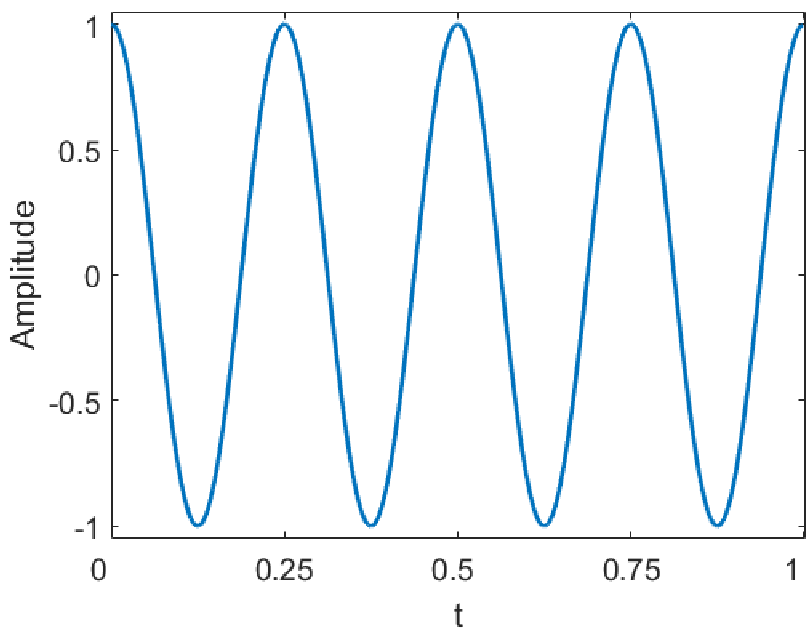
Continuação
Análise espectral

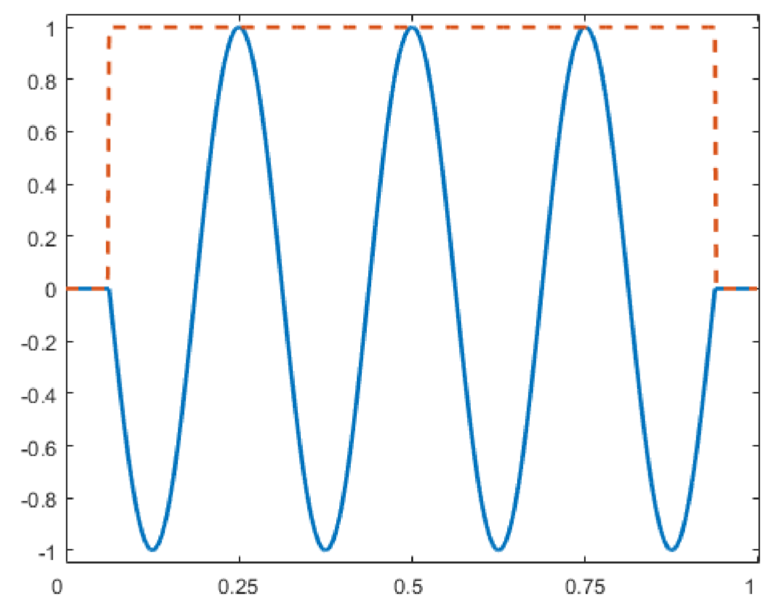
Motivação

- Foi visto na última aula que é possível representar sinais no domínio da frequência.
- Discutiu-se que o cálculo da energia contida em cada frequência é ruidoso para sinais discretos.
- Foi visto também que no caso de sinais discretos a transformada se baseia na hipótese de que o sinal é periódico e com período igual ao de amostragem.
- Como garantir a condição de periodicidade da série temporal para evitar o efeito de descontinuidades?
- Isso se torna especialmente importante, quando utilizamos segmentos de séries de dados, conforme proposto por Welch para melhoria na estimação de uma PSD

Motivação

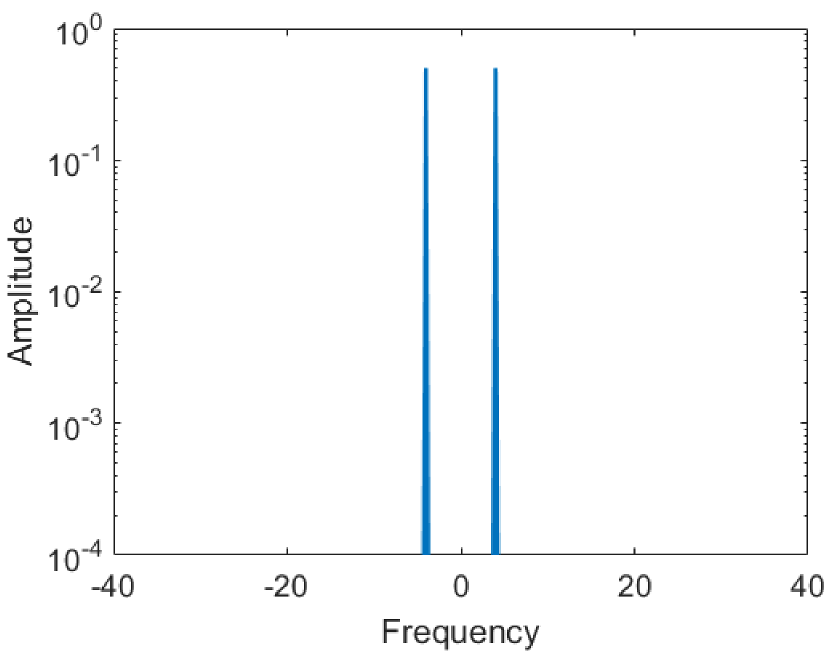
- Uma possível forma de se evitar a ocorrência de descontinuidade entre o início e o final do período de amostragem é fazendo a amplitude do sinal tender uma constante nesses instantes.
- No caso de sinais sem a média, o valor 0 se torna a escolha natural. Consideremos a janela mais simples para forçar o sinal a ser 0 no início e no final do intervalo de amostragem

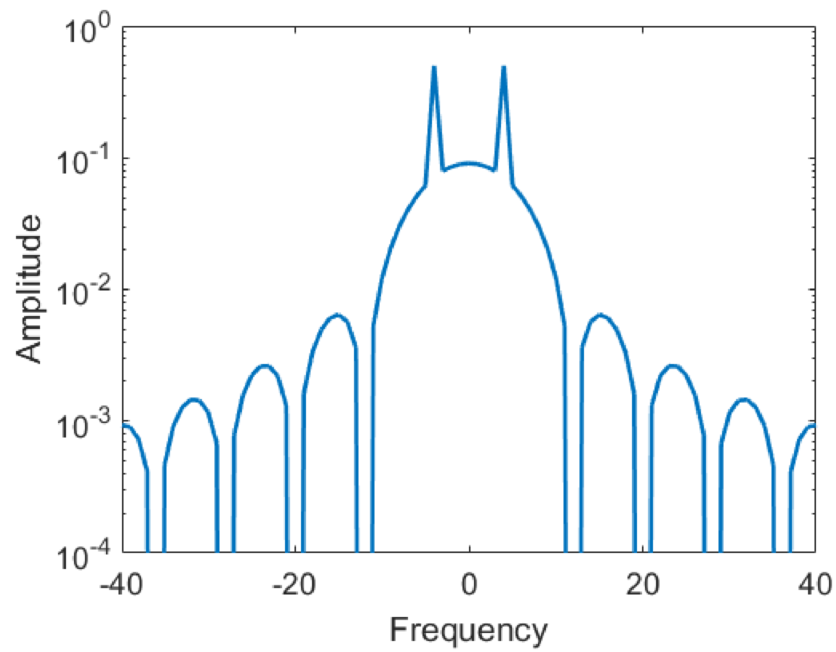




Motivação

- Observando o espectro do sinal original e após a multiplicação no tempo por uma janela retangular.

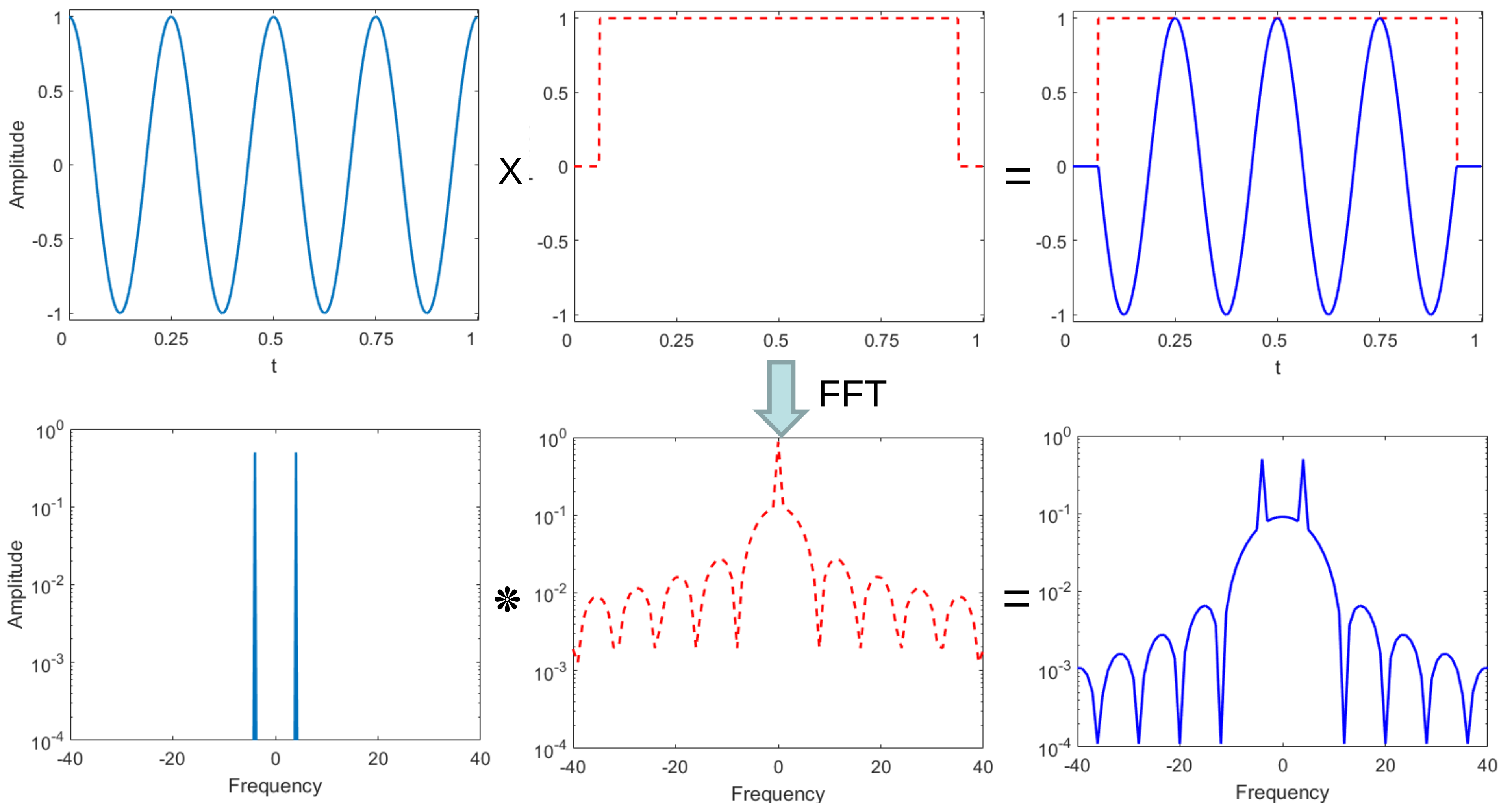




- Nota-se o aparecimento de energia em frequências fora daquelas do sinal original. Por que isso ocorreu?

Enjanelamento

- Conforme discutido na aula anterior, uma multiplicação no tempo implica em uma convolução no domínio da frequência.



