Análise espectral em duas dimensões - continuação

Introdução

- Como aplicar o que já foi visto no processamento de dados em duas dimensões?
- No caso de imagens, por exemplo
  - Filtros
  - Detecção de bordas
  - Remoção de ruído e restauração
  - Compressão de dados
  - etc

Introdução

- Na última aula foram discutidos os conceitos de enjanelamento e filtragem.
- Além disso foi introduzida a ideia de análise espectral em duas dimensões.
- Nessa aula vamos combinar esses conceitos e demonstrar a importância na análise de imagens.

Continuação FFT 2-D

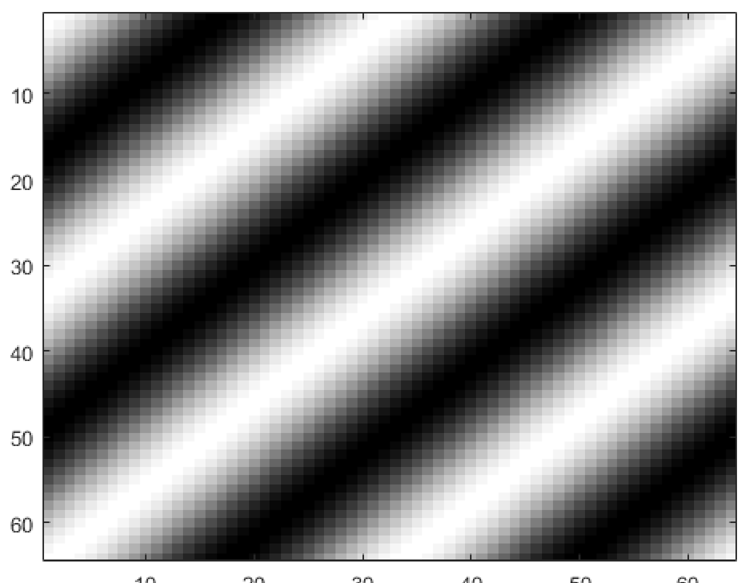
- Antes de tratar do processamento de matrizes com a transformada 2-D vamos ver algumas de suas propriedades

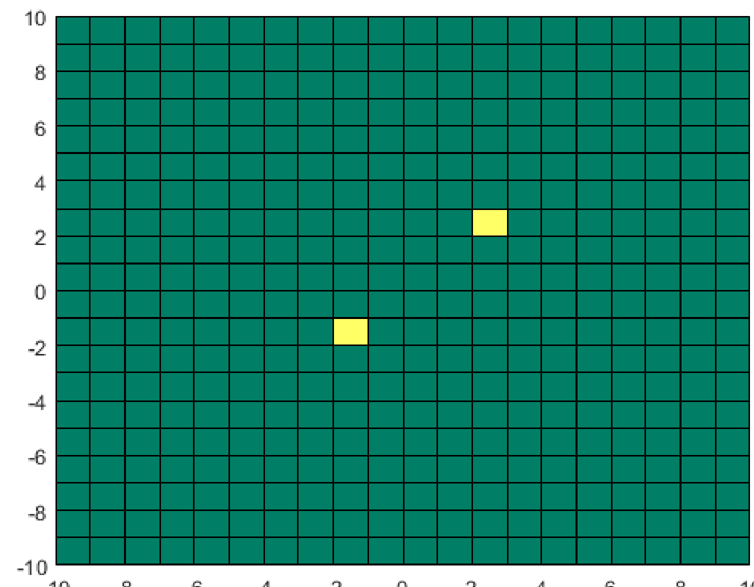
$$F[u,v] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]e^{-i\left(\frac{2\pi vn}{N}\right)}\right]e^{-i\left(\frac{2\pi um}{M}\right)}$$

