Probabilidade combinada e amostragem condicional

Introdução

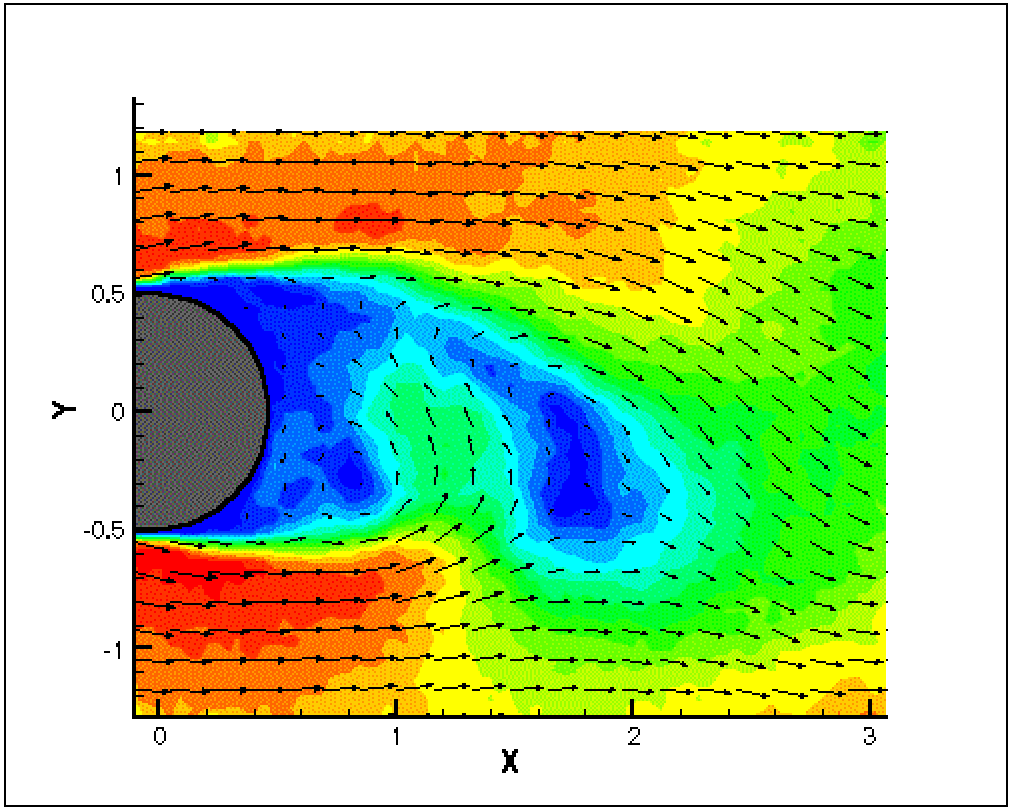
- O objetivo desta aula é apresentar algumas técnicas de análise de correlação entre sinais que são muito empregadas em processamento de sinais.

- O objetivo é descrever alguns princípios fundamentais que são necessários para a compreensão das ferramentas estatísticas apresentadas nessa aula

- Para complementar o que foi visto em sala sugere-se a leitura *Random data: Analysis and Measurement Procedures*. Dos autores: J. S. Bendat; A. G. Piersol.
  Conditional Sampling in Turbulence Measurement. Annual Rev. Fluid Mech., 1981. Autor: R. A. Antonia
  Hot-wire Anemometry – Principles and Signal Analysis. Autor: H.H. Bruun

Motivação

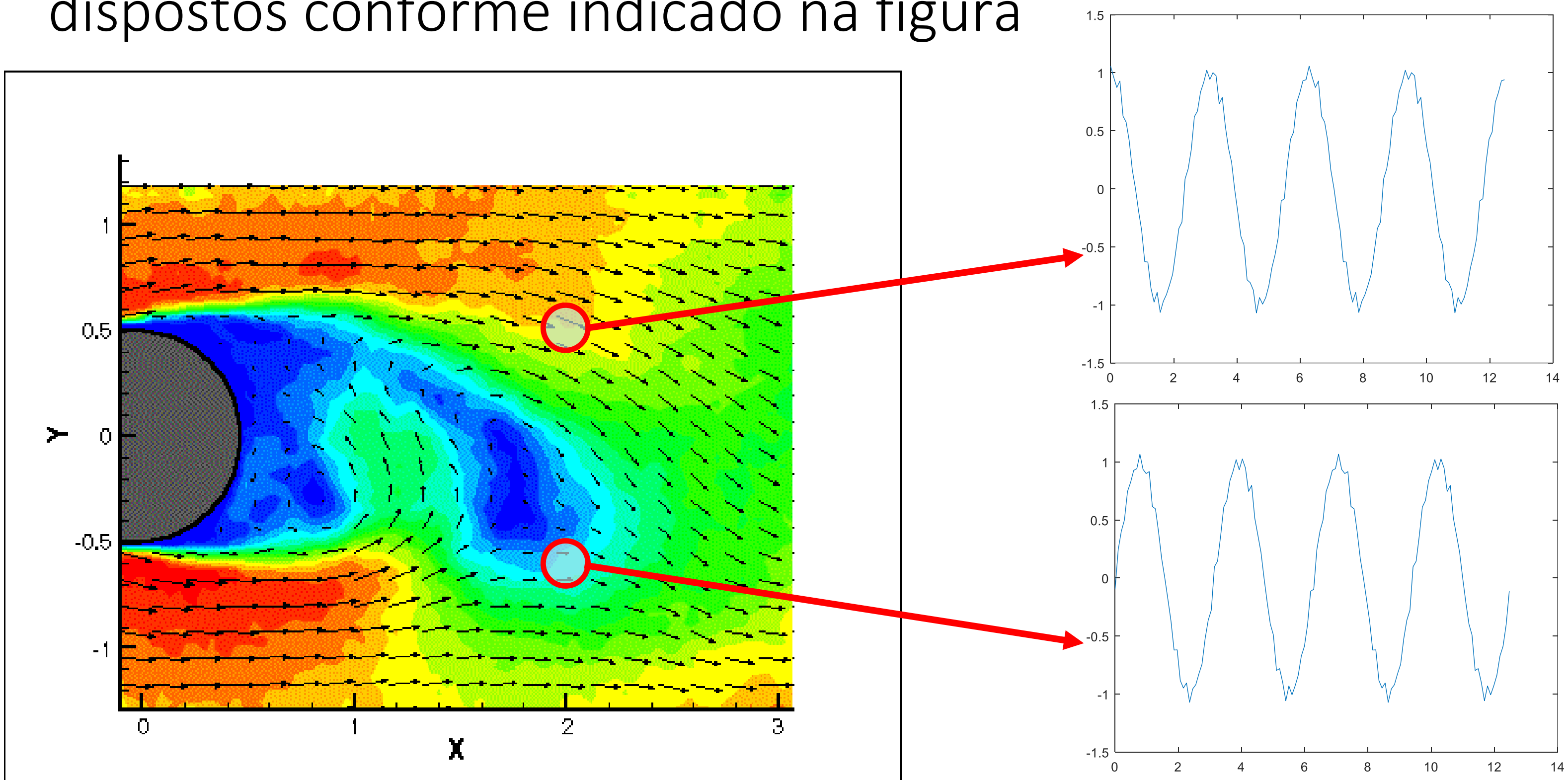
- Relembrando do exemplo do escoamento em torno de um cilindro (ilustrado na animação abaixo), onde somente dispõe-se de alguns poucos sensores de medição de velocidade e deformação da linha.



Introdução

- Qual ferramenta vimos na aula passada que permite identificar alguma relação entre dois sinais?

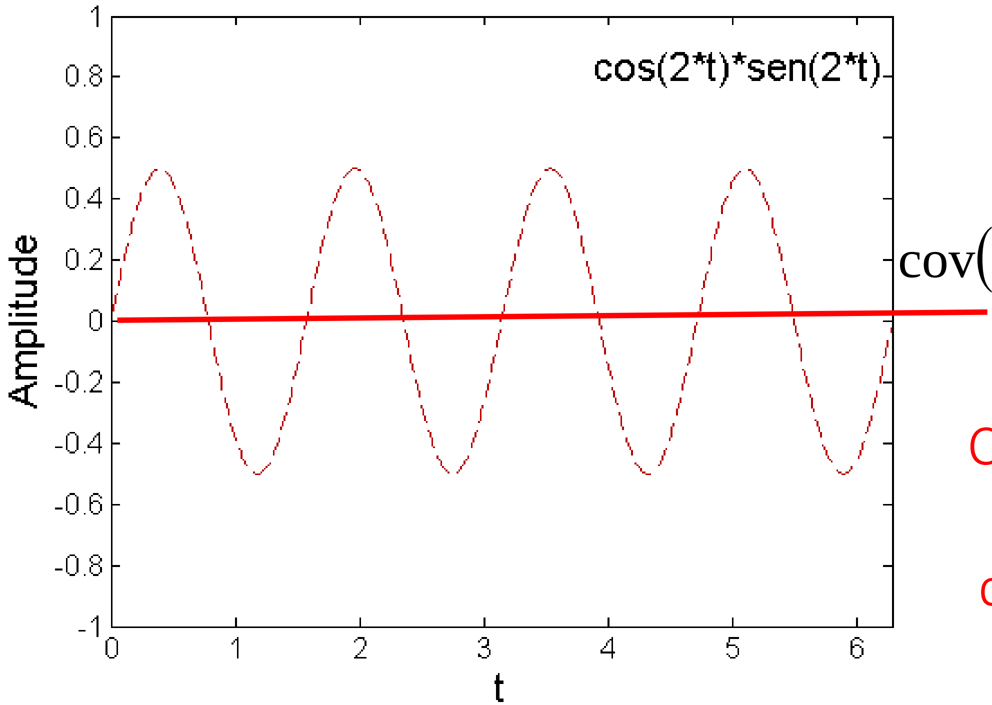
- Apesar de simples e muito útil, existem limitações no uso da covariância. Para ilustrar considere que os sensores estão dispostos conforme indicado na figura



Introdução

- Na situação ilustrada, apesar dos sinais estarem relacionados ao mesmo fenômeno, o que se espera do resultado da covariância (considerando, por exemplo um atraso de fase de π/2 entre os sinais)?

- Ex.: Covariância, seno e cosseno na mesma frequência



$$\mathrm{cov}(X,Y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_j)}{N} = 0$$

Como fazer então para avaliar se dois sinais possuem alguma correlacionados, mesmo que as fases sejam diferentes?

Autocorrelação e correlação cruzada

- A fase em um sinal temporal periódico pode ser vista como um atraso de tempo, na forma:

$$x(t+\tau) = \cos(\omega t + \varphi) = \cos[\omega(t+\tau)]$$

- De acordo com a equação da covariância, apresentada no slide anterior, o cálculo é feito para um atraso de fase constante (no caso, τ=0).
- Entretanto, o cálculo pode ser realizado para sinais com diferentes atrasos de fase (diferentes instantes de tempo):

cov[x(t1),y(t2)] ou cov[x(t+ τ1),y(t+τ2)]

Autocorrelação e correlação cruzada

- No caso de t1=t e t2=t+ τ, pode-se escrever que:

$$\mathrm{E}[x(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)p(x,y)dxdy = R_{xy}(\tau)$$

- O valor esperado Rxy, varia com o atraso de tempo τ. Logo, variando-se esse atraso é possível avaliar a correlação entre sinais para diferentes instantes de tempo. Essa expressão é conhecida como correlação cruzada.