Enjanelamento

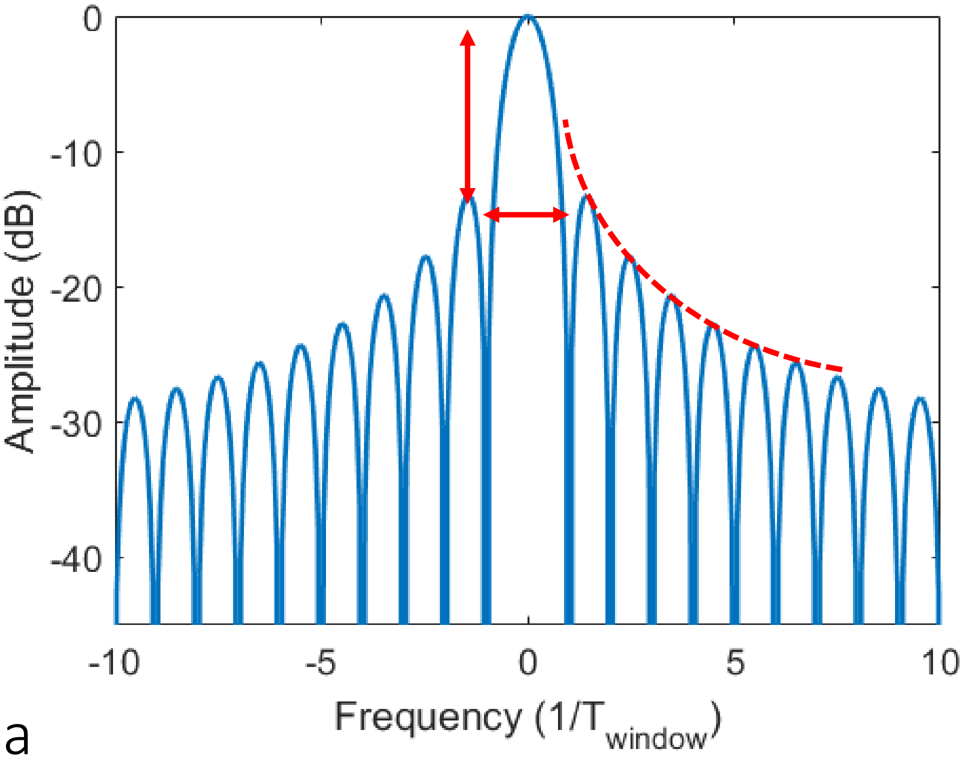
- Conforme discutido na aula anterior, uma multiplicação no tempo implica em uma convolução no domínio da frequência. Isso é claramente observável no slide anterior

- Analisando o espectro de uma janela retangular de período T_{window}

- Nota-se a existência de um lóbulo principal

- Há uma diferença da ordem de 13dB para o primeiro lóbulo adjacente

- A amplitude exibe um decaimento com a frequência



Enjanelamento

- Os parâmetros ilustrados no slide anterior servem para caracterizar o vazamento de uma função de enjanelamento.

- A energia transferida de uma frequência para as adjacentes é conhecida como vazamento (leakage)

- Existe uma métrica conhecida como largura de banda equivalente de ruído (*equivalent noise bandwith ENBW*) para caracterizar o vazamento total de uma funções de enjanelamento.

$$ENBW = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W(\omega)|^2}{|W(\omega)|_{max}^2} d\omega$$

- Isso equivale a área de um retângulo que contém a mesma potência da janela

Enjanelamento

- Para sinais discretos, vamos assumindo o período de amostragem igual a 1 e usar a relação de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_{-1/2}^{1/2}|W(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \frac{1}{N}\sum_{N}|w[n]|^2$$

- E para o máximo ocorrendo na frequência 0

$$|W(\omega)|_{max}^2 = |W(0)|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{N} w[n]\right|^2$$

- Assim,

$$ENBW = \frac{\sum_N |w[n]|^2}{|\sum_N w[n]|^2}$$

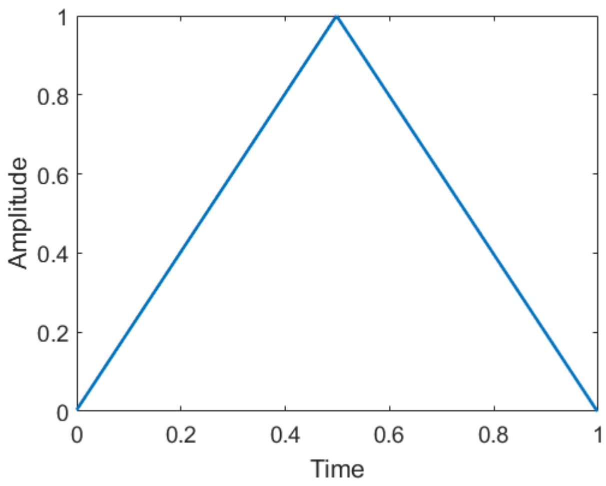
Enjanelamento

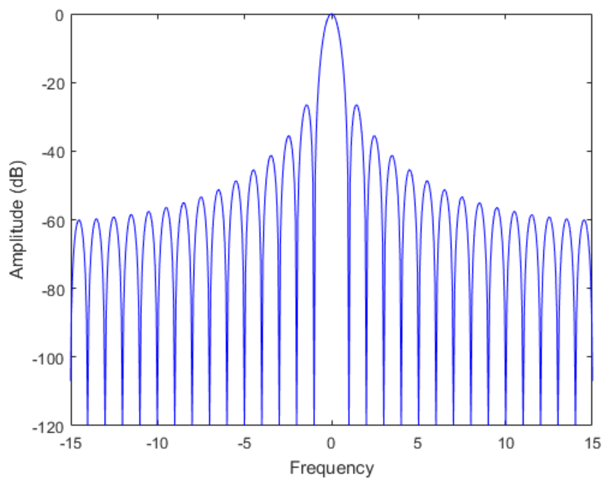
- Uma função de enjanelamento ideal deveria ter o lóbulo principal o mais estreito possível (isso implica que a janela deveria ser o mais larga possível no tempo).
- Por outro lado, a função ideal deveria evitar descontinuidades no sinal (variações abruptas na amplitude do sinal).
- Nota-se que essas demandas são contraditórias.
- Logo, existem diversas funções de enjanelamento e cada uma exibe características que podem ser úteis dependendo da aplicação.

Enjanelamento

- Janela Triangular (Barlett) $$w[n] = 1 - \left|\frac{n - N/2}{L/2}\right|$$

Onde L é o comprimento da janela (valor máximo igual a N)



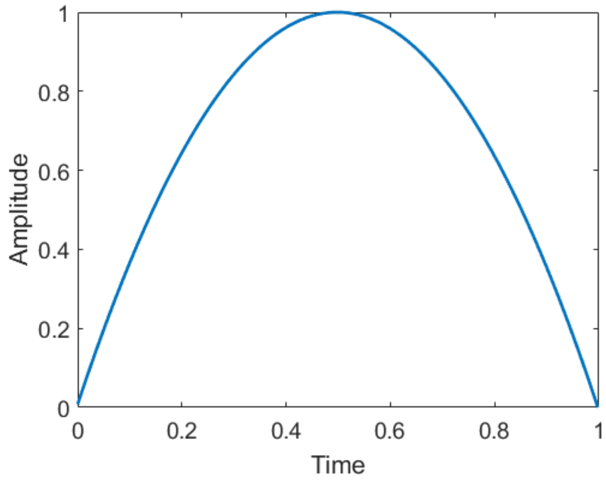


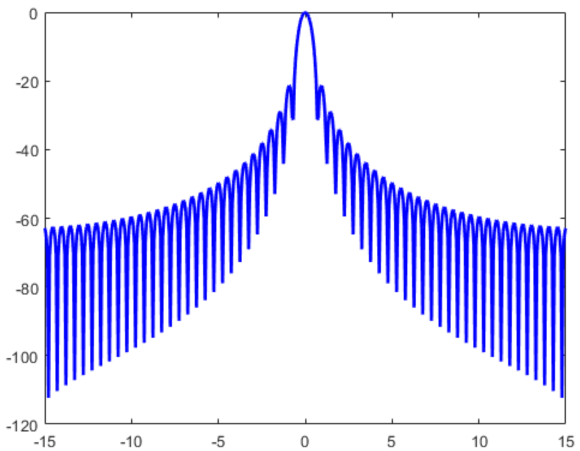
- Nota-se que a aplicação da janela, reduz a energia contida no sinal original. Para corrigir a queda de amplitude média, deve-se dividir a FFT pela integral de 0 a T da função da janela. Para a janela triangular o fator de correção é 0.5.

Enjanelamento

- Parabólica – (Welch, Riesz, Bochner)

$$w[n] = 1 - \left(\frac{n - N/2}{N/2}\right)^2$$



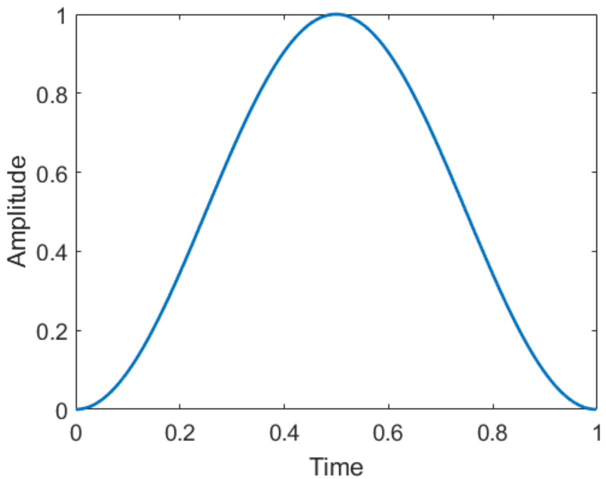


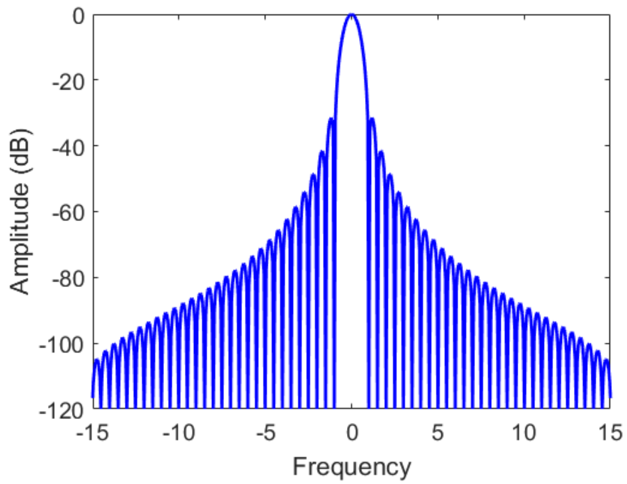
- O fator de correção dessa janela é 0.68

Enjanelamento

- Meio cosseno - Hanning

$$w[n] = 0.5\left[1 - cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right]$$





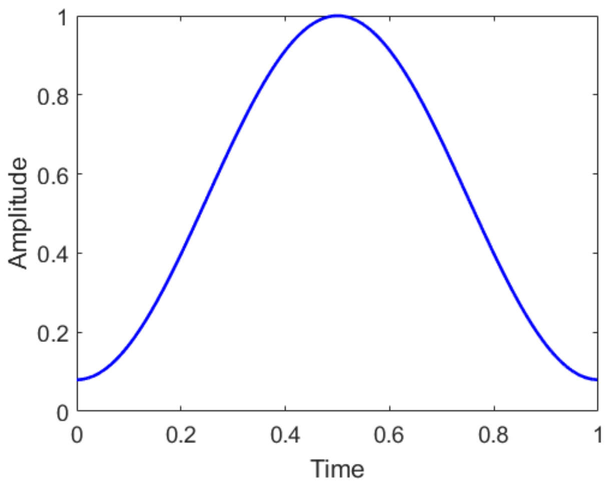
- O fator de correção dessa janela é 0.5

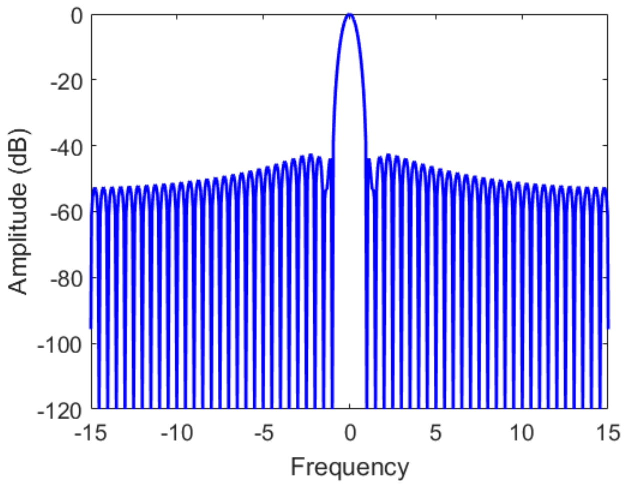
Enjanelamento

- Meio cosseno modificado
  - Hamming ($a_0 = 0.54$; $a_1 = 0.46$)

$$w[n] = a_0 - a_1 cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

$$-\frac{N}{2} < n < \frac{N}{2}$$





- O fator de correção dessa janela é 0.54

Enjanelamento

- A tabela a seguir auxilia na comparação entre as diferentes janelas apresentadas.