Separabilidade

- Exemplo

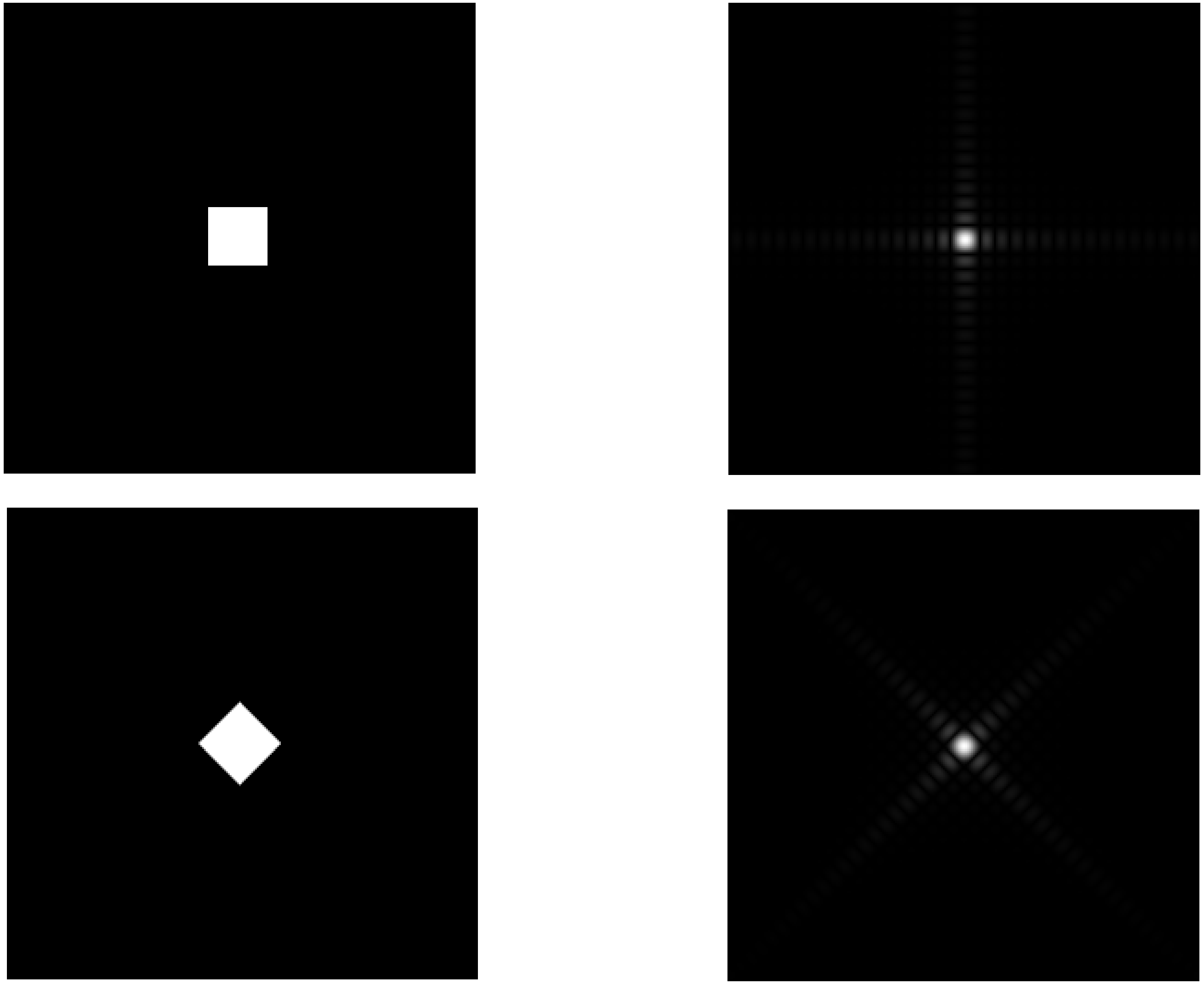
$$f[x,y] \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}\{f[x,y]\}$$





