragem do sinal do problema 1, mantendo-se o intervalo de tempo entre amostras. Comentar os resultados e diferenças em relação aos espectros obtidos nos exercícios 1 e 2. anteriores
- 4. Calcular a série de Fourier da seguinte função periódica, com período de 2π

f(t) =-1 de 0 a π

=1 de π ate 2 π

Mostrar espectro de Magnitude e fase

Exercícios

- 5. Calcular a FFT do sinal x(t)
  t=0:2*pi/64:2*pi-2*pi/64;
  x=sign(-sin(t));
  Mostrar espectro de magnitude e fase. Comparar resultados com os do exercício 4

- 6. Utilizar a metodologia proposta por Barlett para estimar a densidade espectral de potência do sinal x(t) (copiar para a janela de comando do Matlab)

```
Fs = 50; % Frequencia de amostragem
T = 1/Fs; % Intervalo de amostragem
L = 50; % Numero de amostras
t = (0:L-1)*T; % tempo
for i=1:20
    x(:,i) = randn(size(t))+cos(8*pi*t);
end
```

- 7. Utilizar a metodologia proposta por Welch, com janela retangular, para estimar a densidade espectral de potência do sinal x(t). Reduzir o tamanho de cada bloco por um fator de 2.