- Para sinais discretos a expressão fica (com τ discreto e igual a kΔt, com k inteiro)

$$R_{xy}(\tau = k\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j)(y_{j+k})}{N}$$

Autocorrelação e correlação cruzada

- No caso onde x=y, a expressão é conhecida como autocorrelação. Nesse, caso a expressão fica:

$$R_{xx}(\tau = k\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j)(x_{j+k})}{N}$$

- Para sinais estacionários, as autocorrelações são funções pares de τ, assim

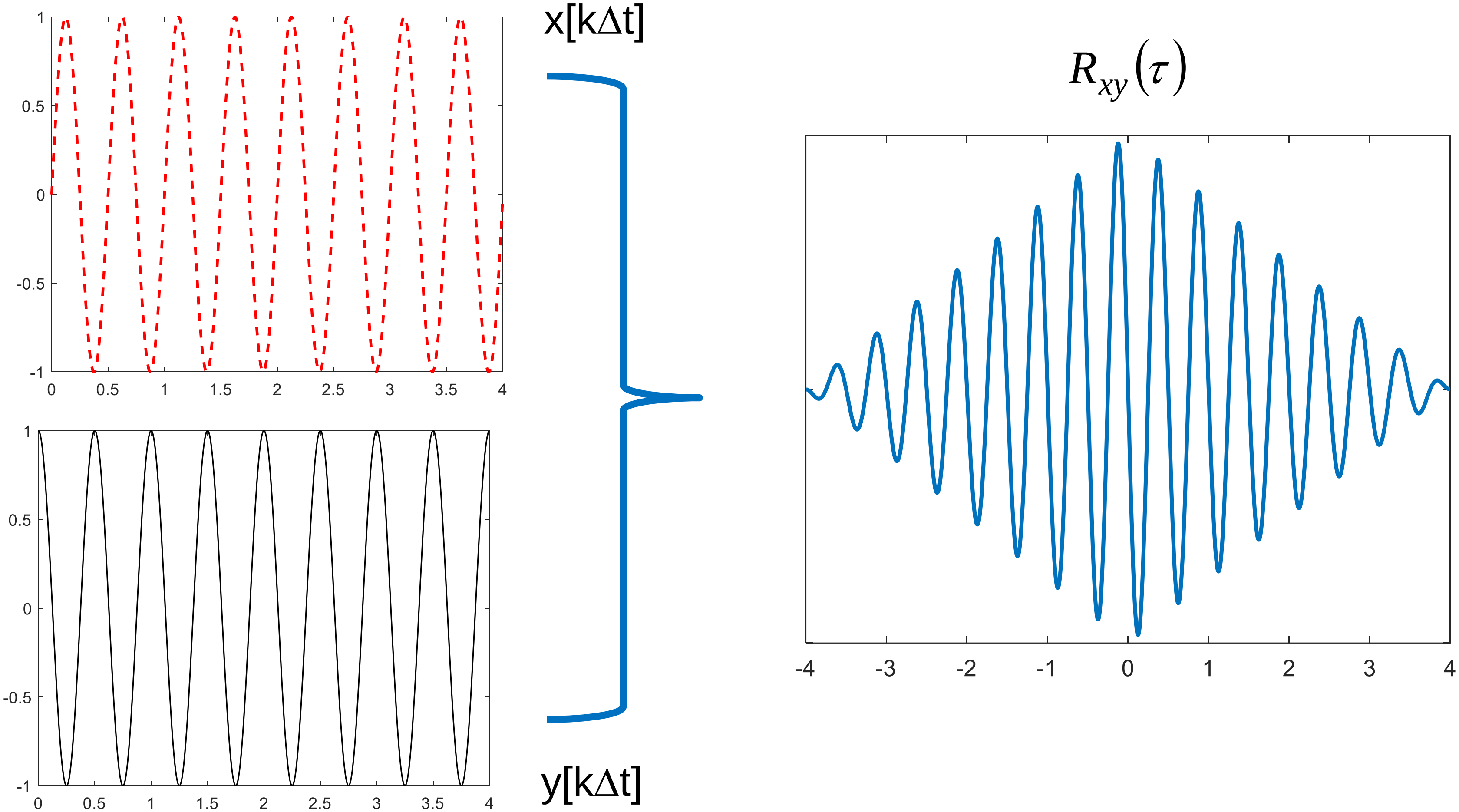
$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

- A correlação cruzada não é nem par nem impar, mas em alguns casos também pode satisfazer a relação. Ex. sinais monocromáticos

$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

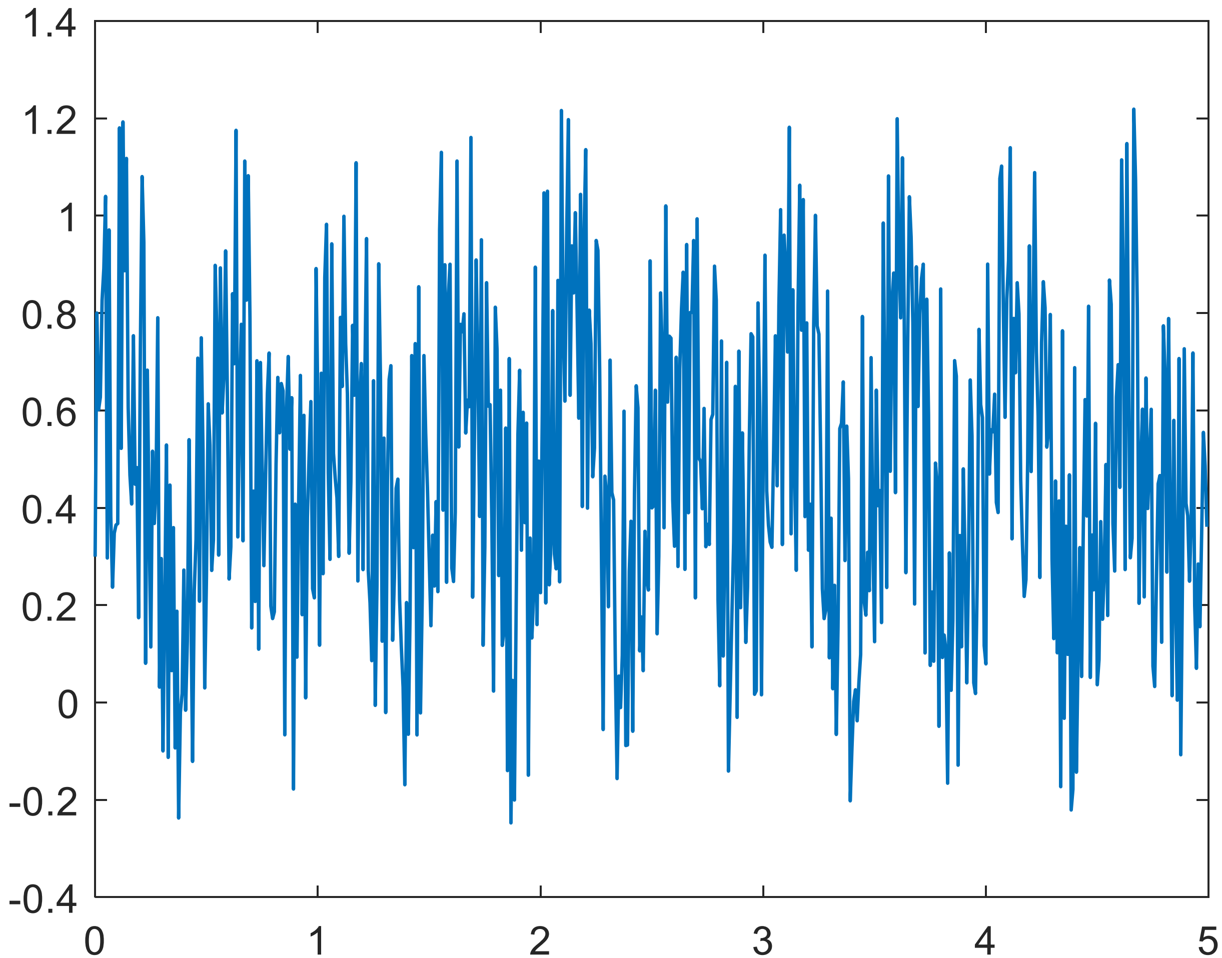
Autocorrelação e correlação cruzada

- Exemplo: Considere as séries temporais do exemplo da esteira do cilindro



Autocorrelação e correlação cruzada

- Exemplo: Considere a seguinte série temporal.

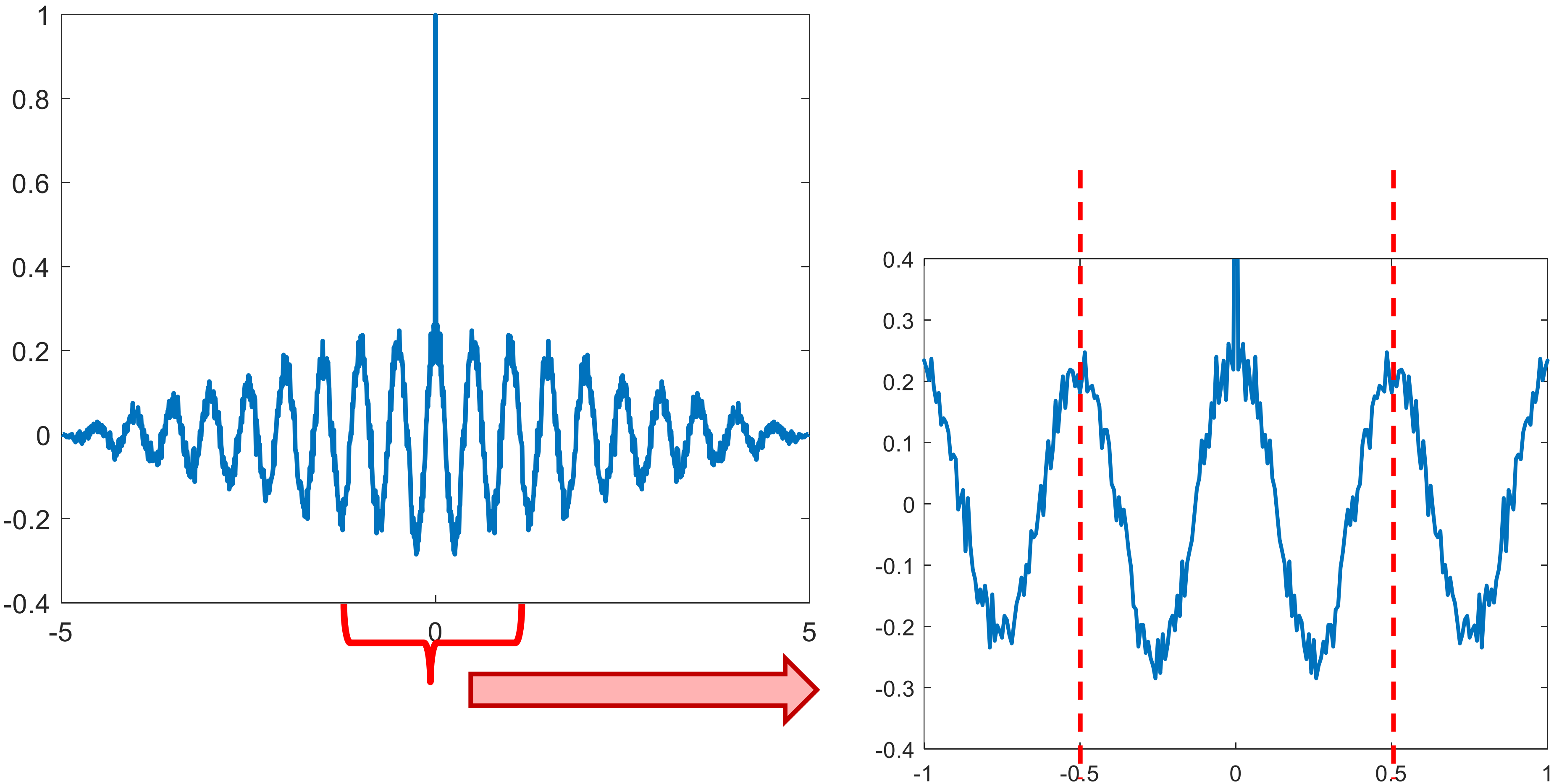


É possível identificar alguma periodicidade nesse sinal?

Se sim, qual o período?