Continuação FFT 2-D

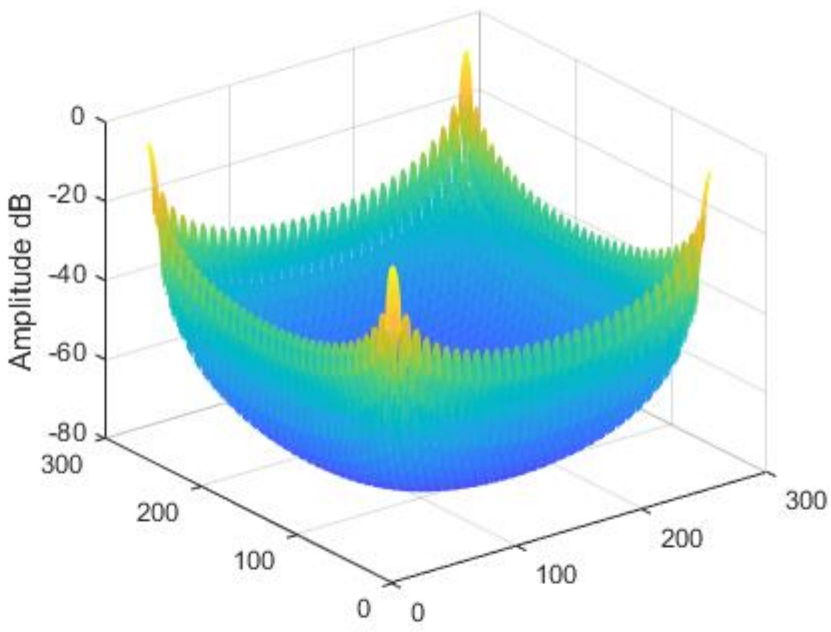
- Rotação $f[m,n]$ $\rightarrow$ $\mathcal{F}\{f[m,n]\}$