Função Janela	Largura do lóbulo principal (x 1/T_{window})	Taxa de decaimento (Roll off rate) dB/Oitava	Redução de ampl. do 1º lóbulo adjacente dB	Equivalent Noise Bandwidth ENBW
Retangular	2	-6	-13.3	1
Triangular	4	-12	-26.5	1.33
Welch	4	-12	-21	1.2
Hanning	4	-18	-31.5	1.5
Hamming	4	-6	-42.7	1.37

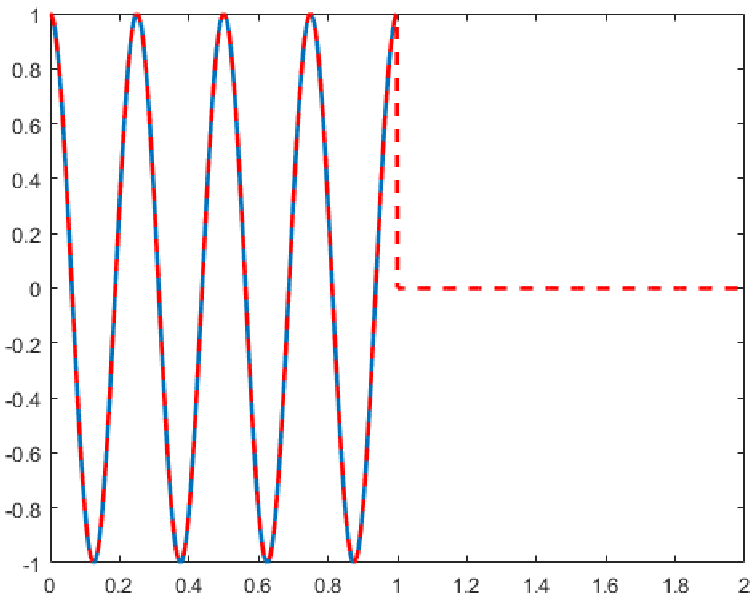
- Vale lembrar que existem inúmeras outras janelas. Apresentou-se aqui alguns poucos exemplos

Preenchimento com zeros (Padding)

- Como o período de amostragem (T) define a resolução no espectro (w_0=1/T), pode-se imaginar que um aumento artificial no período do sinal conduziria a um aumento na resolução espectral.

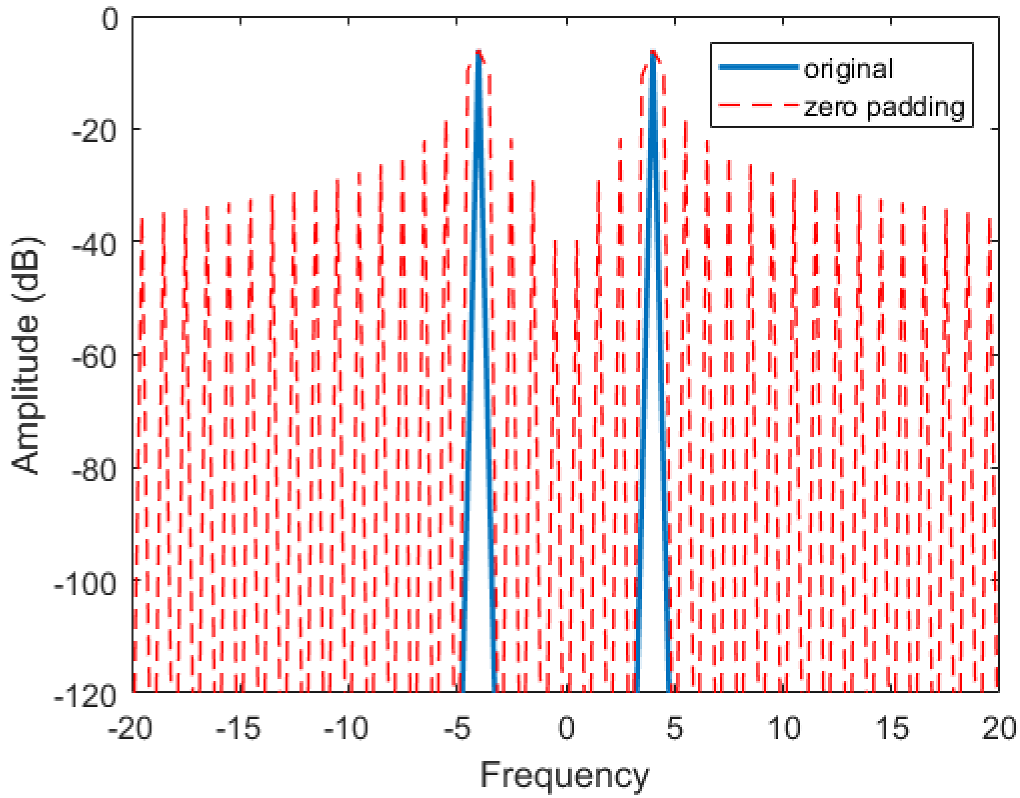
- Pode-se analisar esse efeito preenchendo-se um sinal com zeros

- Com base no que foi visto, além da diminuição da frequência fundamental, o que mais deve ocorrer?



Preenchimento com zeros (Padding)

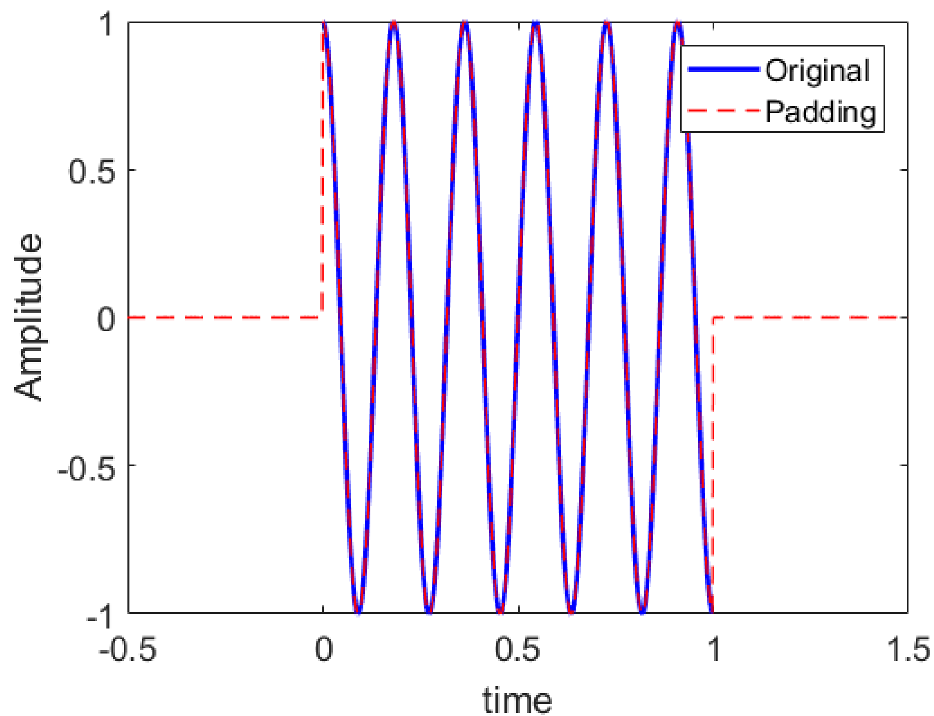
- O espectro fica similar ao de um sinal multiplicado por uma janela retangular.



Então o preenchimento com zeros não tem utilidade?

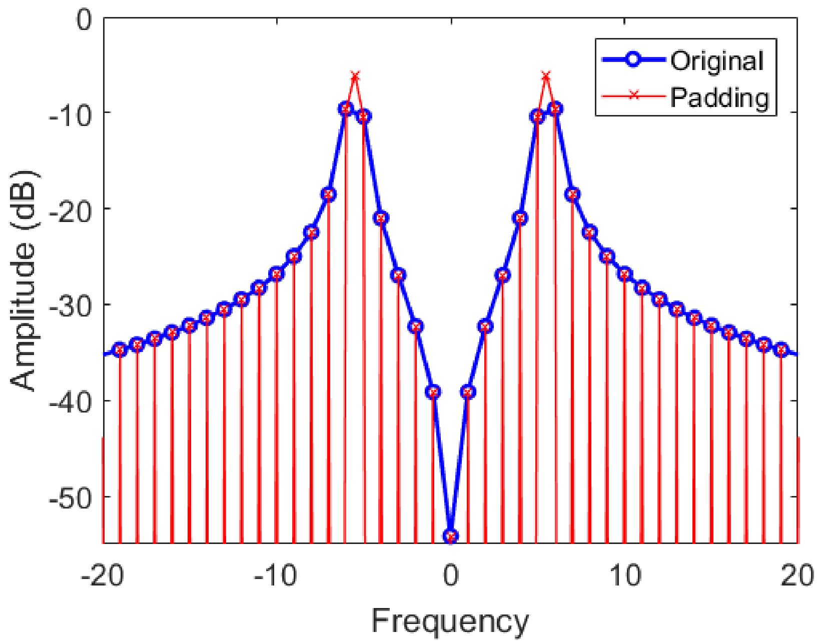
Preenchimento com zeros (Padding)

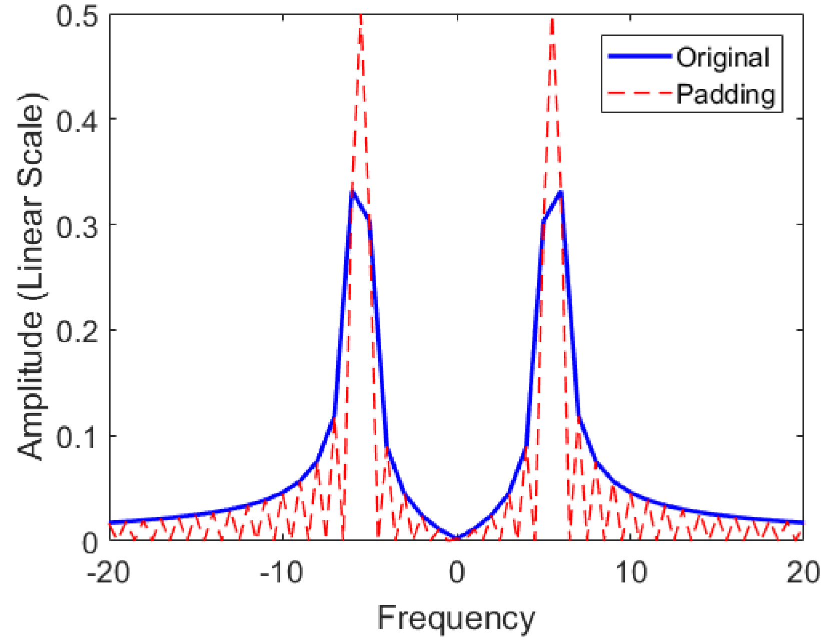
- Vamos pensar em um caso onde o sinal não é periódico dentro do intervalo de amostragem. A Figura ilustra esse caso e o sinal após a adição de zeros para aumentar artificialmente o período de amostragem para um múltiplo do período do sinal



Preenchimento com zeros (Padding)

- Observa-se que nesse caso, a frequência do sinal se torna um harmônico exato da frequência fundamental. Assim, a estimativa de amplitude do sinal é bastante melhorada.