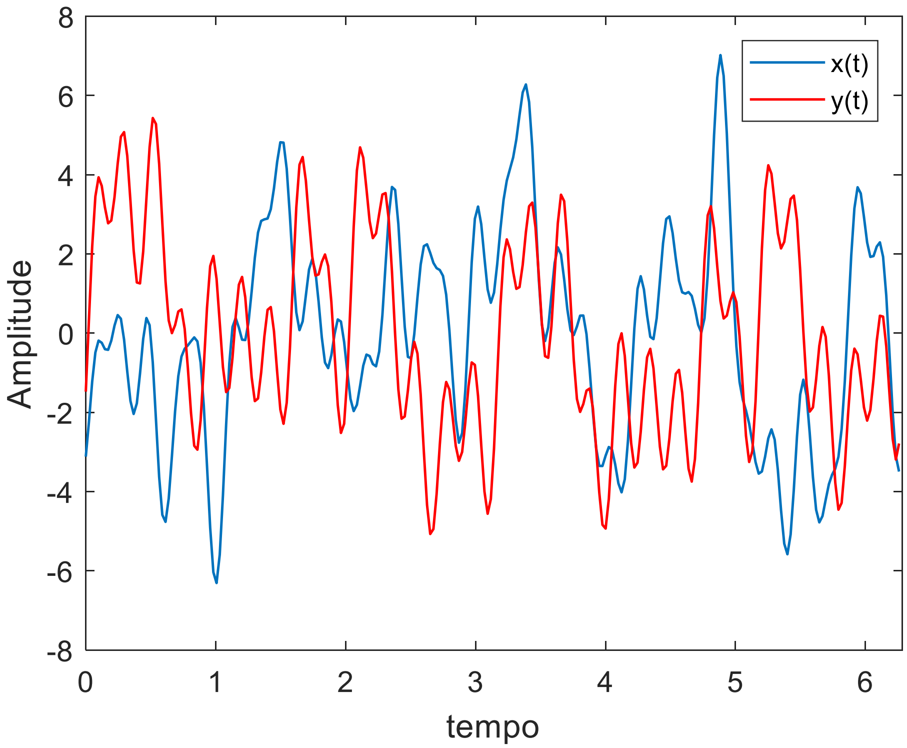
Autocorrelação e correlação cruzada

- Exemplo: Autocorrelação do sinal



Autocorrelação e Correlação Cruzada

- Exemplo2: Correlação cruzada entre sinais



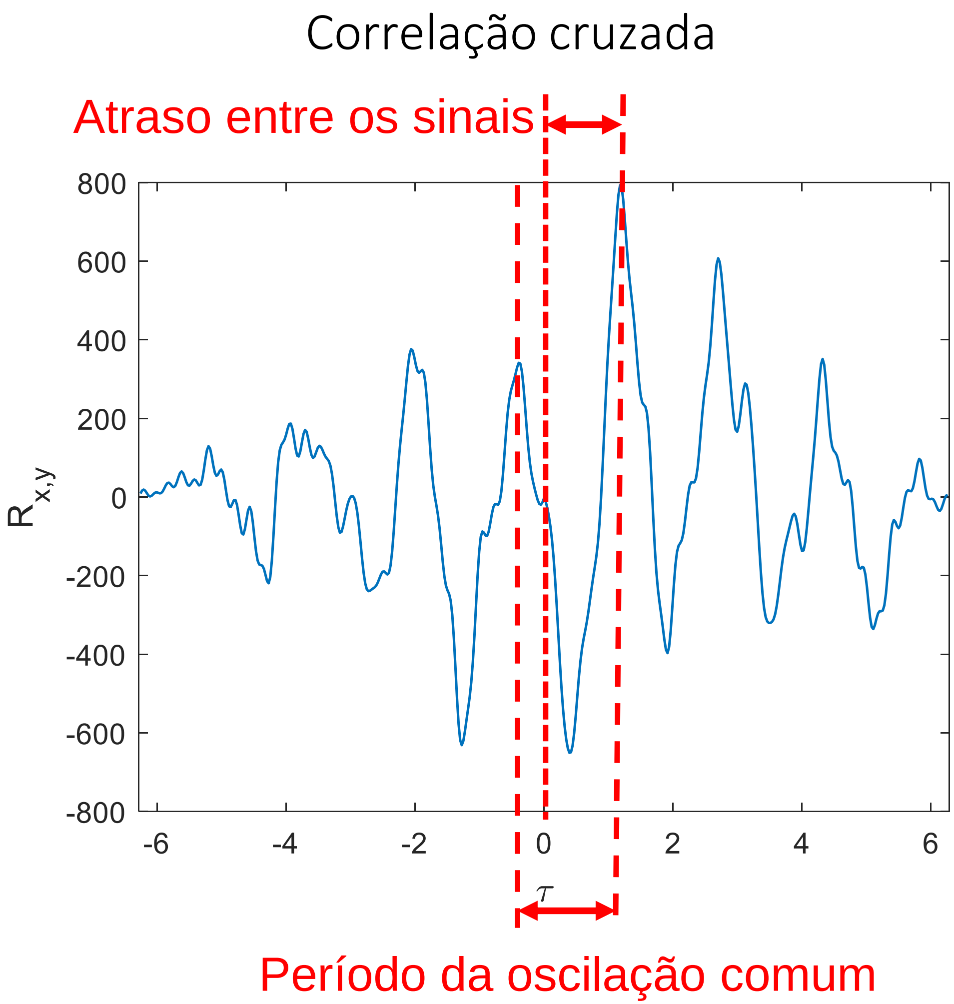
Perguntas: Os sinais tem alguma correlação?

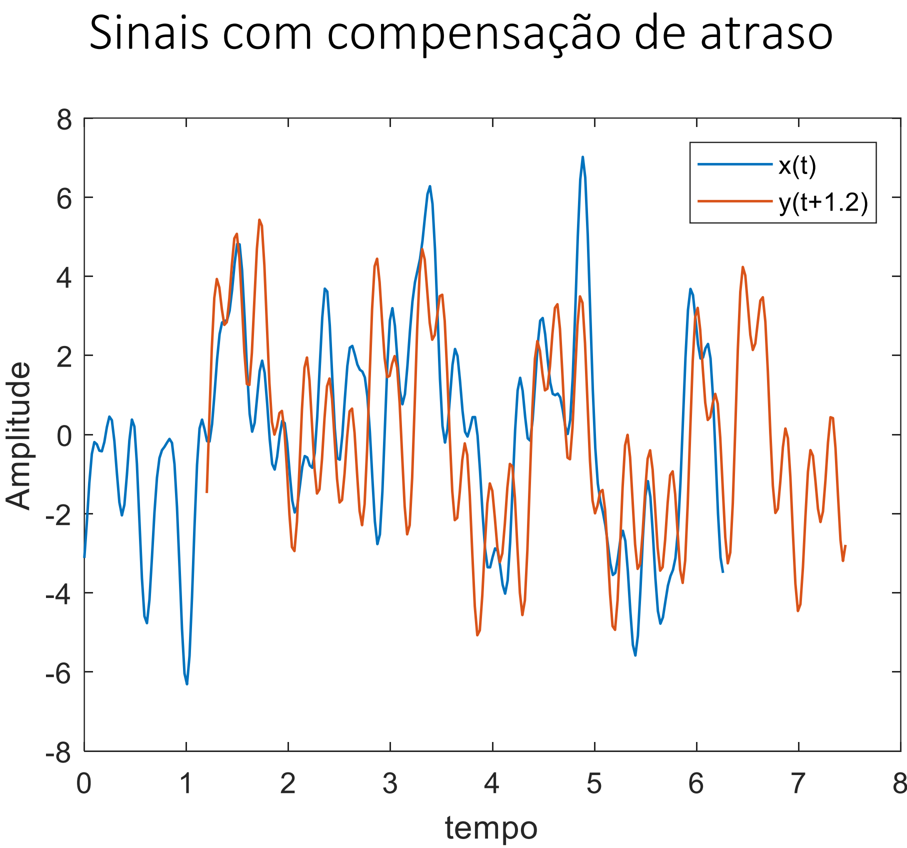
Qual o período da oscilação comum aos dois sinais?

Qual o atraso de tempo entre a parte correlata dos sinais?

Correlação Cruzada

➤ Exemplo2: Correlação cruzada entre sinais





Correlação Cruzada vs. Covariancia

- A correlação cruzada para um certo instante atraso de tempo é parecida com a covariância, mas existem diferenças.
- Observe que:

$$R_{xy}(\tau = k\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j)(y_{j+k})}{N} \qquad \mathrm{cov}(X,Y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_j)}{N}$$

- Nota-se que na covariância os sinais a média é subtraída do sinal e na correlação isso não acontece.
- Logo, deve-se sempre lembrar que a correlação de sinais com média diferente de zero, tende a representar o produto entre as médias dos sinais.

Coeficiente de Correlação Cruzada

- Para sinais estocásticos estacionários e com médias iguais a zero, a correlação cruzada pode ser normalizada de maneira análoga a covariância.

$$Cross\_correlation\_coeficient = \frac{R_{xy}\left(\tau = k\Delta t\right)}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{y}}$$

- O coeficiente é igual a 1 para sinais perfeitamente correlacionados e em fase, -1 para sinais perfeitamente correlacionados com defasamento de 180º e 0 para sinais não correlacionados

Correlação Cruzada vs Convolução

- A correlação cruzada exibe similaridades com a convolução.

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

$$Conv(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt$$

$$R_{xy}(k) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j)(y_{j+k})}{N}$$

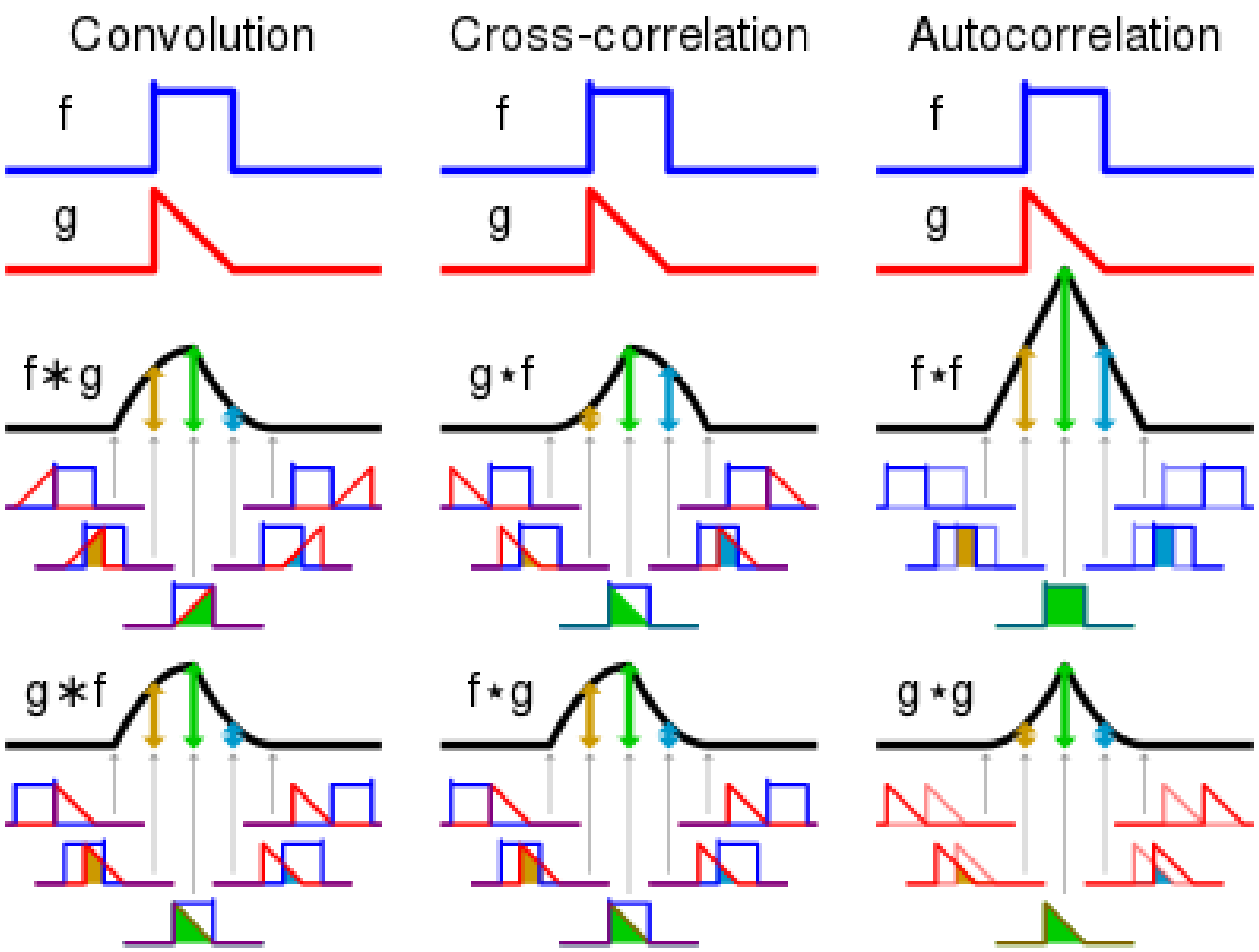
$$Conv(k) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j)(y_{k-j})}{N}$$

$$R_{xy} = x \star \mathrm{y}$$

$$Conv = x \otimes \mathrm{y}$$

Comparação

- Comparação gráfica entre operações



Fonte: Wikimedia.org

Correlação Cruzada 2D

- No caso de imagens e reconhecimento de padrões em matrizes, utiliza-se a correlação 2D.