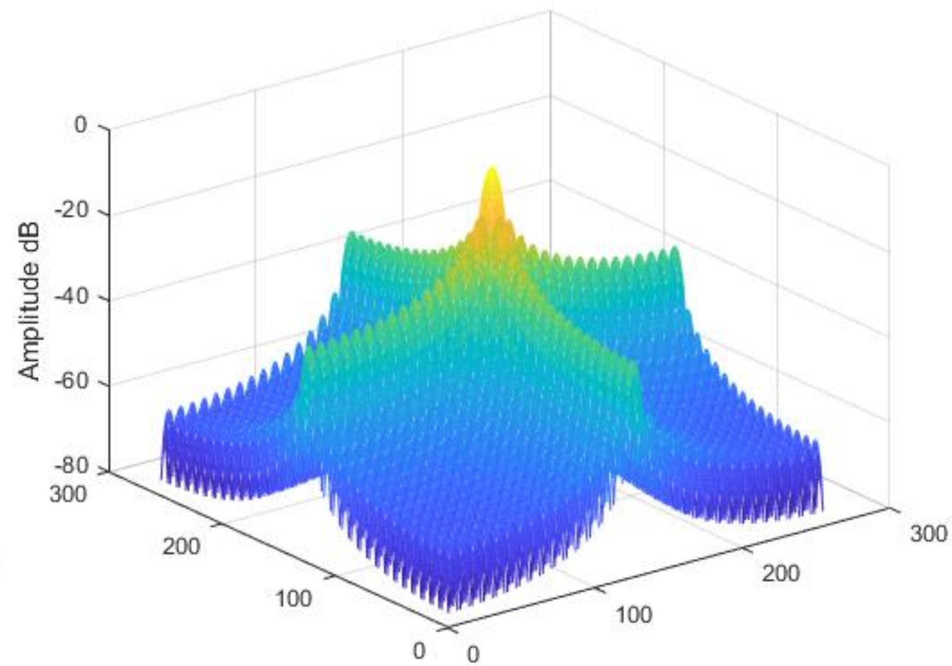
Continuação FFT 2-D

- Centralização do espectro

FFT sem centralização

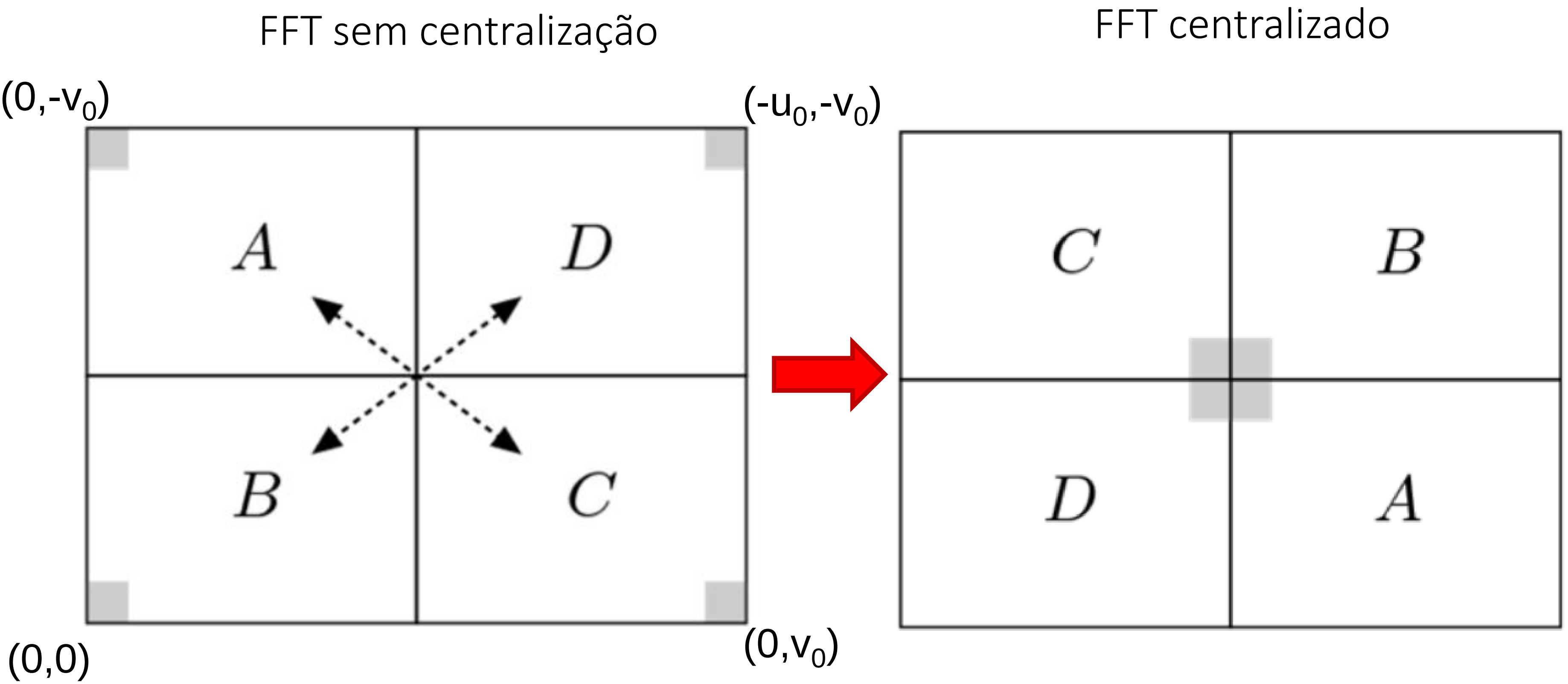


FFT centralizado



Continuação FFT 2-D

- Centralização do espectro. Como funciona?



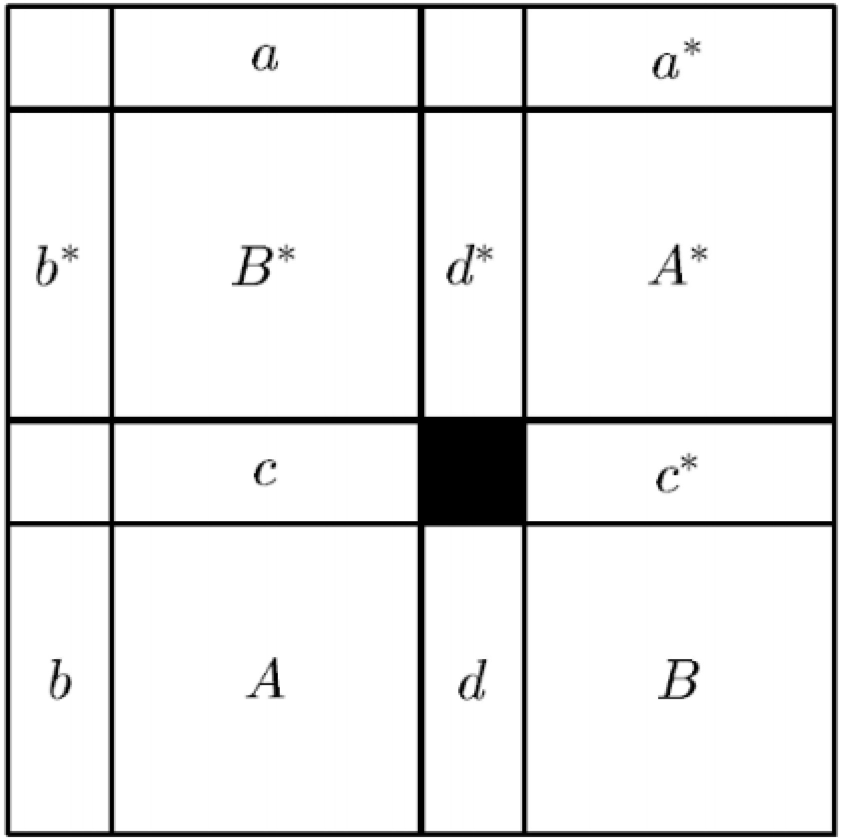
Consiste em trocar os quadrantes para centralizar a frequência (0,0)