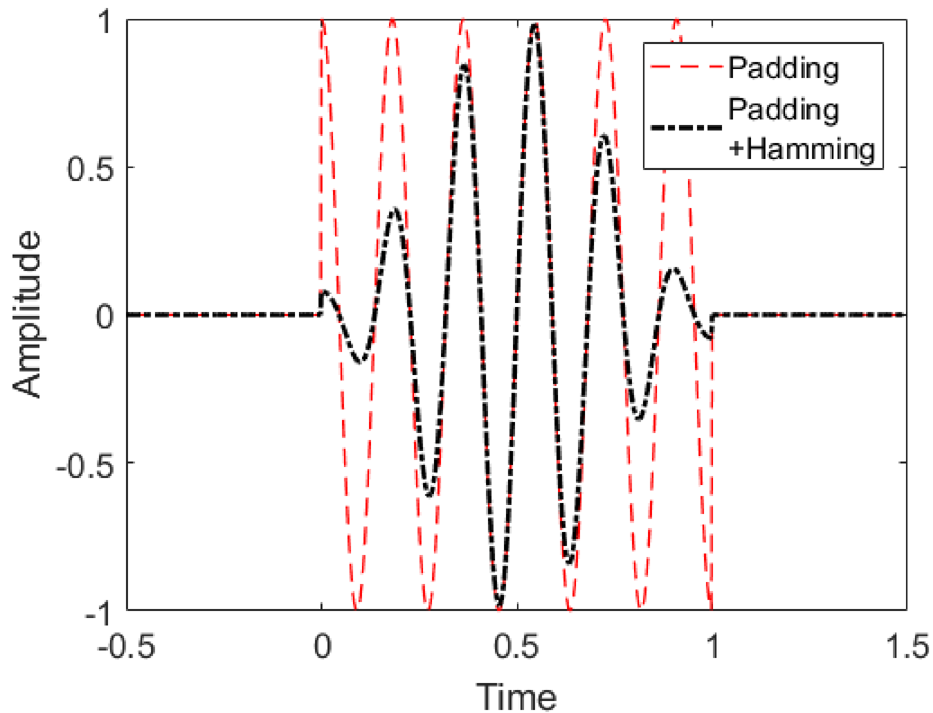




- Nas frequências entre os modos originais, a contribuição é com o padding é nula. Isso faz sentido, pois não há informação

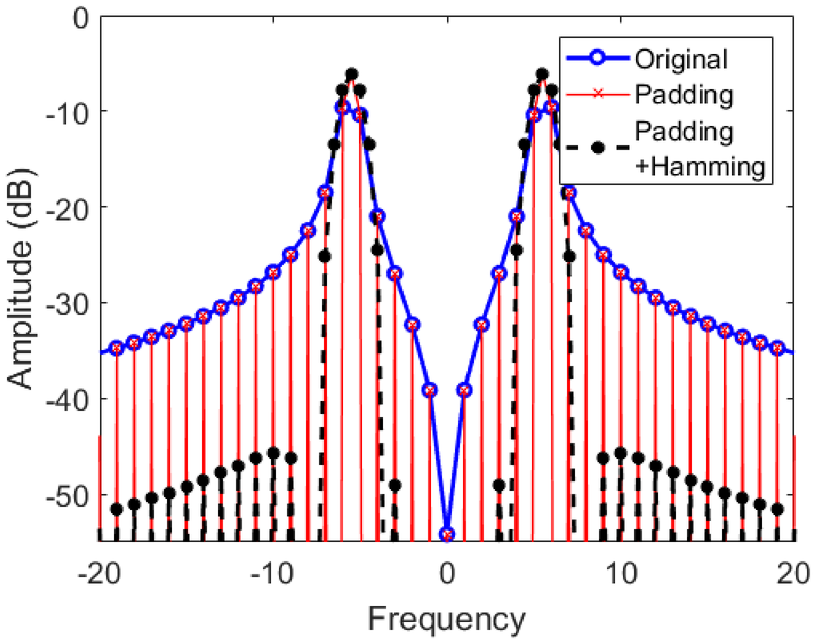
Preenchimento com zeros (Padding)

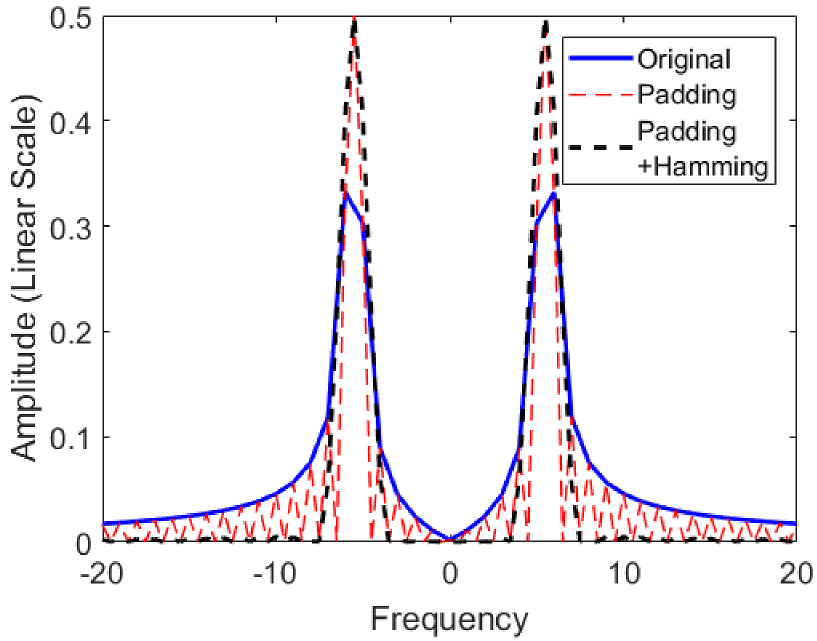
- O procedimento adotado no último slide é similar a adição de zeros e aplicação de uma janela retangular ao sinal.
- O que pode ser feito para reduzir o espalhamento de energia ?
- Vimos que existem outras funções de enjanelamento



Preenchimento com zeros (Padding)

- Nota-se nas figuras abaixo, que é possível melhorar significativamente a estimação da amplitude do sinal, sem que o ruído adicionado ao espectro seja excessivamente alto.





Introdução a Filtragem Digital

- A extração de informação em bandas específicas de frequência é facilitada com o uso de filtros digitais.

- Esse tipo de filtro é aplicado a sinais já digitalizados. Logo, para o funcionamento adequado é necessário que na digitalização o sinal mantenha fidelidade com o original (sem efeito de aliasing e com resolução adequada).

- A vantagem de filtros digitais é que eles podem ser construídos com uma função qualquer, sem a limitação dos componentes eletrônicos necessários para a construção de filtros analógicos

- Hoje em dia os filtros digitais estão presentes em diversas aplicações, como por exemplo celulares, câmeras digitais, equipamentos de áudio dentre outros.

Introdução a Filtragem Digital

- Existem duas classes de filtros digitais: Os de duração finita (Finite Impulse Response-FIR) e os de duração infinita (Infinite Impulse Response-IIR).

- O primeiro caso é típico de filtros lineares e é o mais comum no processamento de sinais. Portanto os filtros abordados nessa aula serão somente deste tipo.

- O segundo tipo de filtro, é muito utilizado em sistemas com realimentação, onde a saída do filtro é utilizada em um loop fechado para realimentar o filtro. Esse tipo de arquitetura é mais utilizado em dispositivos embarcados e sistemas de controle, e portanto, não será abordado aqui.

Introdução a Filtragem Digital

- No caso de FIRs, pode-se resumir o funcionamento dos filtros como uma multiplicação do espectro do sinal por uma função de filtragem (F).

$$X(\omega)F(\omega)$$

- Logo, a filtragem equivale a uma convolução no tempo, ao contrário do enajelamento, que é uma convolução no espectro.

$$X(\omega)F(\omega) = x(t) \otimes f(t)$$

Introdução a Filtragem Digital

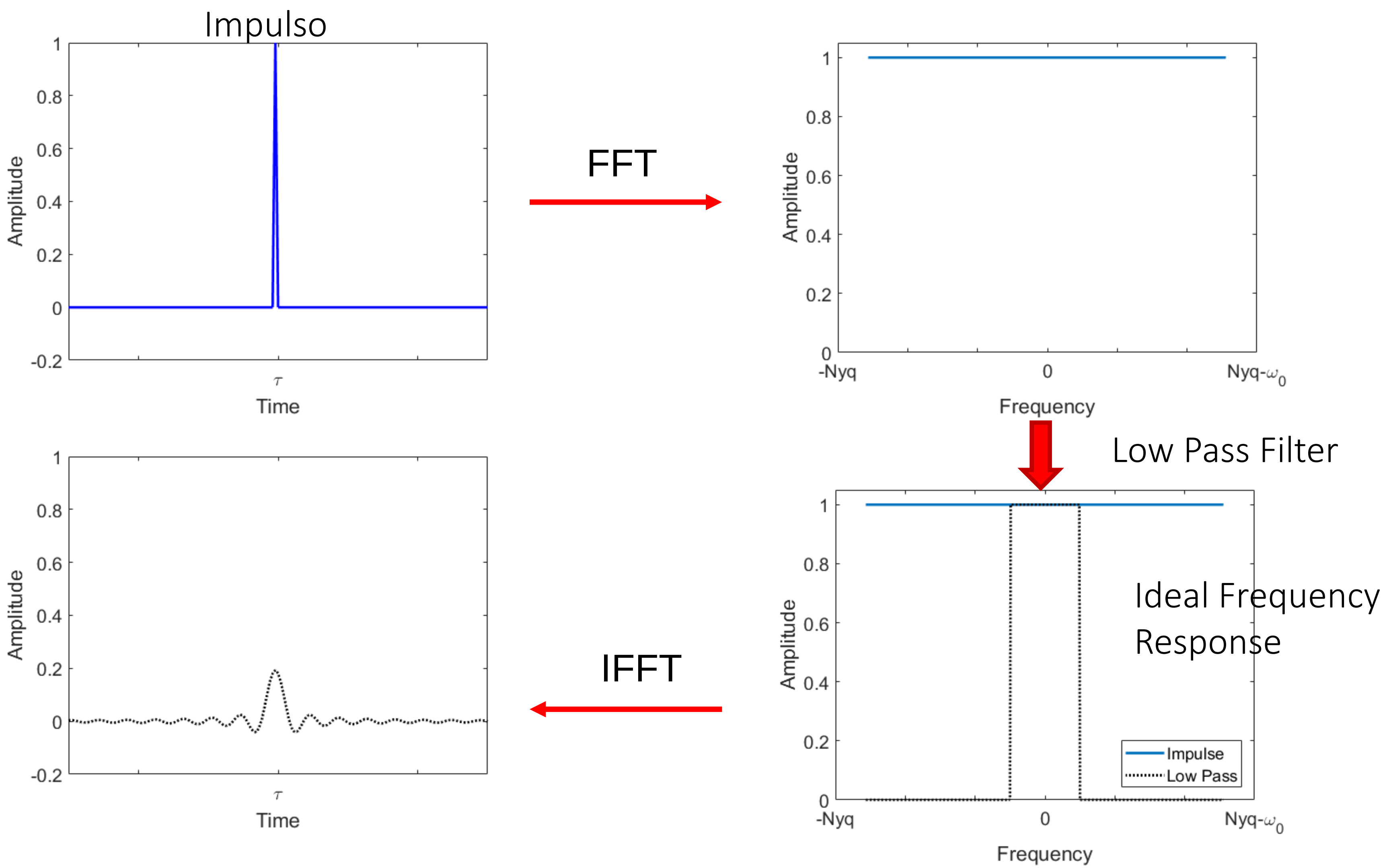
- Filtros são projetados para se obter a performance desejada no domínio do tempo ou da frequência.