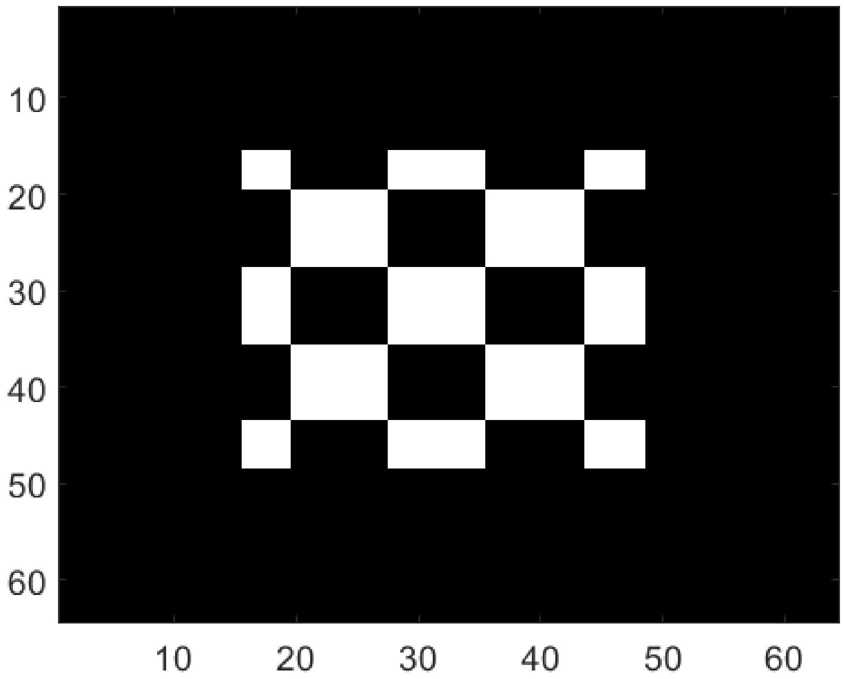
$$R_{xy}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1, t_2) y(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

- Que na forma discreta fica

$$R_{xy}(k_1, k_2) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2} \frac{\left(x_{j_1, j_2}\right)\left(y_{j_1+k_1, j_1+k_1}\right)}{N_1 N_2}$$

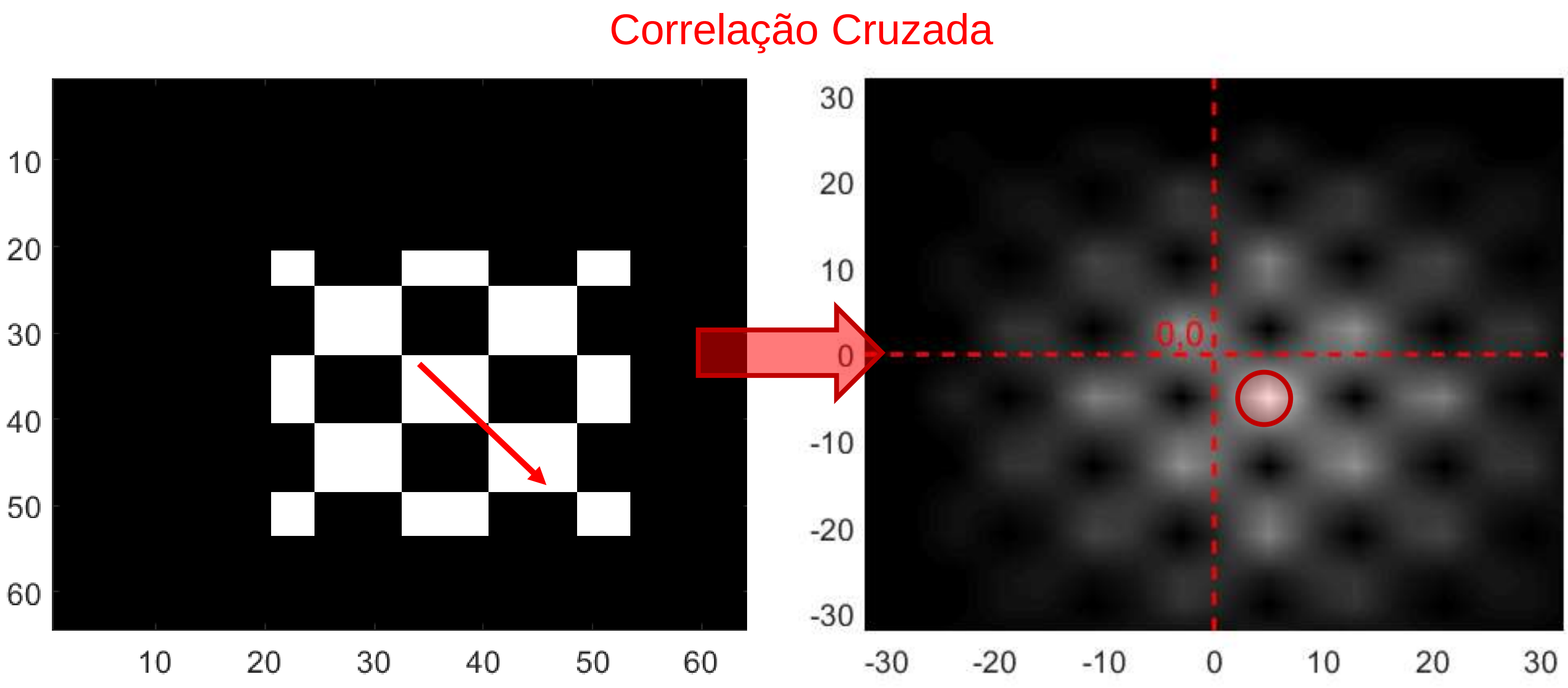
Correlação Cruzada 2D

- Exemplo



Correlação Cruzada 2D

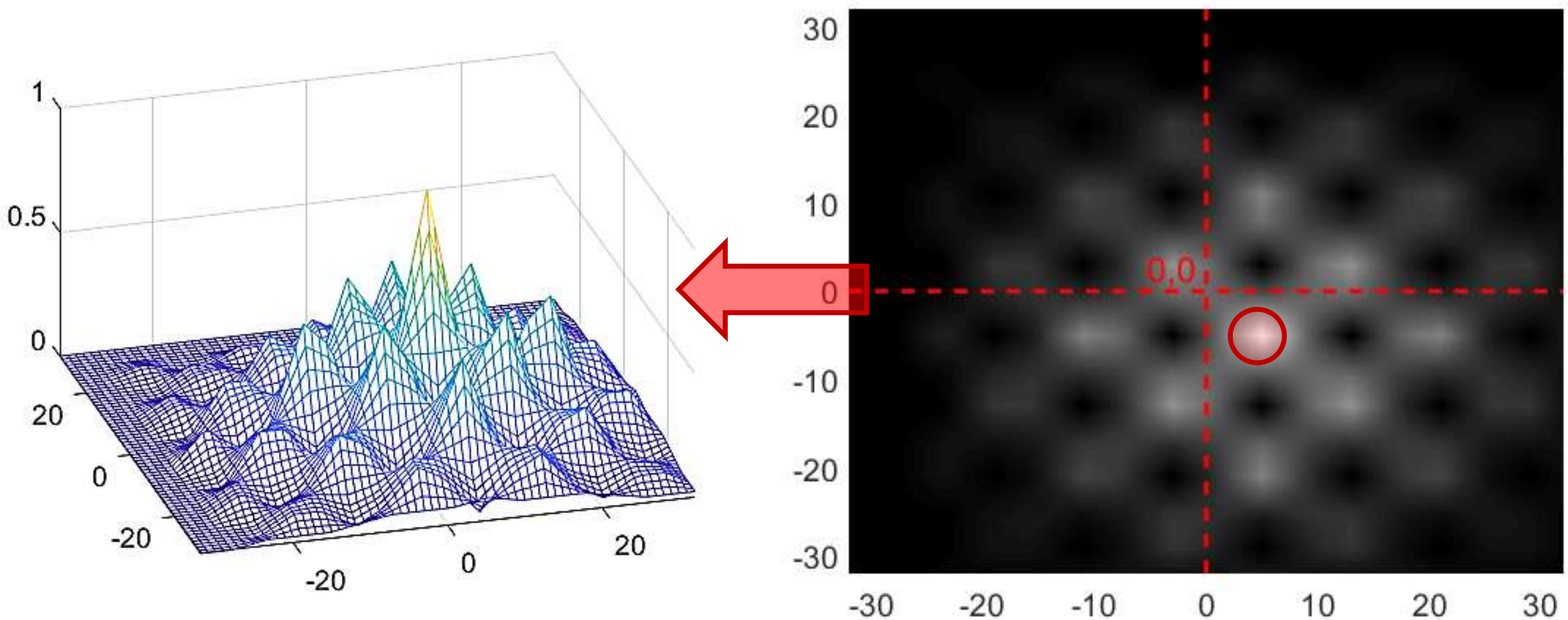
- Exemplo



Correlação Cruzada 2D

- Exemplo

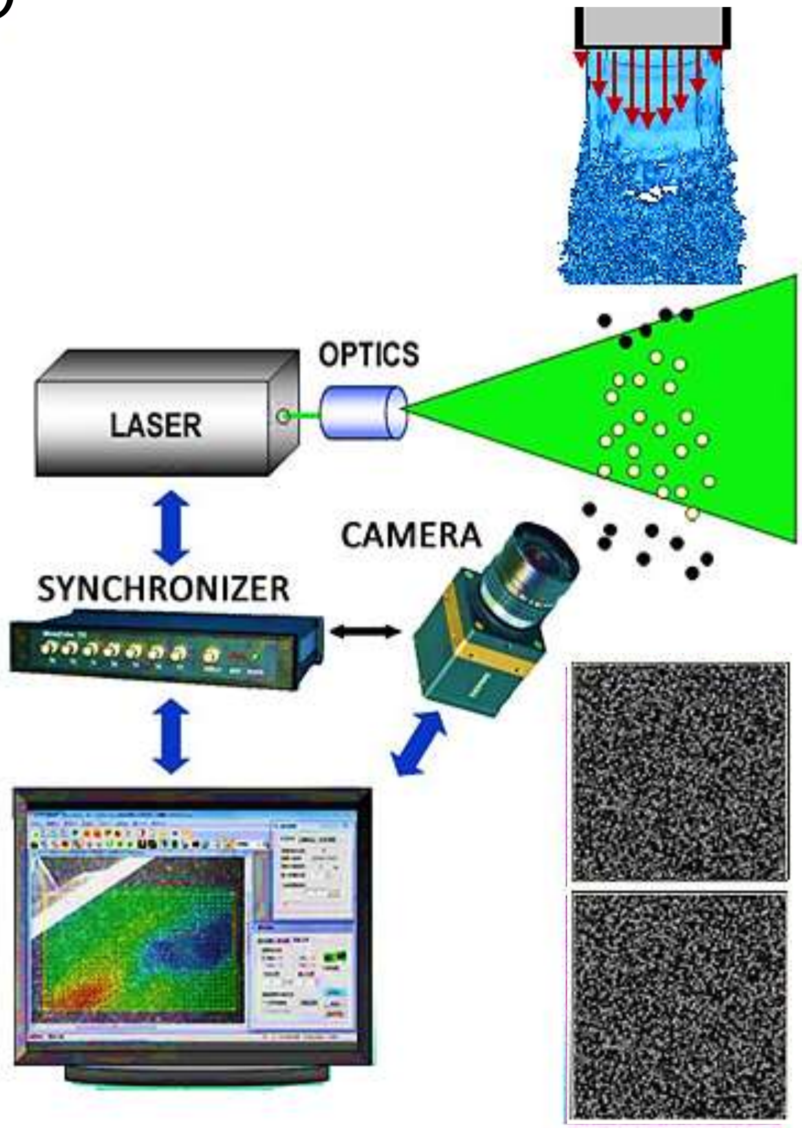
Correlação Cruzada



Correlação Cruzada 2D

- Exemplos de Aplicações:

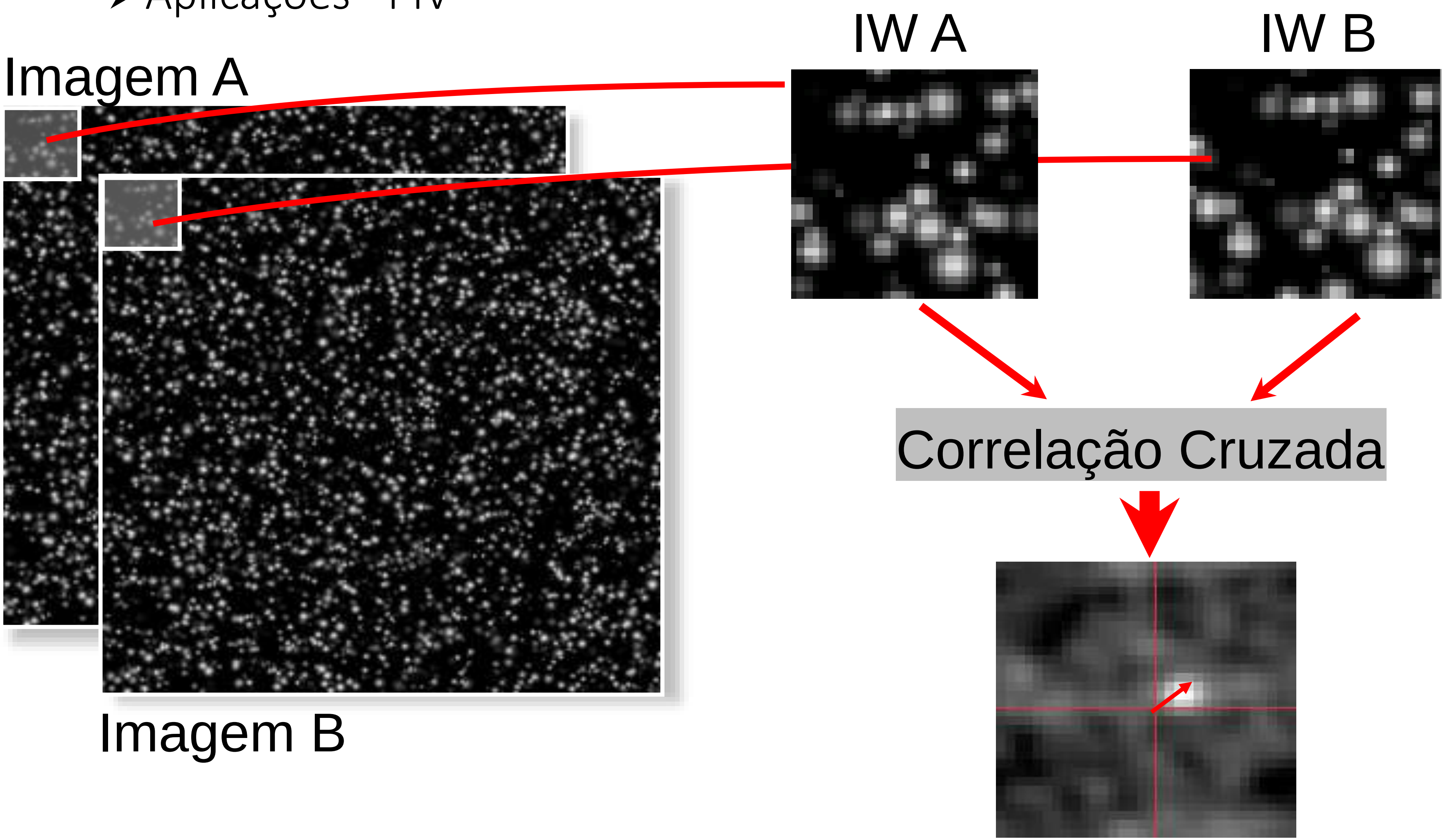
  Medições de campos
  de velocidade a partir
  de imagens de partículas
  Particle Image Velocimetry
  (PIV)