Continuação FFT 2-D

- Simetria Conjugada

$$\mathcal{F}\{u,v\} = \mathcal{F}^*\{-u,-v\}$$

- A informação está contida em metade do espectro

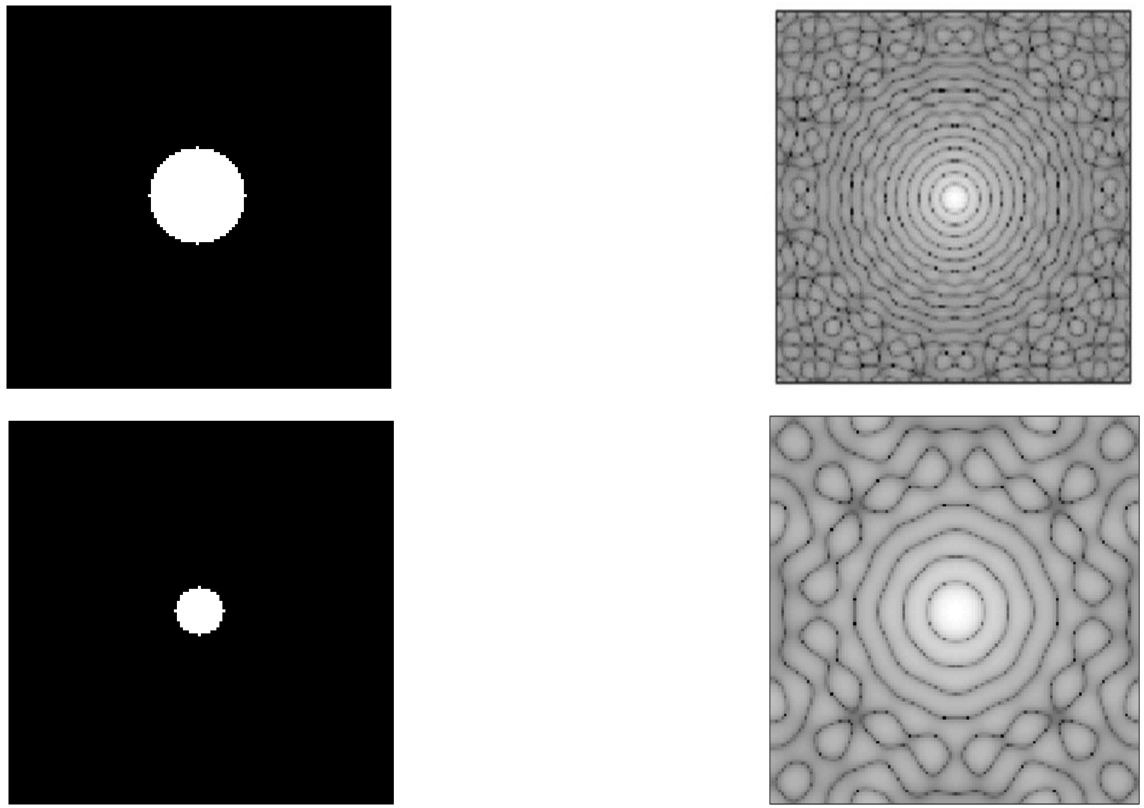


Espectro centralizado

Continuação FFT 2-D

- Efeito de descontinuidades

$$f[m,n] \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}\{f[m,n]\}$$



Log(A)

Com base no que já foi visto, por que isso ocorre?