- Portanto, assim como no caso das funções de enjanelamento existem diversas funções de filtragem

- No caso de filtros, é interessante analisar a resposta a uma excitação do tipo impulso, que possui energia distribuída igualmente em todas as frequências. Assim, fica claro identificar a influência do filtro no espectro de frequências de um sinal

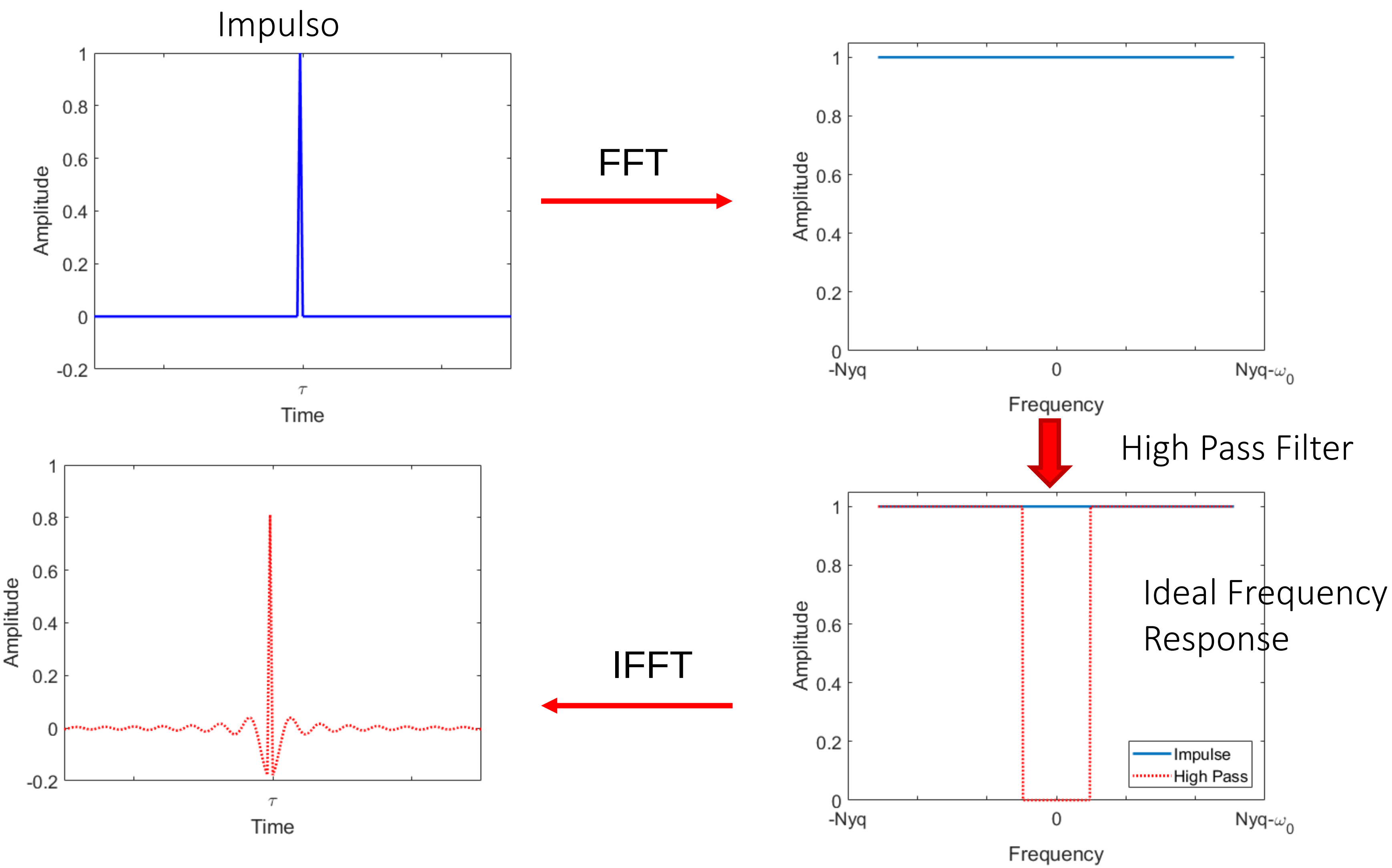
Introdução a Filtragem Digital

- Ex. filtro passa baixa com corte abruto



Introdução a Filtragem Digital

- Ex. filtro passa alta com corte abruto



Introdução a Filtragem Digital

- A sequência ilustrada nos slides anteriores pode ser utilizada para se avaliar a resposta temporal de qualquer filtro linear de tempo finito (FIR)
- Nota-se que no tempo as oscilações causadas pelo filtro tem longa duração.
- Isso tende a espalhar o efeito do filtro em toda a serie temporal e causa um aumentar da oscilação do sinal(ripple)
- Como reduzir esse efeito?

Introdução a Filtragem Digital

- Pode-se pensar em modificar a função de filtragem utilizando tanto as características no tempo como no espectro.
- É nesse cenário que diversas funções de filtragem são propostas na literatura.
- Em linhas gerais, busca-se com essas funções um compromisso entre espalhamento no tempo, inclinação da rampa de atenuação e oscilação no tempo e no espectro.
- São abordados aqui dois exemplos de filtros.
  - Media móvel
  - Sinc enjanelado

Filtro Média Móvel

- Equação que representa uma média móvel

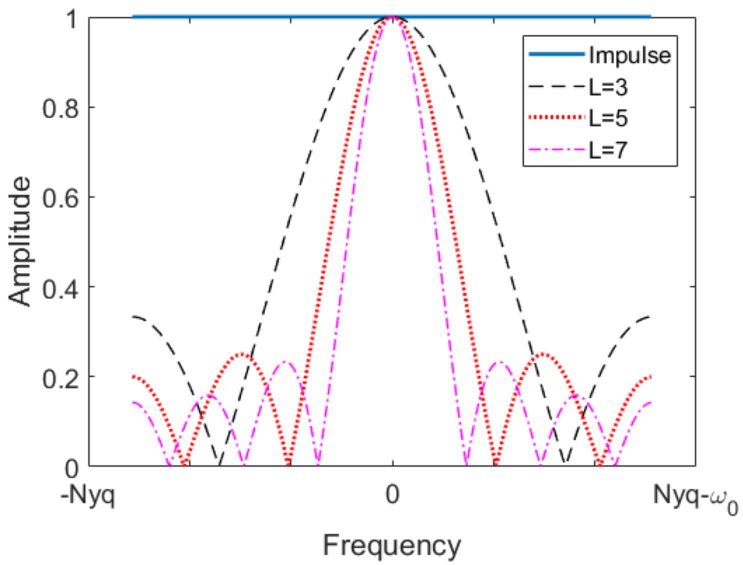
$$f[n] = \frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L} \delta[n-m]$$

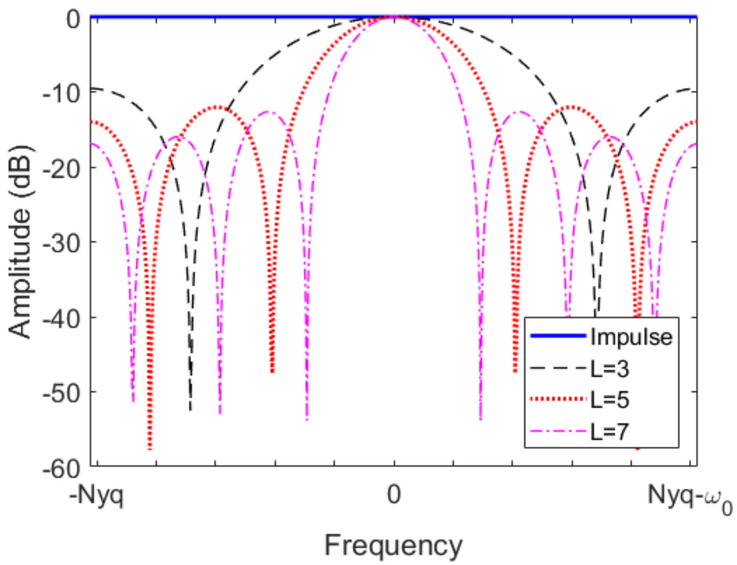
onde L é o comprimento da janela de média

- Isso corresponde a função boxcar (janela retangular) que tem transformada de Fourier conhecida (aulas anteriores) e igual a função sinc. (Pode ser facilmente verificado através da FFT da função impulso após a aplicação de um filtro por média móvel).

Filtro Média Móvel

- Representação no espectro de um filtro do tipo média móvel, com diferentes tamanhos de janela.





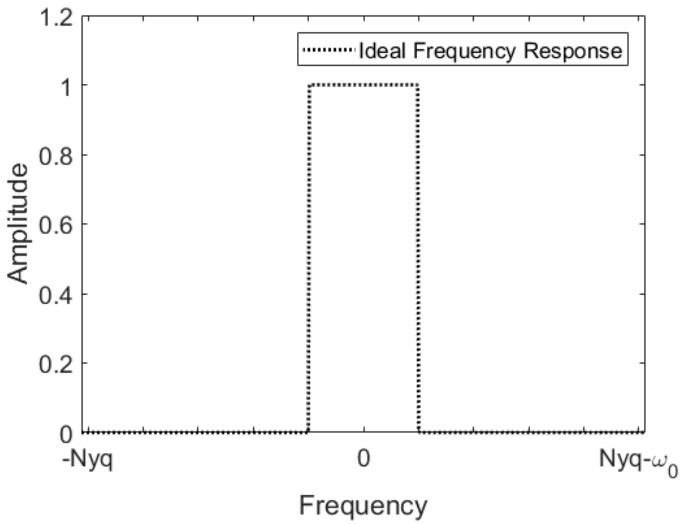
- Observa-se que esse é um filtro passa baixa com largura do lóbulo principal, taxa de decaimento e redução para o primeiro modulo definidas pelo tamanho da janela de média.

Filtros Sinc enjanelados

- Este tipo de filtro se baseia no enjanelamento de uma função com resposta em frequência próxima da ideal.
- Isso restringe o tempo de influência do filtro (corte ideal $\rightarrow\infty$).
- Esses filtros podem ter excelente resposta em frequência, mas ao custo de elevada oscilação do sinal temporal.
- A redução da oscilação temporal, demanda uma redução na rampa de atenuação do filtro.
- Logo, os parâmetros do filtro são ajustados para se buscar um compromisso entre inclinação da rampa de atenuação e oscilação no tempo e no espectro.

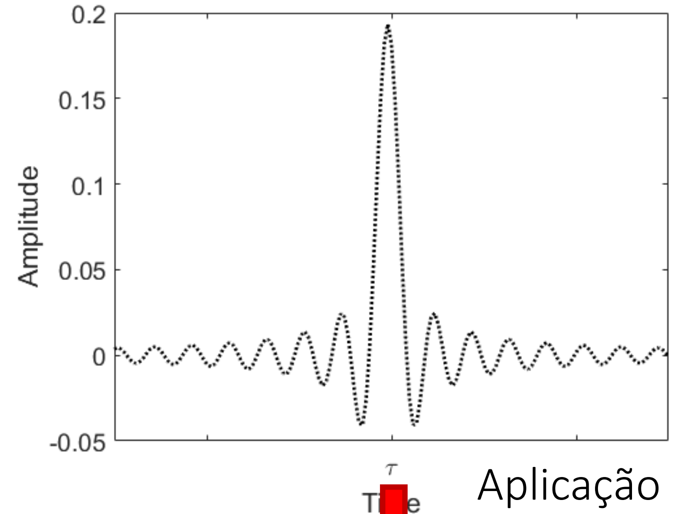
Filtros Sinc enjanelados

➢ Exemplo de funcionamento.