Adaptado de http://www.piv.com.sg/PIV_Principles.html

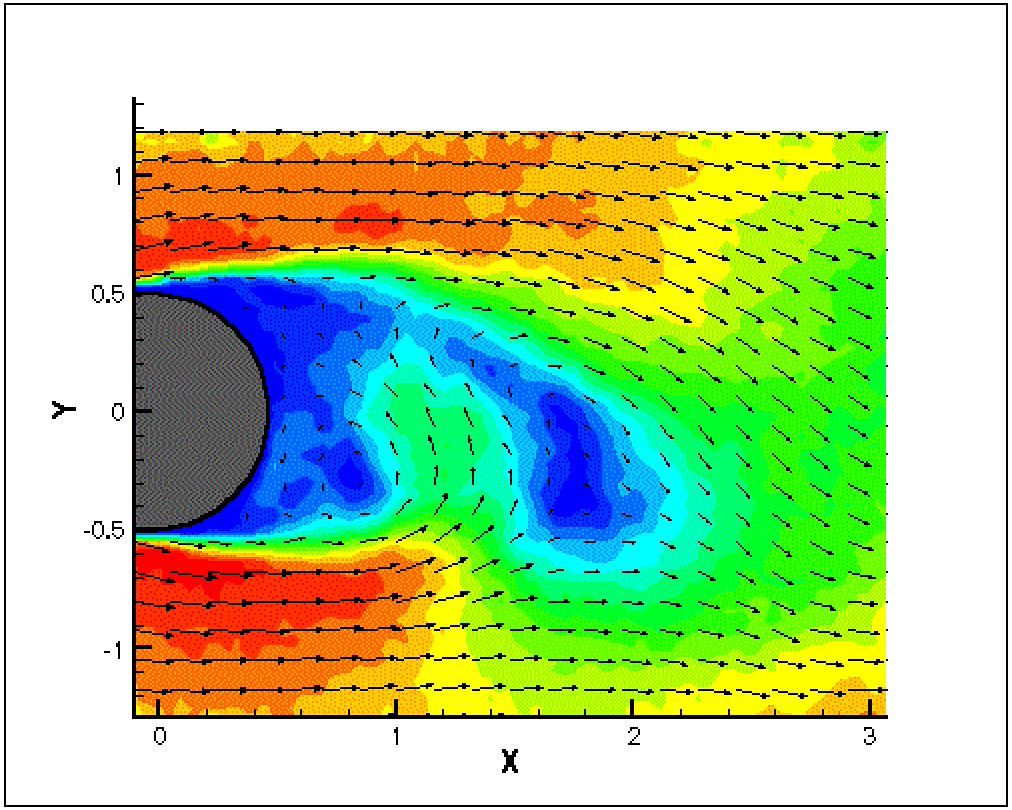
Correlação Cruzada 2D

- Aplicações - PIV



Correlação Cruzada 2D

- ➢Aplicações – PIV (Campo de velocidades medido na esteira de um cilindro)



Correlação Cruzada 2D

- Aplicações – Medição de campos deformação - Digital Image Correlation – DIC

Corpo de prova
em ensaio de tração

Correlação
cruzada

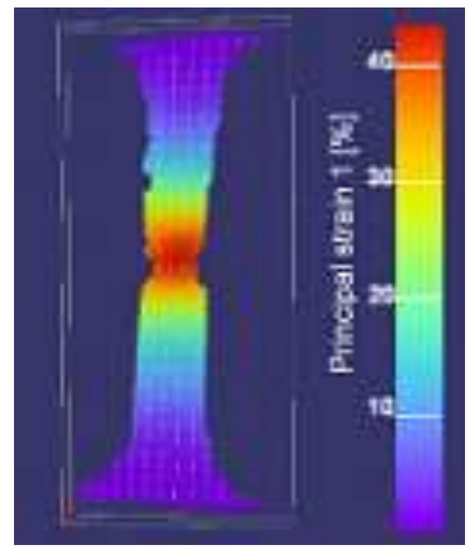
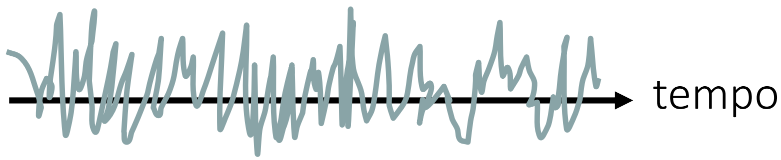


Imagem sem
Carregamento

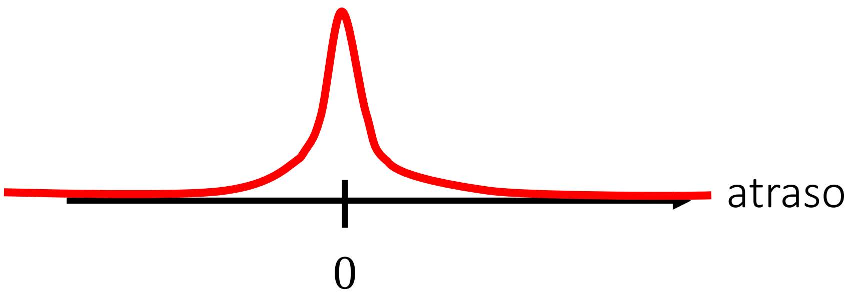
Imagem com
Carregamento

Correlação Cruzada

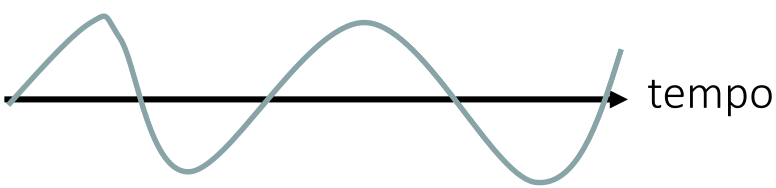
➢Resumo



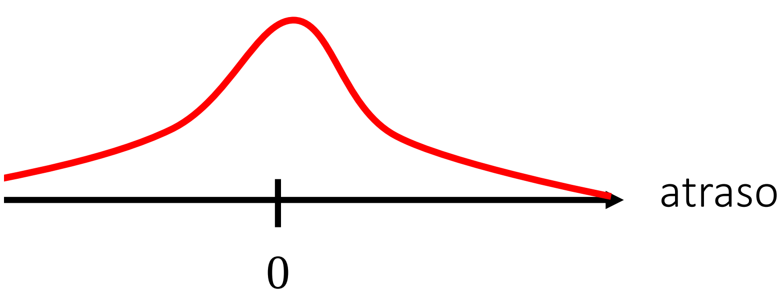
Sinais com flutuações rápidas



Tipicamente exibem período de correlação curto



Sinais com flutuações lentas

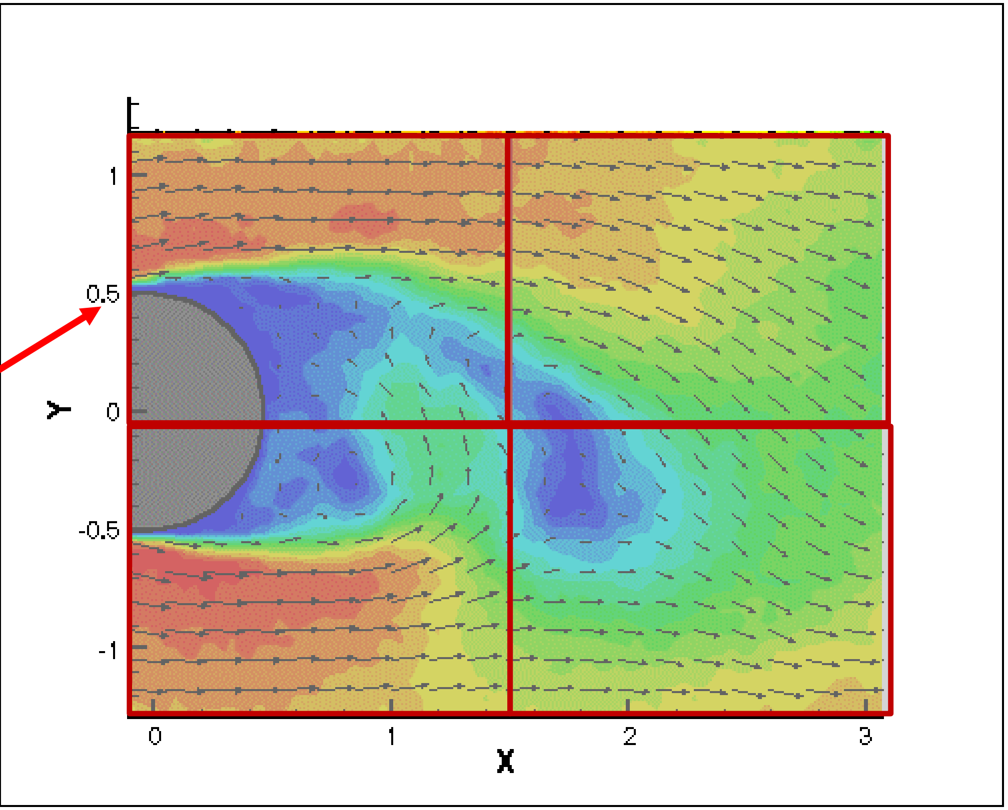


Tipicamente exibem um período longo de correlação

Amostragem Condicional

- **Motivação:** Considere uma situação em que o equipamento utilizado para a medição não é capaz de resolver todo o domínio de interesse de uma só vez.
- Nesse caso, para cobrir todo o campo de interesse são necessárias várias medições independentes.

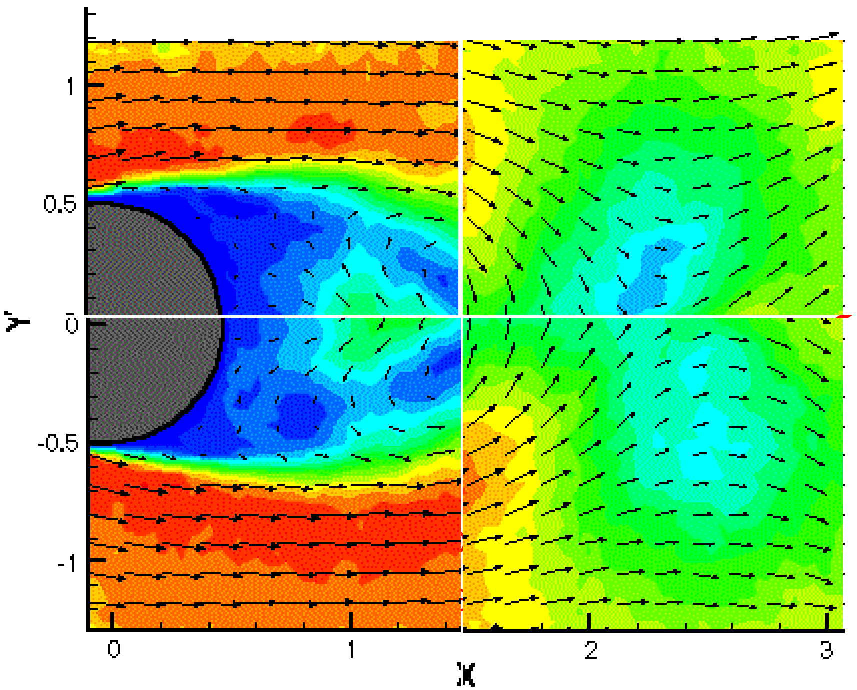
Região resolvida em cada medição independente