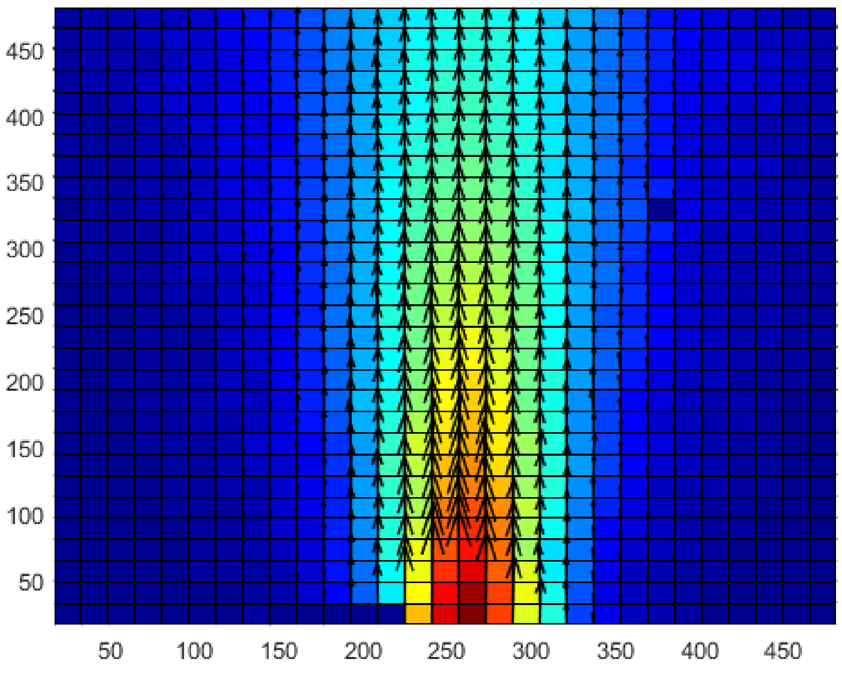
Enjanelamento

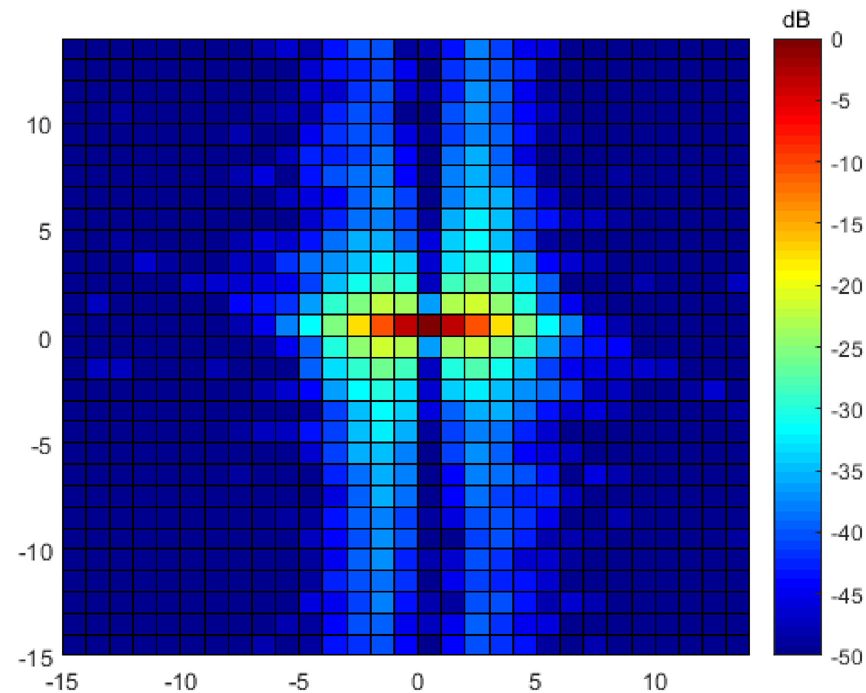
- No caso de imagens, é de se esperar a presença de várias descontinuidades (diferentes objetos). Logo, o espectro de imagens é tipicamente ruidoso.
- Por isso, o uso de funções de enjanelamento não é muito comum no processamento de imagens.
- Já para outros tipos de dados em duas dimensões, o uso de janelas pode ser muito útil, assim como no caso 1-D.