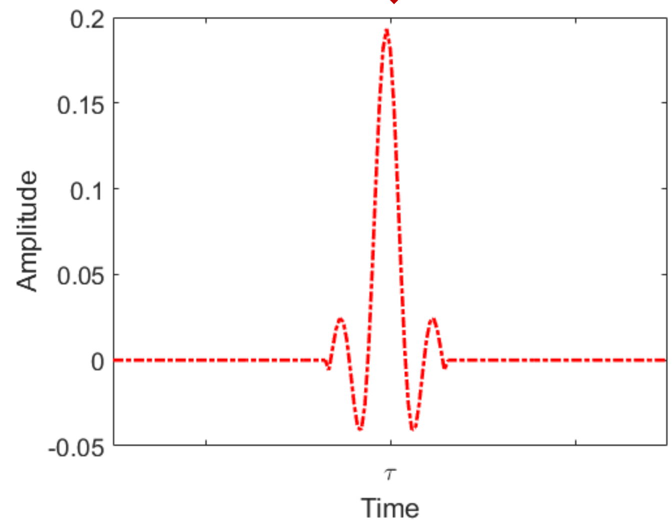


IFFT

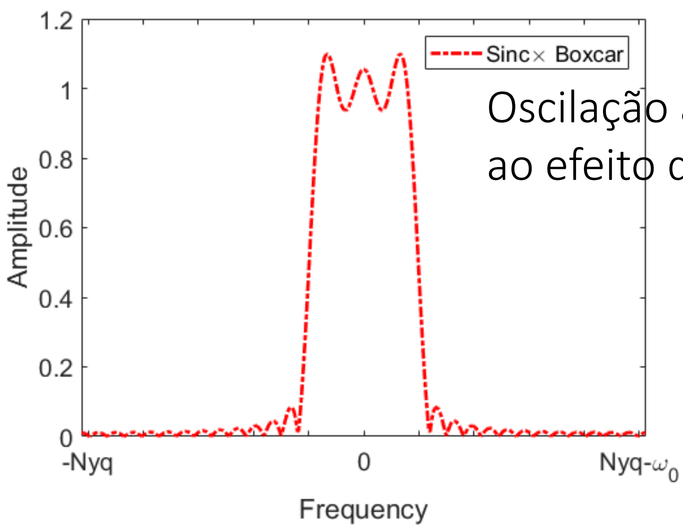
Representação no domínio do tempo



Aplicação de janela retangular



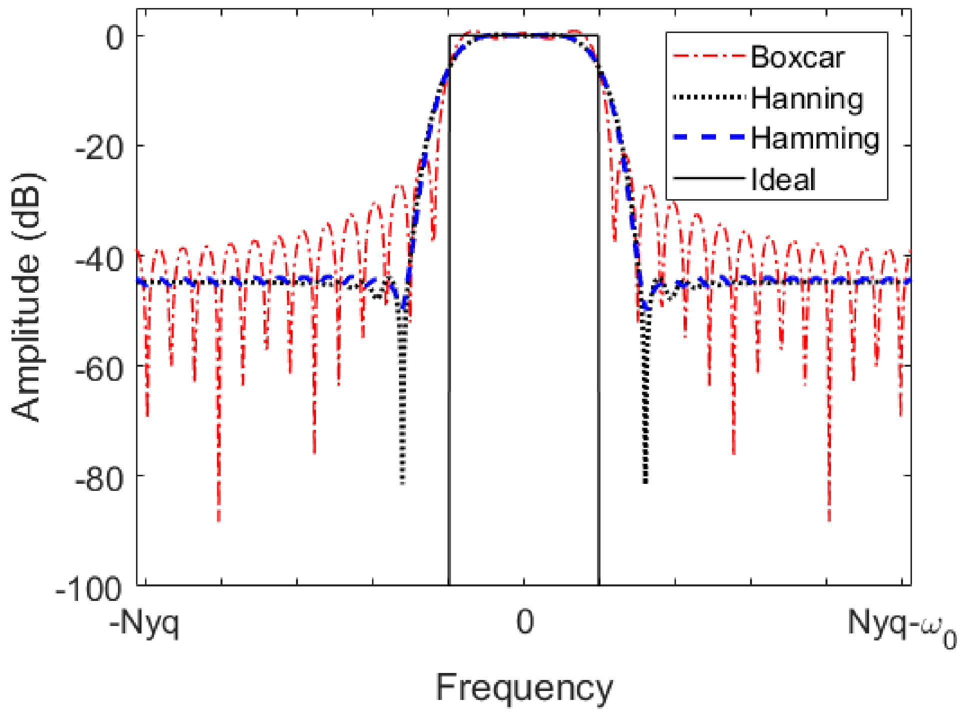
FFT



Oscilação análoga
ao efeito de Gibbs

Filtros Sinc enjanelados

- Pode-se combinar diferentes tipos de janela para truncar a resposta temporal do filtro (Welch, Hanning, Hamming, etc).



- É possível ainda fazer a filtragem em múltiplos estágios (filtrar o sinal filtrado). Tende a melhorar a performance do filtro, ao custo de um maior tempo de processamento

Transformada de Fourier 2D

Introdução a transformada de Fourier 2-D

- É muito útil no processamento de imagens ou séries de dados que possuem mais de uma dimensão (ex.: tempo e espaço, ou mais de uma dimensão no espaço).

- Definição

DIRETA:
$$F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy$$

INVERSA
$$f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u,v)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i(ux+vy)}dudv$$

- É importante ressaltar que todas as propriedades já vistas para a transformada 1-D podem ser estendidas para o caso 2-D

Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Na forma discreta a transformada 2D pode ser escrita como

DIRETA: $$F[u,v] = \mathcal{F}\{f[x,y]\} = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]e^{-i(\frac{2\pi um}{M}+\frac{2\pi vn}{N})}$$

INVERSA $$f[x,y] = \mathcal{F}^{-1}\{F[u,v]\} = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F[u,v]e^{i(\frac{2\pi um}{M}+\frac{2\pi vn}{N})}$$

- Onde 2π/M e 2π/N são as frequências fundamentais nas direções x e y. Pode-se modificar a transformada 2D de modo que

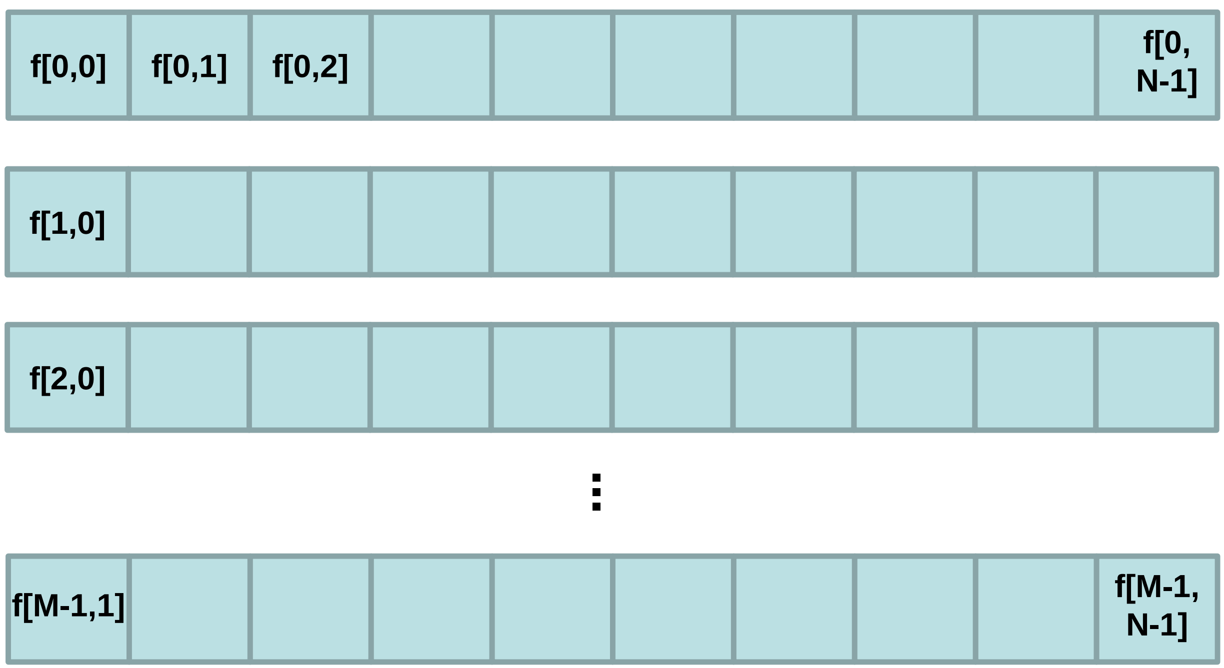
$$F[u,v] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]e^{-i\left(\frac{2\pi vn}{N}\right)}\right]e^{-i\left(\frac{2\pi um}{M}\right)}$$

Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Logo, pode-se encontrar a transformada 2D a partir da transformada 1D:

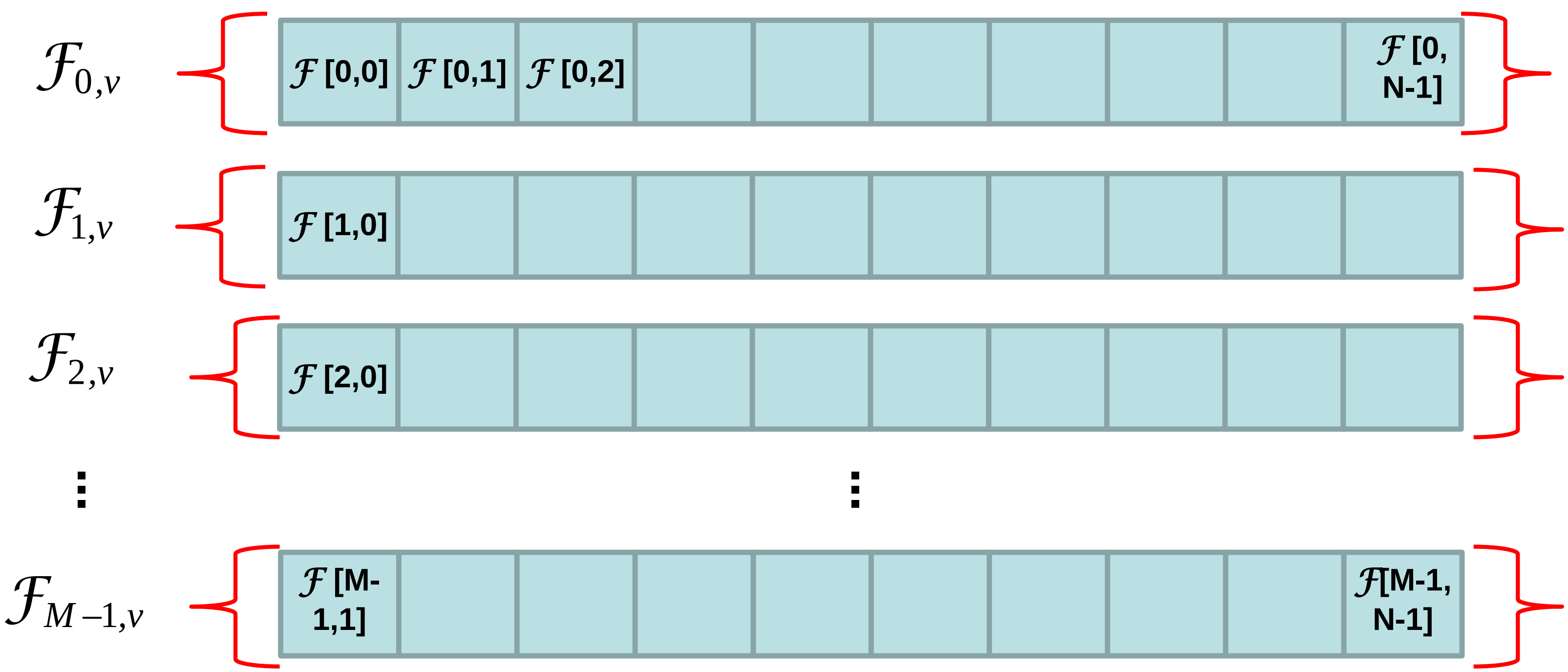
$$F[u,v] = \mathcal{F}_u\{\mathcal{F}_v\{f[m,n]\}\}$$

- Graficamente pode-se exemplificar o procedimento como:



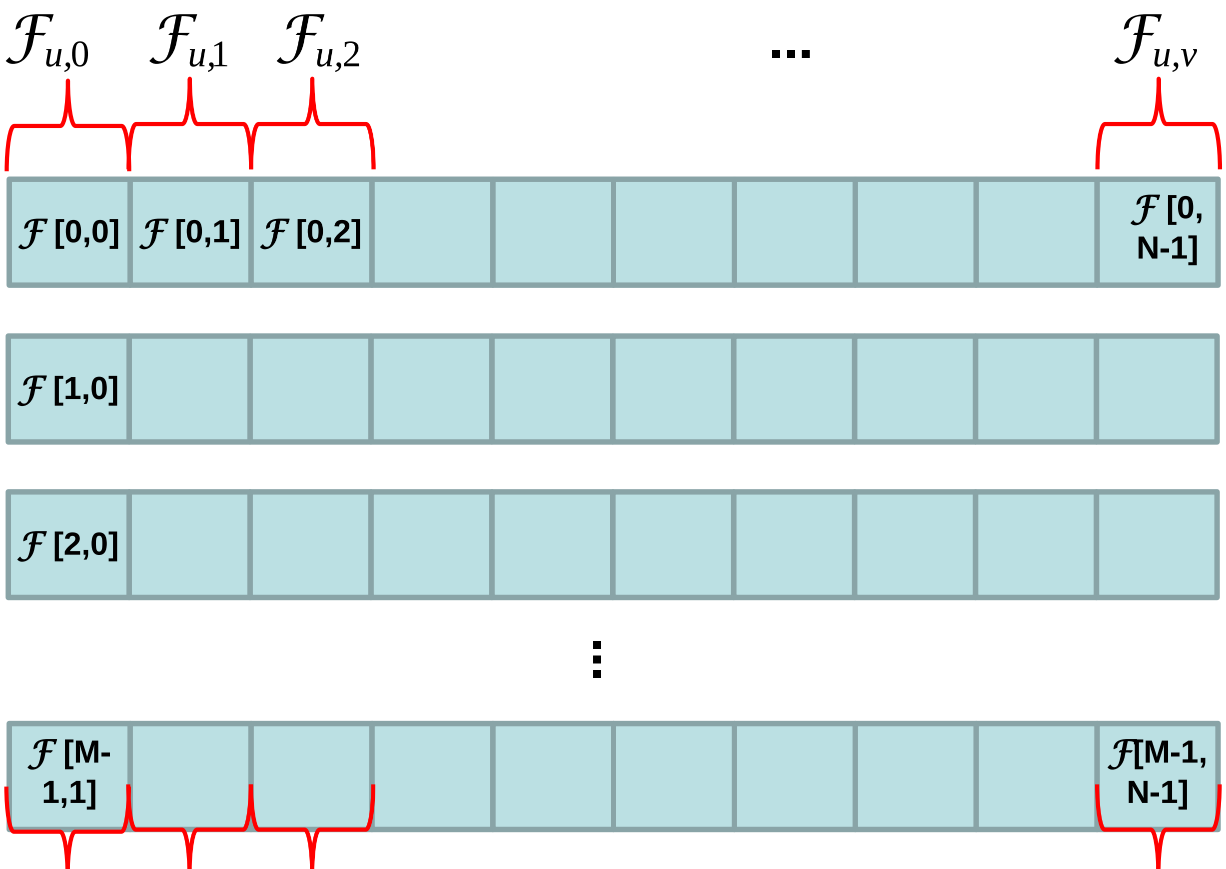
Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Aplica-se a FFT 1D em uma das dimensão da serie de dados. No caso escolheu-se iniciar pela dimensão (1,n). Esse procedimento é repetido M vezes.



Introdução a transformada de Fourier 2-D

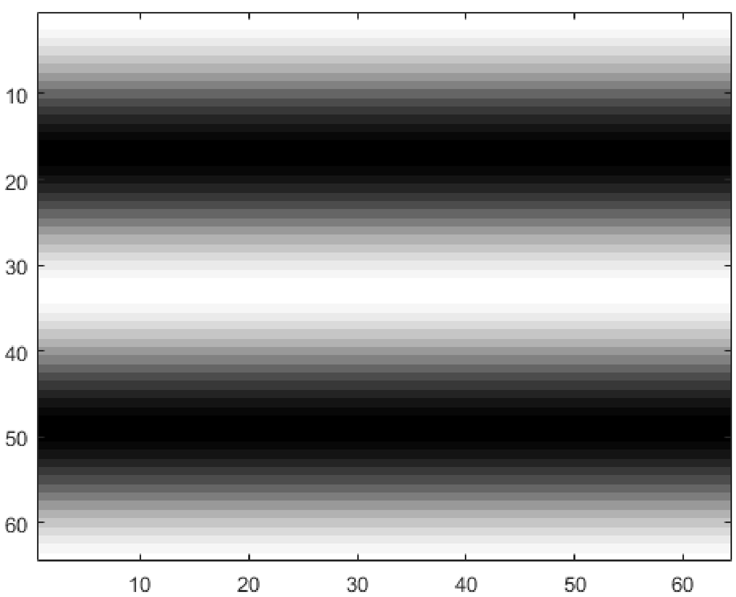
- Depois aplica-se a transformada de Fourier 1D novamente ao longo da dimensão M (linhas), para cada coluna.

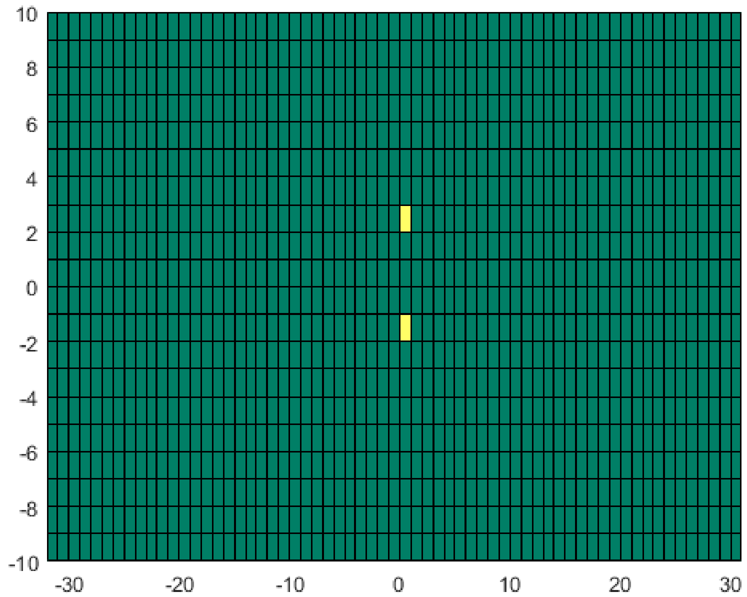


Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Exemplos.

$$f[x,y] \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{F}\{f[x,y]\}$$

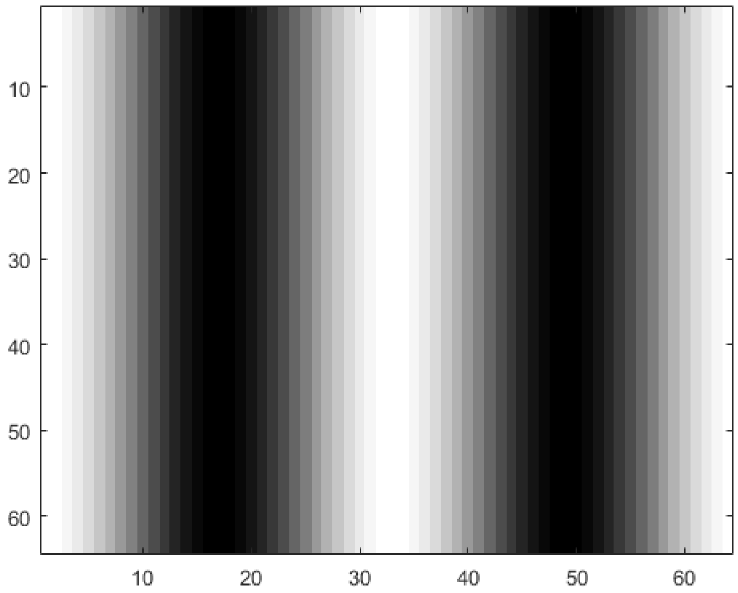


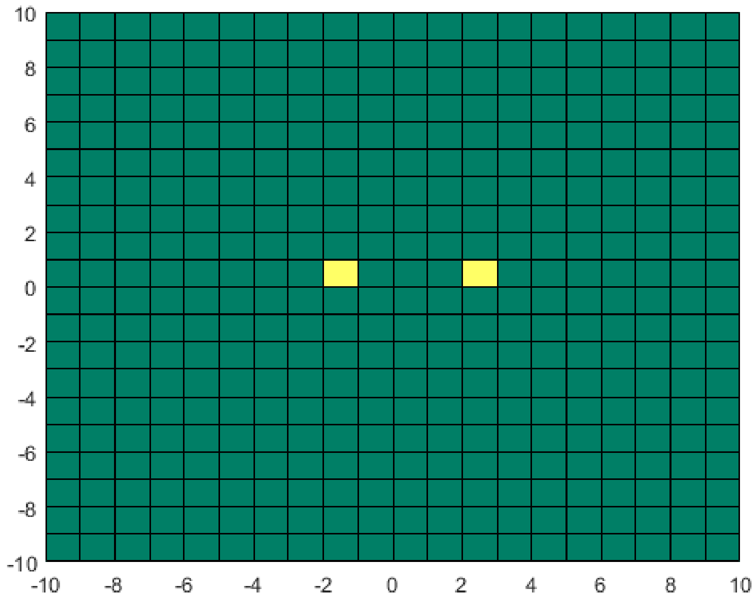


Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Exemplos.

$$f[x,y] \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}\{f[x,y]\}$$

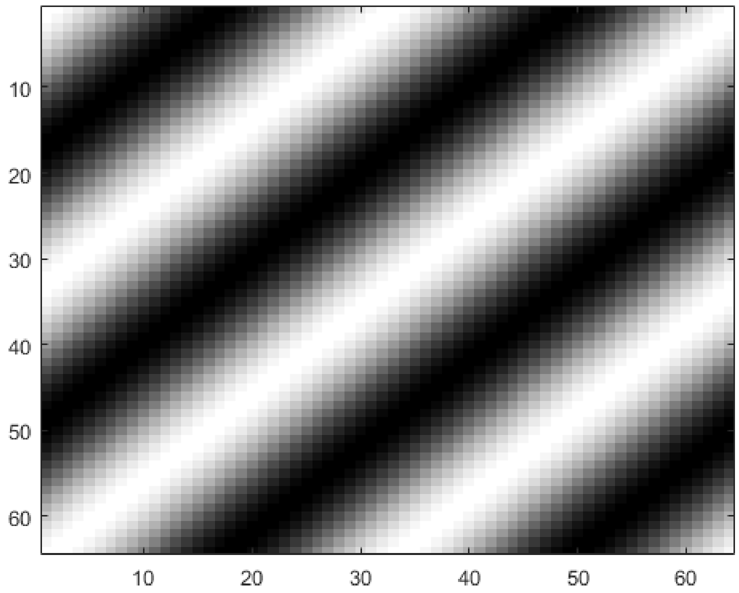


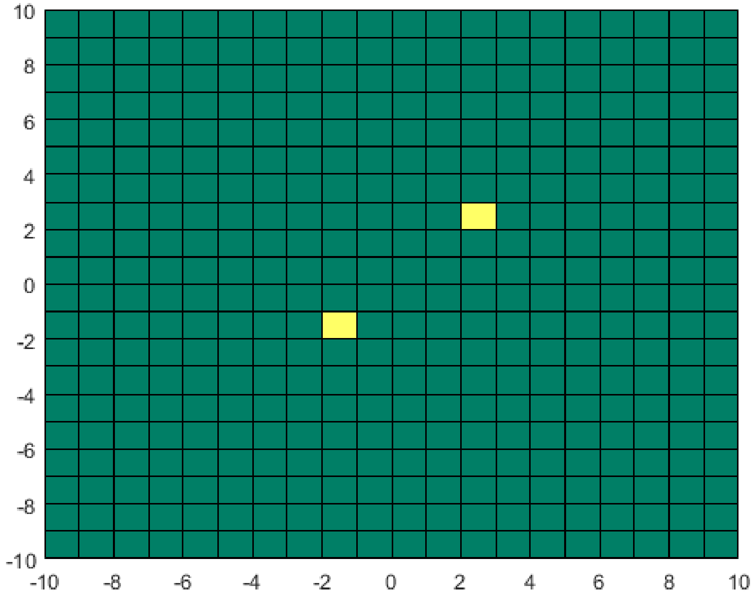


Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Exemplos.