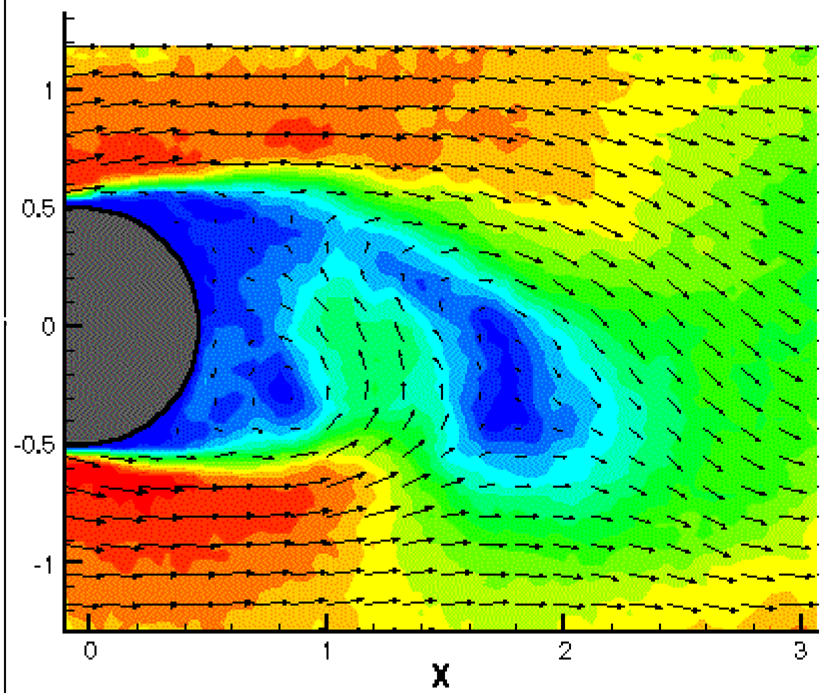
Amostragem Condicional

- **Motivação:** Com uma amostragem independente, a junção das capturas não reproduz a estrutura espacial do escoamento, conforme ilustrado abaixo

Partes Independentes



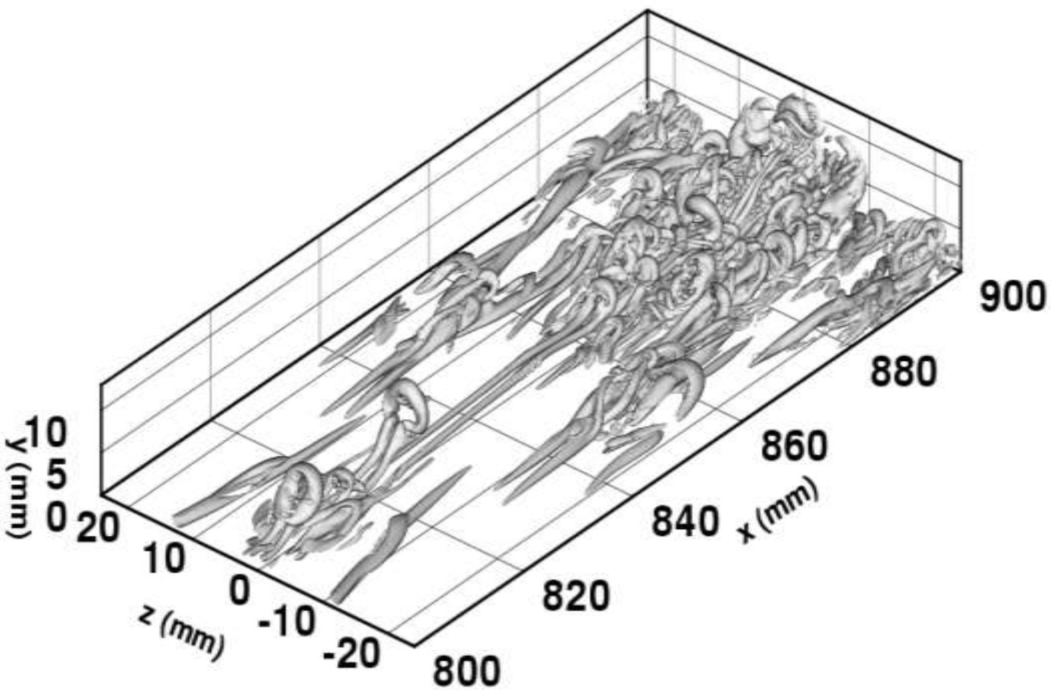
Campo completo

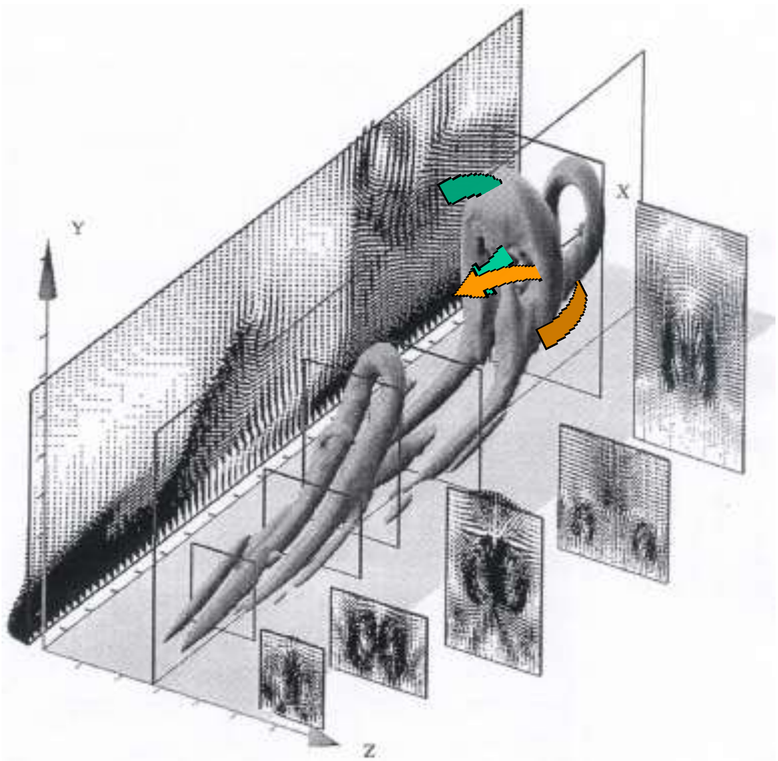


COMO RECUPERAR A ESTRUTURA DO CAMPO COMPLETO?

Amostragem Condicional

➢ **Motivação:** Em séries estocásticas, como reconhecer eventos coerentes e estimar informações estatísticas acerca desses eventos?





Amostragem Condicional

- Amostragem condicional é uma ferramenta muito ponderosa, que auxilia a separação entre sinais determinísticos e aleatórios e a sincronização de amostragens.
- A técnica permite reduzir, significativamente, a dispersão de dados determinísticos sujeitos a contaminação por flutuações aleatórias.
- O princípio da técnica é simples, e se baseia na premissa de que média da parte oscilatória de um sinal é nula

$$\frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - \mu_x]\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt - \mu_x = 0$$

- Considerando sinais que contém informações determinísticas ($\mu_x + \tilde{x}(t)$) e aleatórias ($x'(t)$)que variam no tempo

$$x(t) = \mu_x + \tilde{x}(t) + x'(t)$$

Amostragem Condicional

- Logo, se “n” amostras independentes do sinal x(t) forem coletadas, pode-se estimar a média dessas amostras (eventos)

$$x(t,n) = \mu_x(n) + \tilde{x}(t,n) \; + x'(t,n)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x(t,n) = \bar{x}(t) = \bar{\mu}_x + \bar{\tilde{x}}(t) + \overline{x'}\,(t)$$

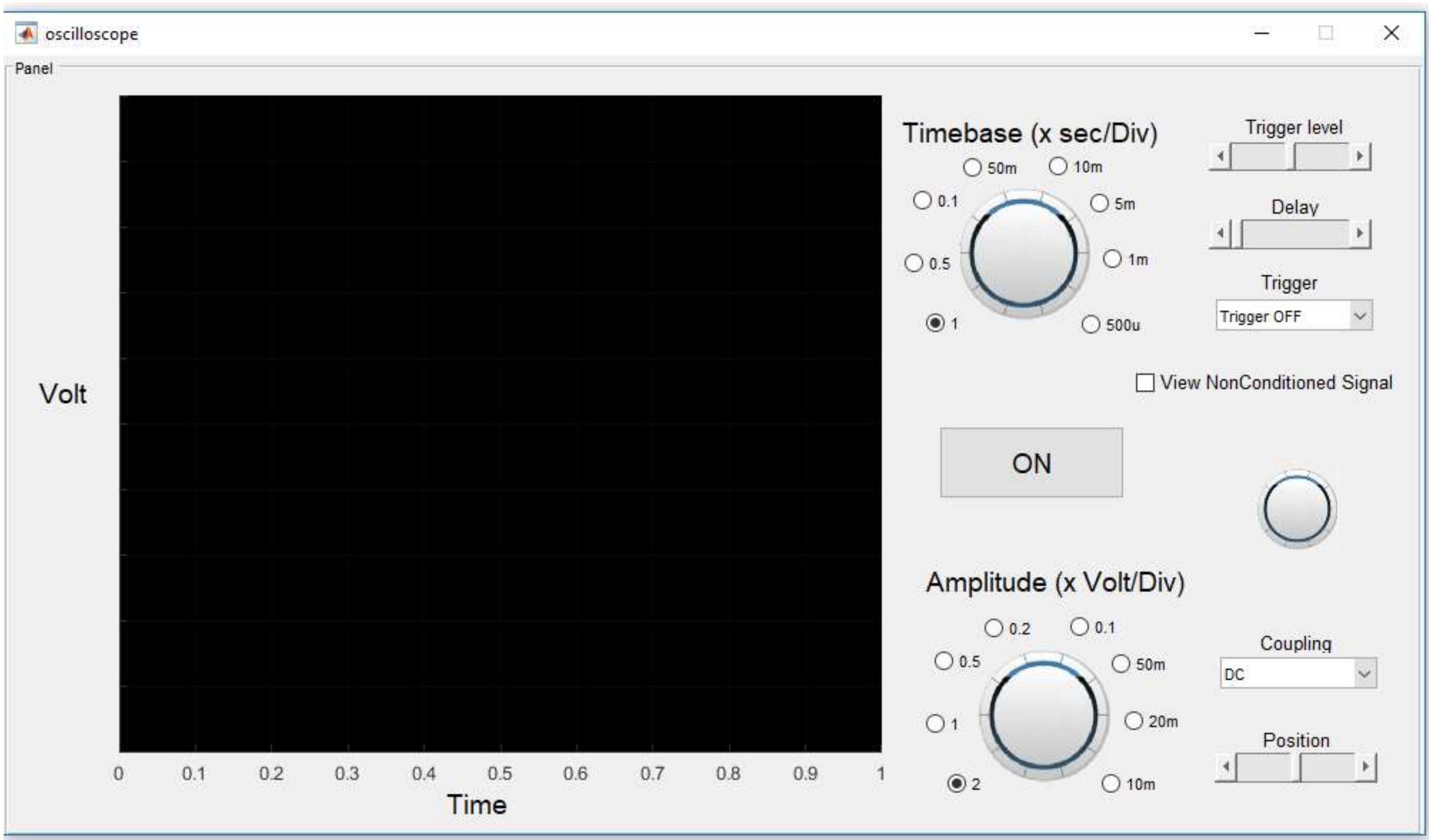
- Caso o tempo *t* das amostras seja o mesmo para todas as amostras, então a média da componente não determinística $\overline{x'}\,(t)$ tende a se tornar nula.
- A dificuldade prática de aplicação desse conceito simples, é garantir que o tempo *t* do sinal determinístico seja o mesmo para todas as amostras (Lembrando que *t* é o referencial de tempo para o sinal determinístico e não para o observador)

Amostragem Condicional

- As imagens do campo de velocidade na esteira de um cilindro, obtidas com amostras independentes ajudam a ilustrar a diferença entre referência de tempo do evento determinístico e do observador.
- Logo, para que o procedimento de média dos eventos seja válido é necessário criar uma referência de tempo para as amostras independentes.
- Como fazer isso?
- Na prática isso pode ser feito de modos distintos, dentre os quais destacam-se:
  - Uso de gatilho para sincronização das amostras
  - Uso de uma função marcadora que permita identificar instantes específicos dentro de uma série de dados.