Enjanelamento

- Exemplo (Escoamento de um Jato medido com a técnica de PIV)

$$f[m,n] \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}\{f[m,n]\}$$

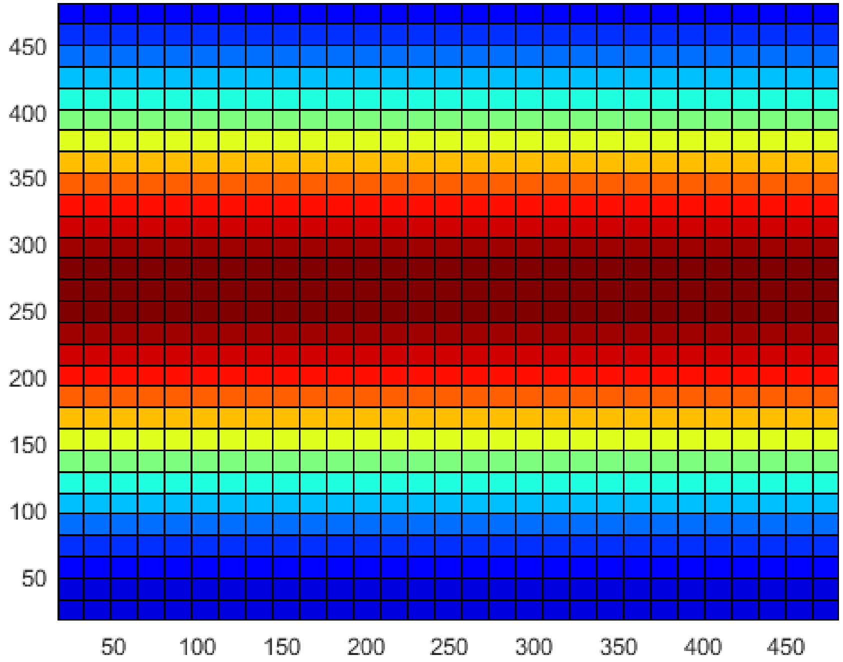


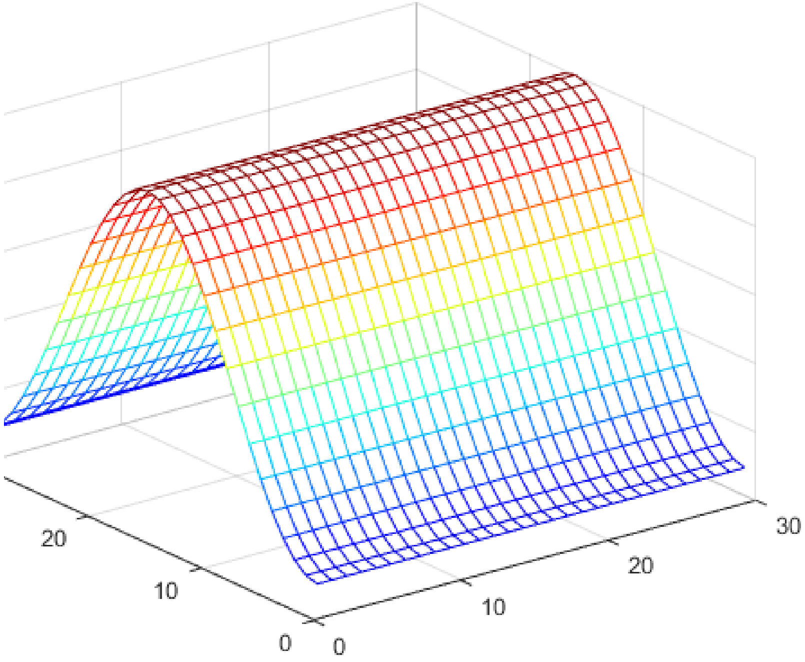


Enjanelamento

- Exemplo (Escoamento de um Jato). Janela Hamming aplicada somente na direção onde há descontinuidade.