$$f[x,y] \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{F}\{f[x,y]\}$$

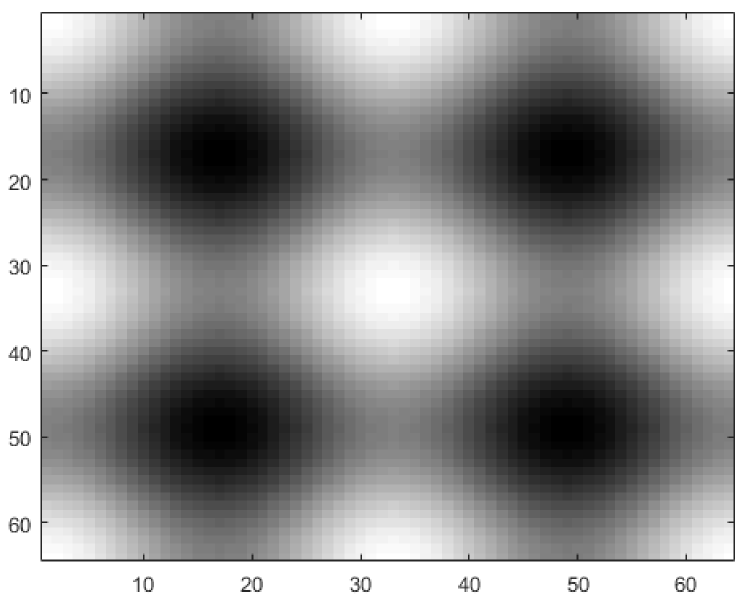


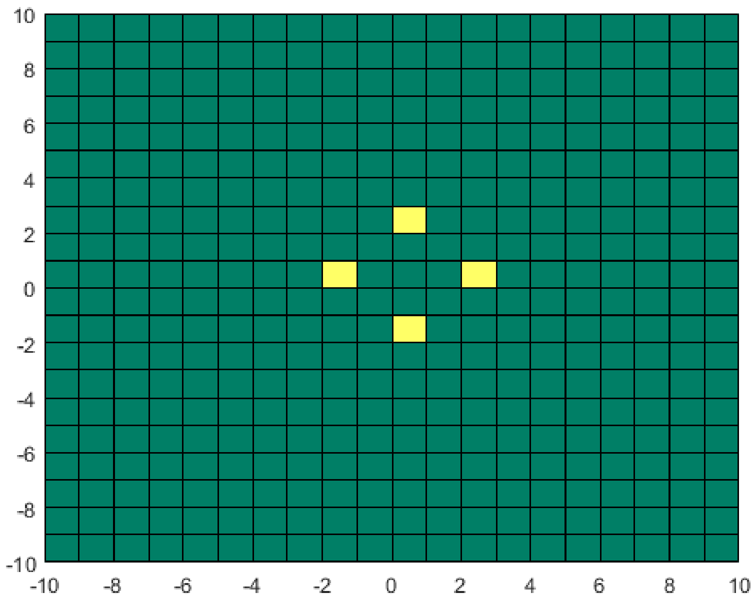


Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Exemplos.

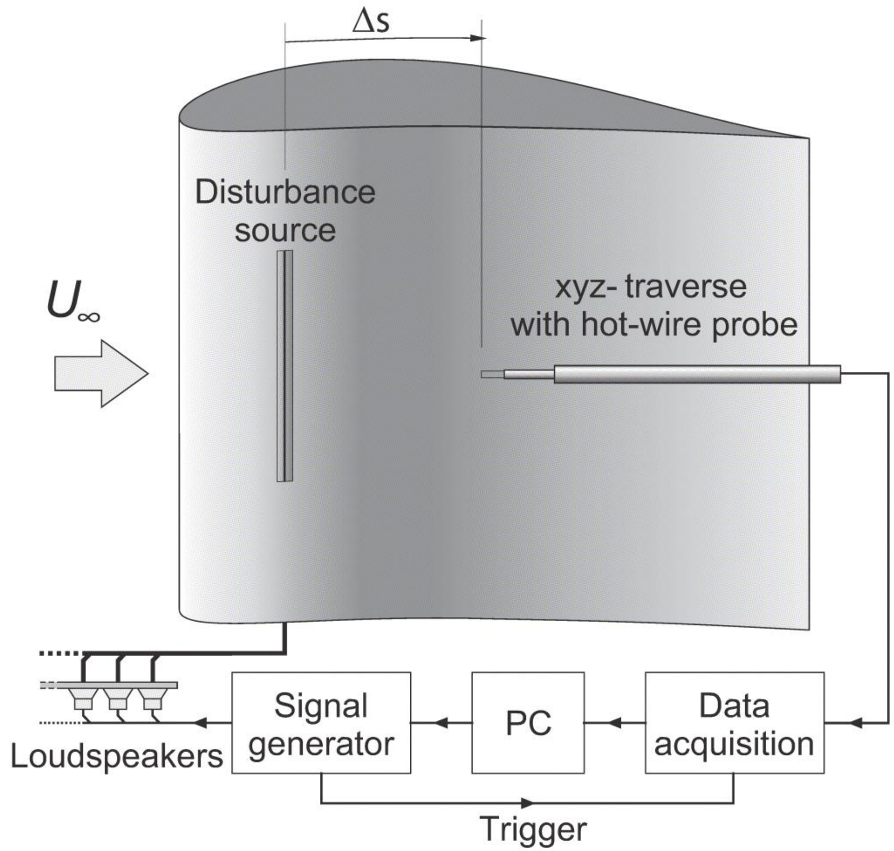
$$f[x,y] \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{F}\{f[x,y]\}$$





Introdução a transformada de Fourier 2-D

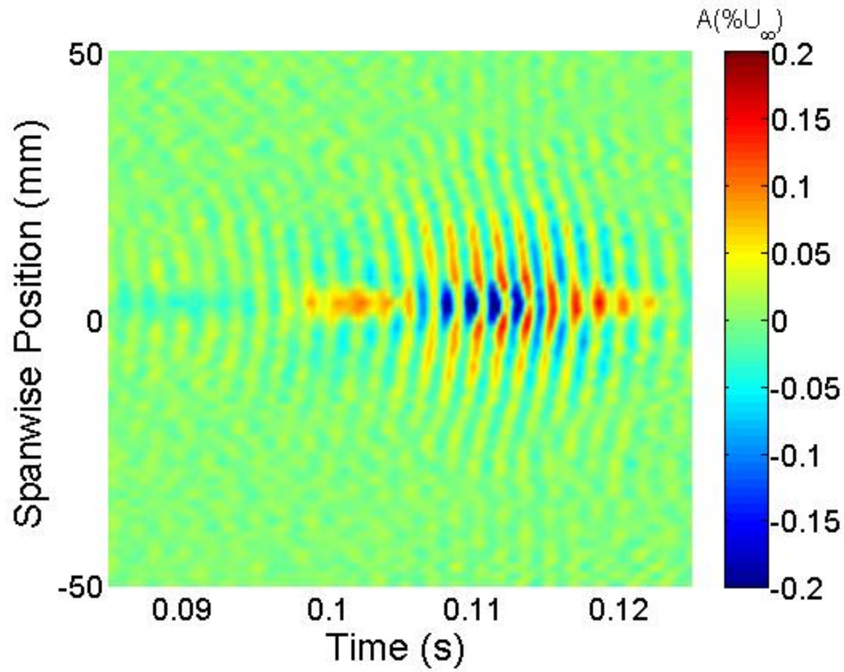
- Exemplos com series temporais amostradas ao longo do espaço



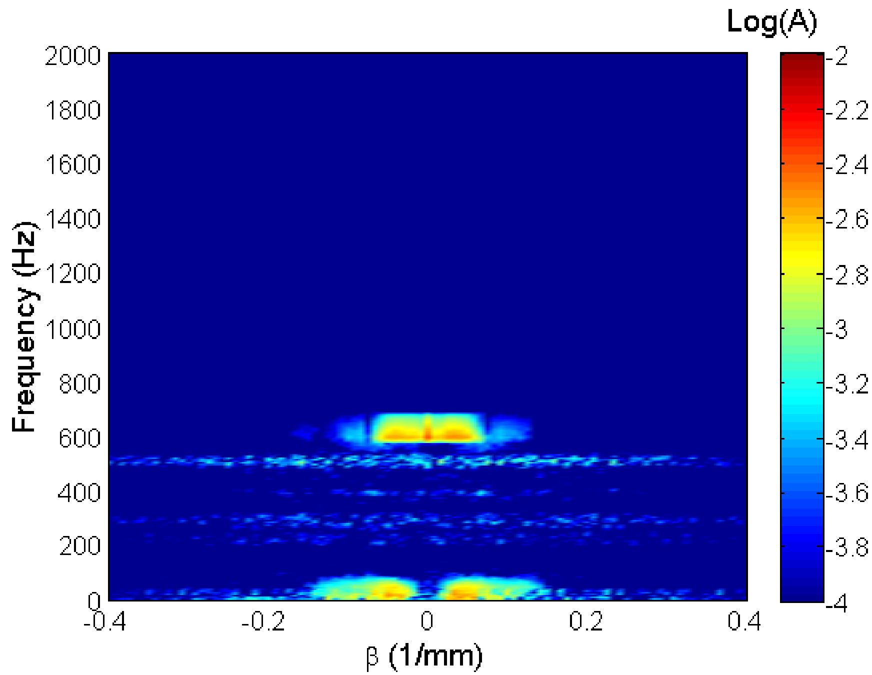
Introdução a transformada de Fourier 2-D

- Exemplos com series temporais amostradas ao longo do espaço

$$f[t,z] \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{F}\{f[t,z]\}$$



Ondas no plano paralelo a superfície



Espectro de Frequências e números de onda na direção transversal

Exercícios

- 1. Criar no matlab um sinal discreto com 1024 elementos e período de amostragem 2π, para a função
*x(t)=cos(12.5*t)+cos(18.5*t+pi/4)+cos(32.5*t+pi/3)+cos(40.5*t+3*pi/5);*
Calcular e apresentar graficamente o espectro de frequências (Magnitude e fase) e o periodograma (método de Welch). O tamanho de cada bloco é livre, cada aluno pode escolher um. A função de enjanelamento utilizada no periodograma de Welch também fica a escolha do aluno. Analisar os resultados obtidos

- 2. Preencher o sinal com zeros para que a frequência fundamental seja divisor inteiro das frequências contidas no sinal. Apresentar o espectro de frequências (Magnitude e fase). Comentar resultados e comparar com resultado do exercício anterior.

Exercícios

- 3. Aplicar funções de enjanelamento ao sinal e fazer o preenchimento com zeros. A frequência fundamental após o preenchimento com zeros deve ser igual a do exercício anterior. Fazer FFT magnitude e fase. Apresentar resultados para pelo menos duas funções de enjanelamento (hamming e buscar outra na literatura). Comentar os resultados e diferenças em relação aos espectros obtidos nos exercícios 1 e 2. anteriores
- 4. Separar sinais utilizando um filtro a escolha do aluno com frequência de corte ajustada para 25Hz. Fazer a transformada inversa do sinal filtrado e comparar com sinal temporal ideal. Analisar resultados

Obs: No caso de um filtro passa baixa o sinal temporal ideal deveria ser: *x(t)=cos(12.5*t)+cos(18.5*t+pi/4)* . Já no caso do passa alta, o sinal ideal deveria ser: *x(t)=cos(32.5*t+pi/3)+cos(40.5*t+3*pi/5);*

Exercícios

- 5. Gerar uma imagem a partir dos comandos

```
for i=1:64
    for j=1:64
        img(i,j)=cos(5*pi*(i-1)/64+8*pi*(j-1)/64);
    end
end
```

Fazer a transformada 2D de duas maneiras distintas, uma com a transformada 2D e outra usando várias vezes a transformada 1D, conforme ilustrado nos slides. Comparar resultados