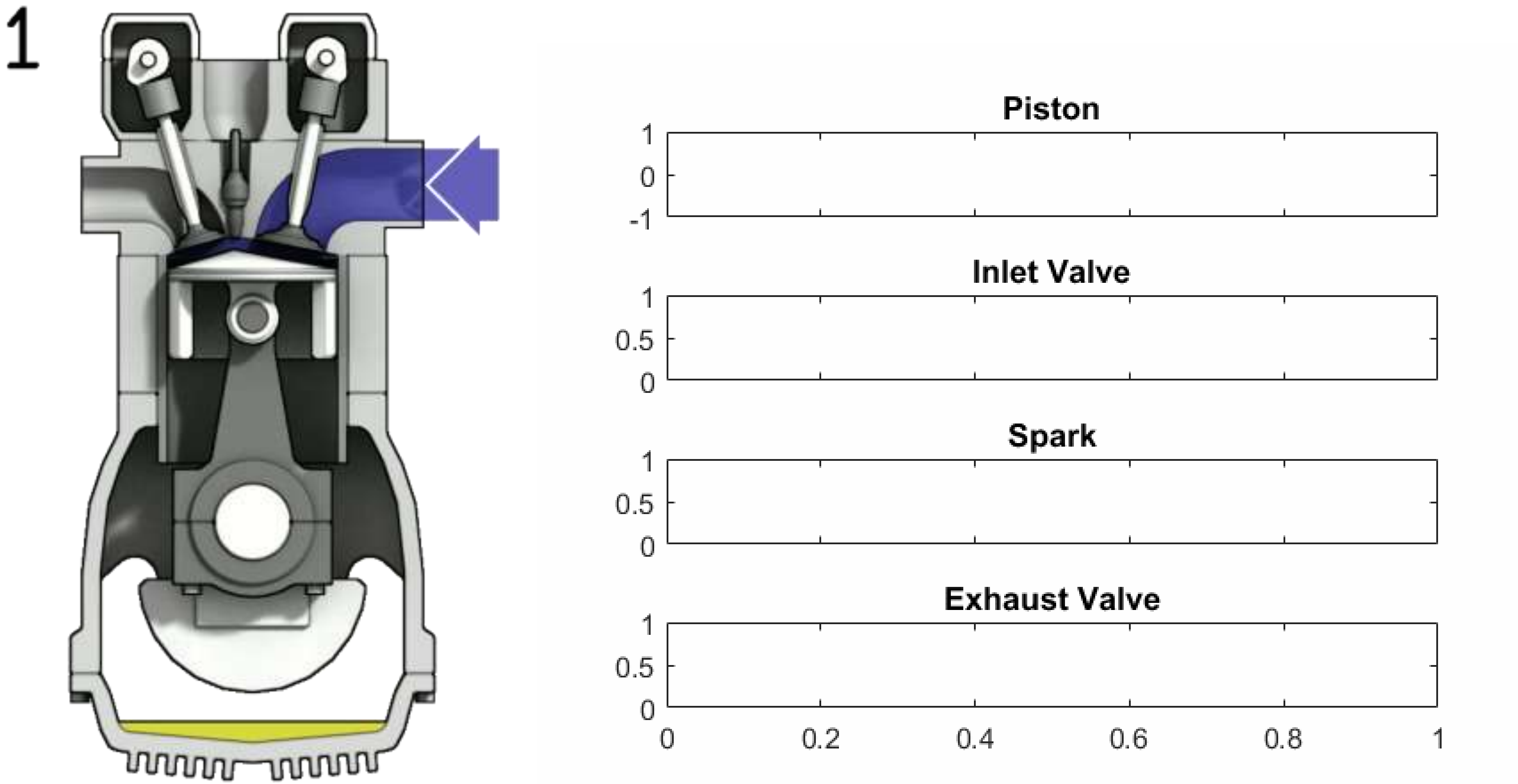
Amostragem Condicional

➢Exemplos: Osciloscópio – LabVirtual -Trigger



Amostragem Condicional

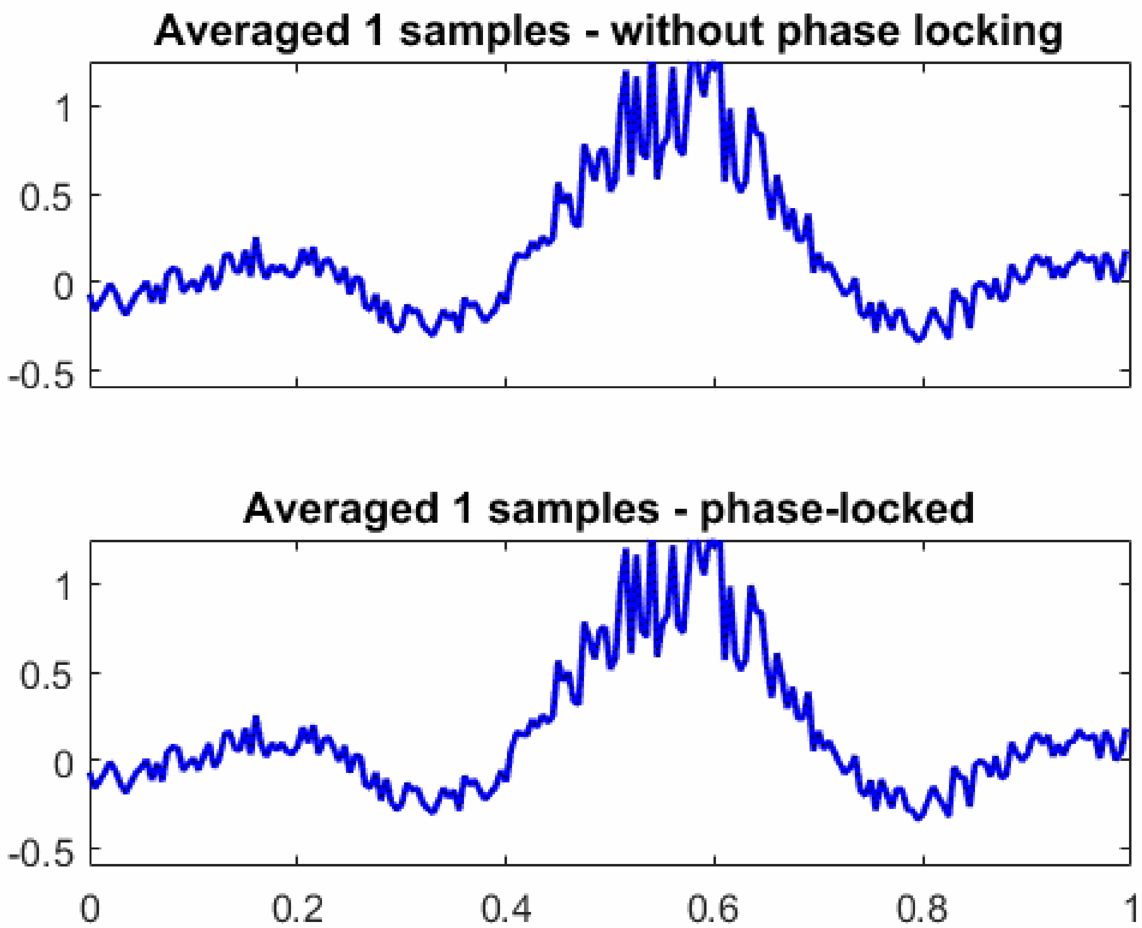
- Exemplos: Testes com motores de combustão interna



Fonte:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:4StrokeEngine_Ortho_3D.gif

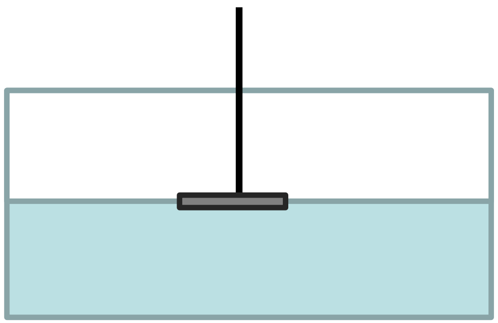
Amostragem Condicional

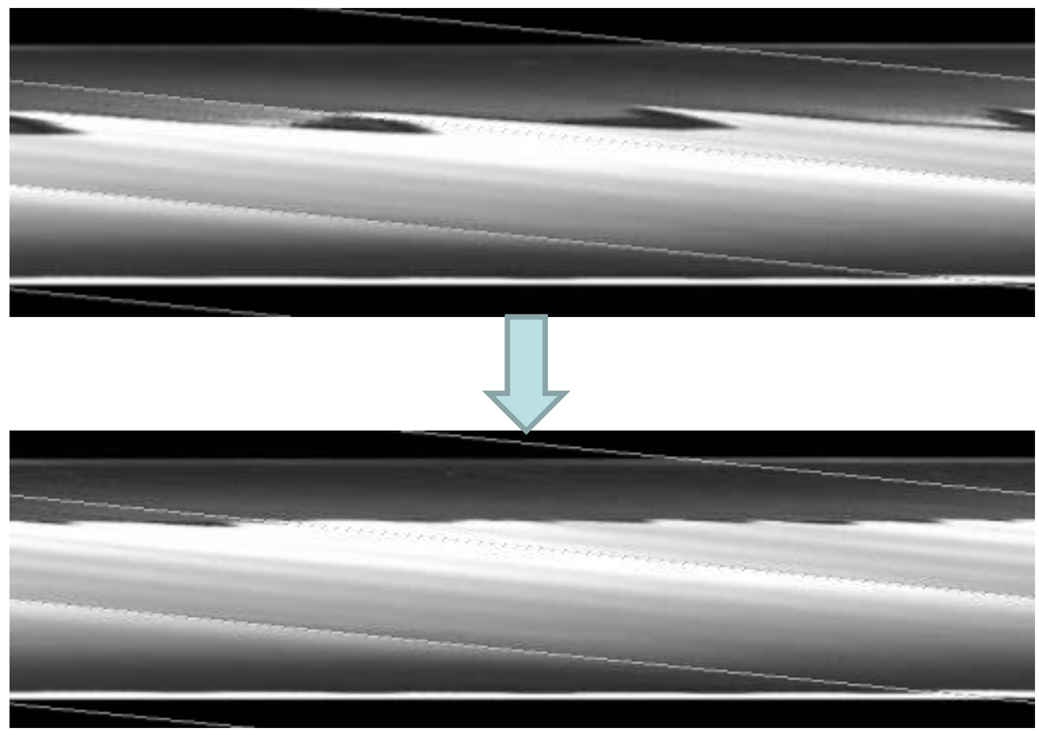
- Exemplos: Comparação de testes com amostragem condicional e sem amostragem condicional



Amostragem Condicional

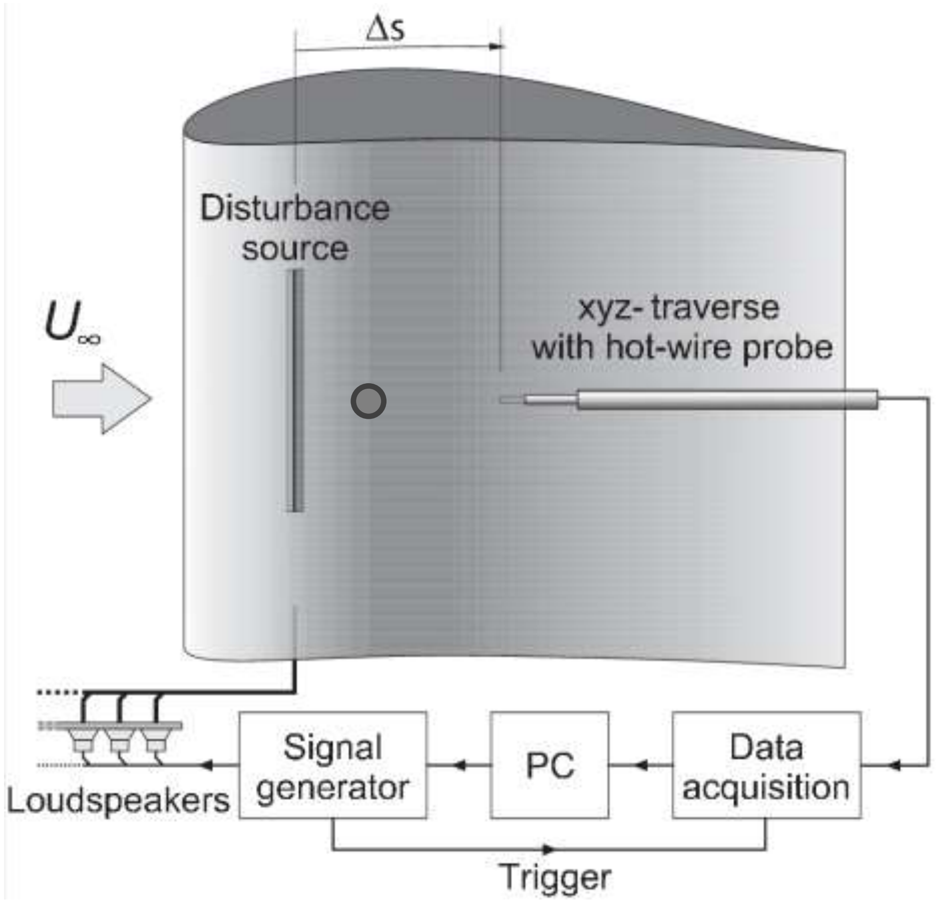
- Exemplos: Sincronização na geração do sinal – Excitação de golfadas em escoamento bifásico

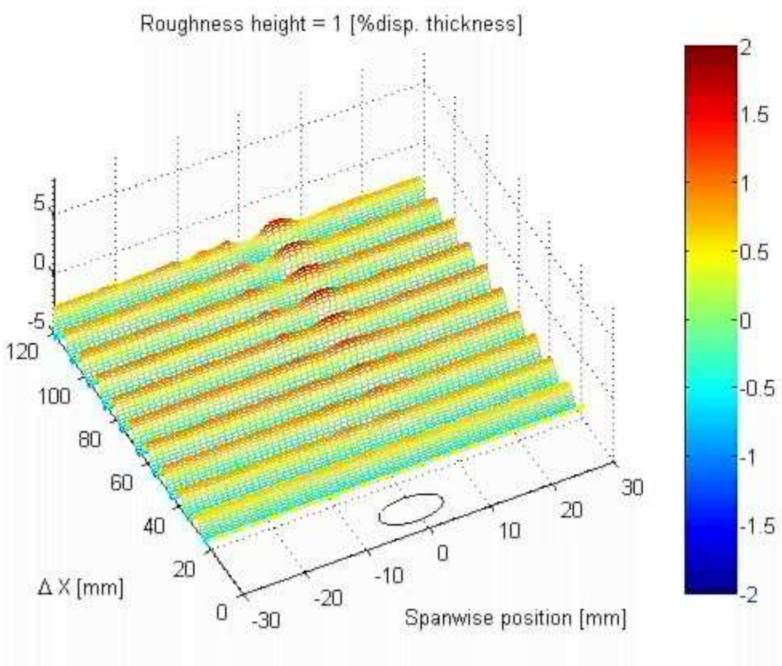




Amostragem Condicional

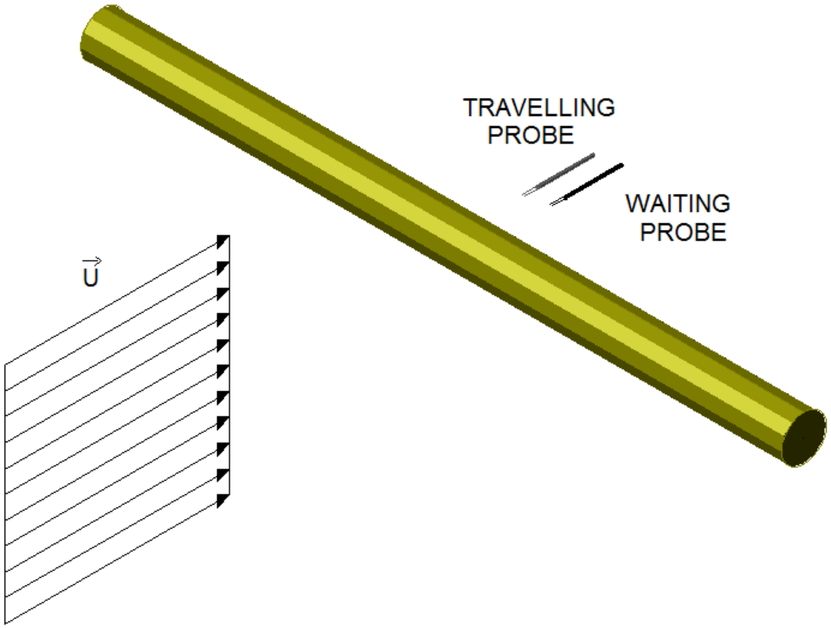
➢Exemplos: Sincronização na geração do sinal





Amostragem Condicional

➤Exemplos: Reconhecimento de eventos em séries de dados amostrados na esteira de um cilindro usando sonda puntual



Dados do exemplo:

Velocidade do escoamento~2m/s;

Nº de Reynolds ~1000;

Sinal de 2 anemometros de fio quente, aquisitados ao mesmo tempo;

Instante de referência do evento foi reconhecido no sinal do sensor que ficava estático.

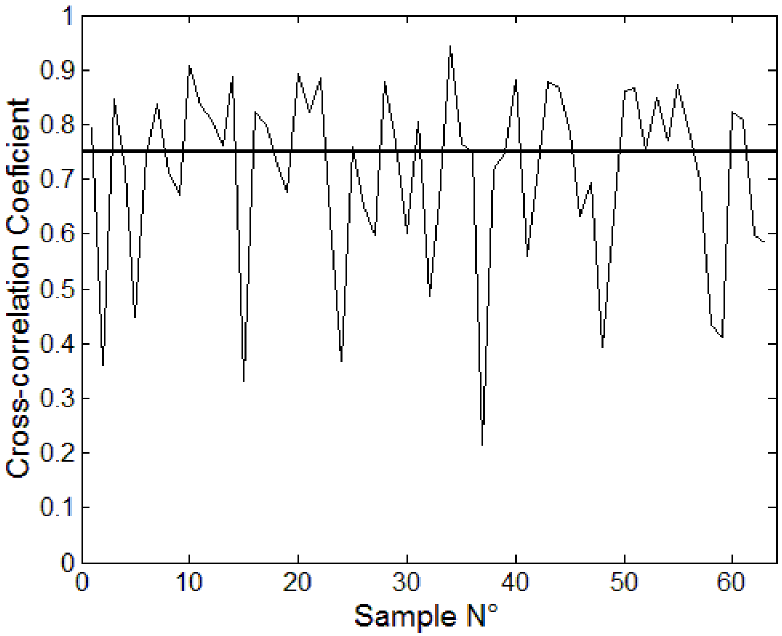
Amostragem Condicional

- Exemplos: Reconhecimento de eventos em séries de dados amostrados na esteira de um cilindro usando sonda pontual.
- Correlação cruzada foi utilizada para encontrar o atraso com relação a um sinal de referência

Condições utilizadas para reconhecimento do evento:

Instante onde o coeficiente de correlação atinge um máximo

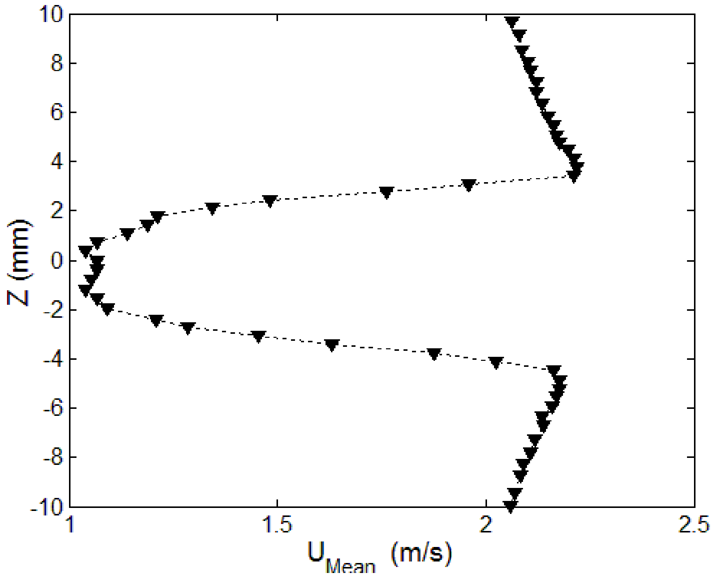
Além disso, somente sinais que apresentaram correlação máxima maior que 0,75 foram considerados na média dos eventos



Amostragem Condicional

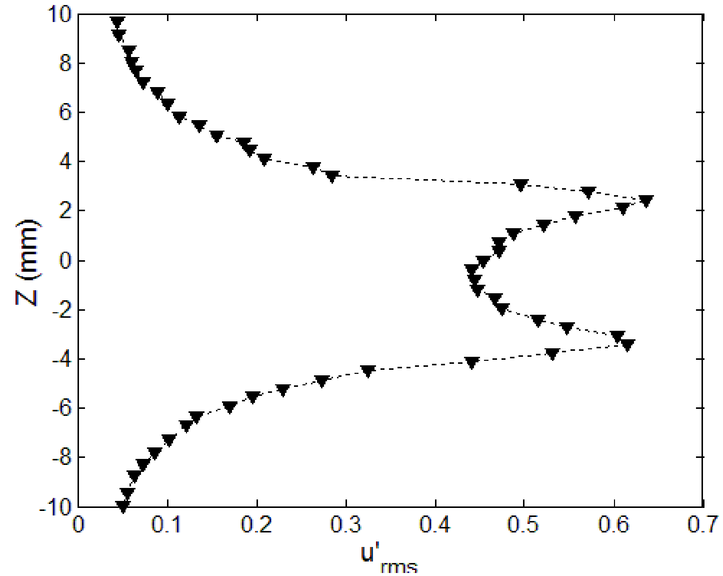
- Exemplos: Reconhecimento de eventos em séries de dados amostrados na esteira de um cilindro usando sonda pontual.

Resultados



Média

μ_x



RMS das flutuações

$\tilde{x} + x'$

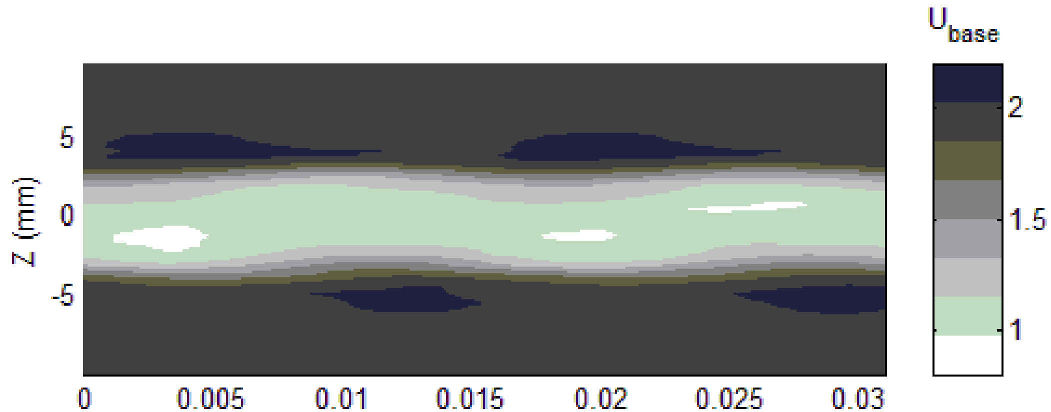
Amostragem Condicional

- Exemplos: Reconhecimento de eventos em séries de dados amostrados na esteira de um cilindro usando sonda pontual.

Resultados

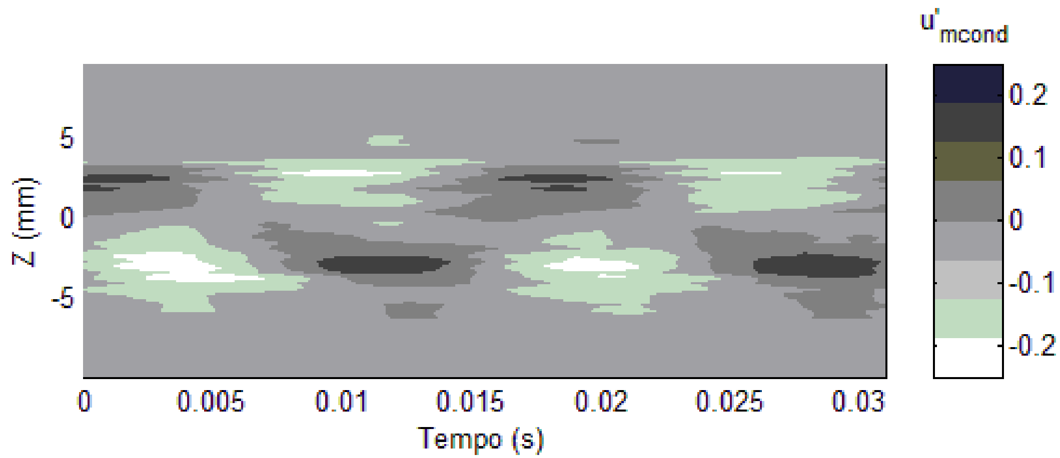
Média dos eventos (determinísticos)

$$\bar{x}(t) = \bar{\mu}_x + \bar{\tilde{x}}(t)$$



Flutuação determinística média

$$\bar{\tilde{x}}(t) = \bar{x}(t) - \bar{\mu}_x$$



Amostragem Condicional

- Exemplos: Reconhecimento de eventos em séries de dados amostrados na esteira de um cilindro usando sonda pontual.
- **Importante:** Para o uso dessa metodologia, é muito importante avaliar a convergência dos resultados com o número de amostras;
- Dependendo do nível de correlação, amplitude determinística média estimada pode reduzir com o aumento do número de amostras. Isso significa que o critério de reconhecimento de eventos escolhido não é robusto o bastante

Exercícios em sala que devem ser finalizados e entregues na aula seguinte

- Anexar os códigos e rotinas de programação utilizadas. Ilustrar resultados com figuras e comentar

- Q1) Fazer revisão sucinta (max 1 pág) sobre uso de autocorrelação e correlação cruzada em aplicações de engenharia (com bibliografia)
- Q2) Estimar o período característico de oscilação entre dois sinais e o atraso entre eles (signal 2a e signal2b).
- Q3) Estimar o deslocamento entre pares de imagens (Escolher um par (a e b) entre imagens fornecidas)
- Q4) Estimar a flutuação determinística média de uma série de sinais (signal3) usando um evento de referência (signal_ref)