$$w[m,n]$$

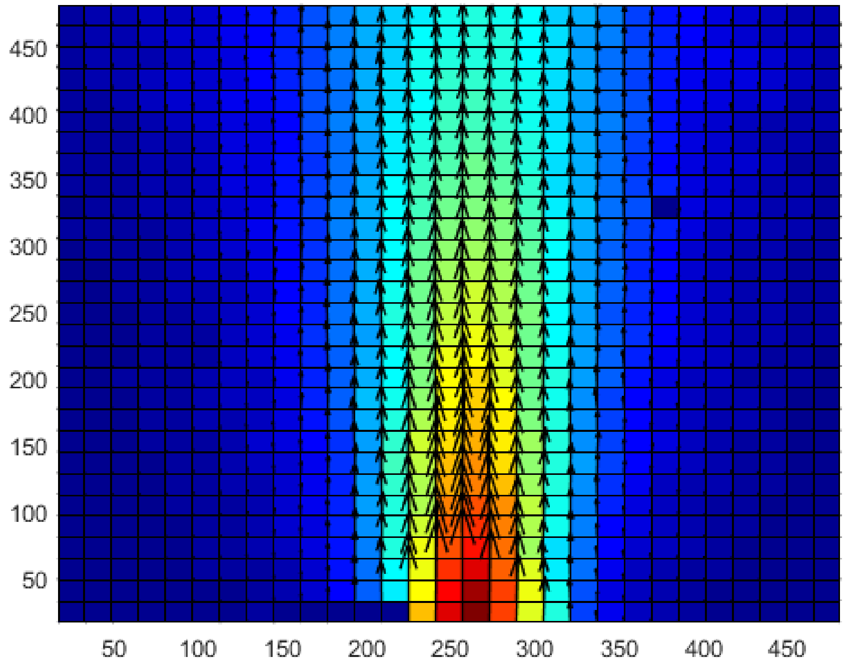


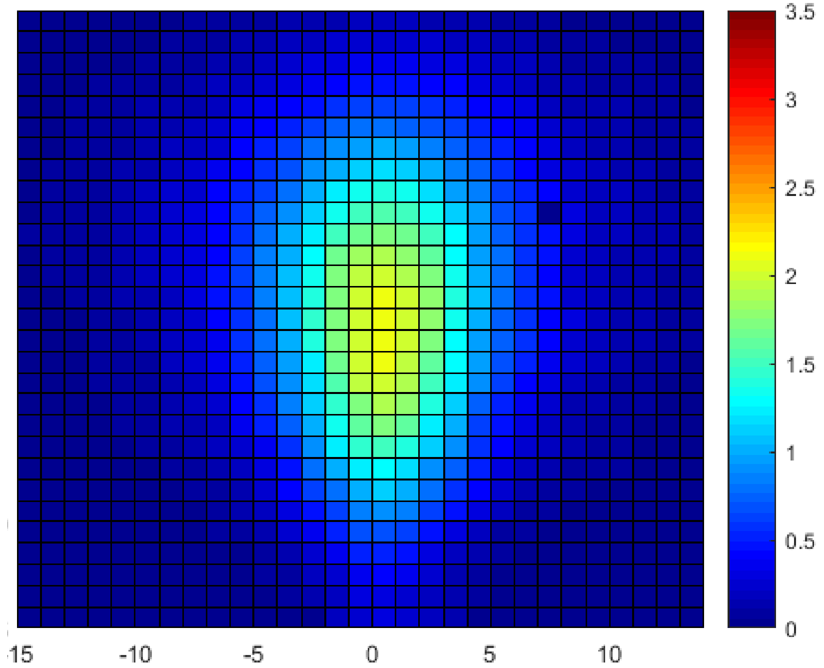


Enjanelamento

➢ Exemplo (Escoamento de um Jato)

$$f[m,n] \quad \rightarrow \quad f[m,n]w[m,n]$$

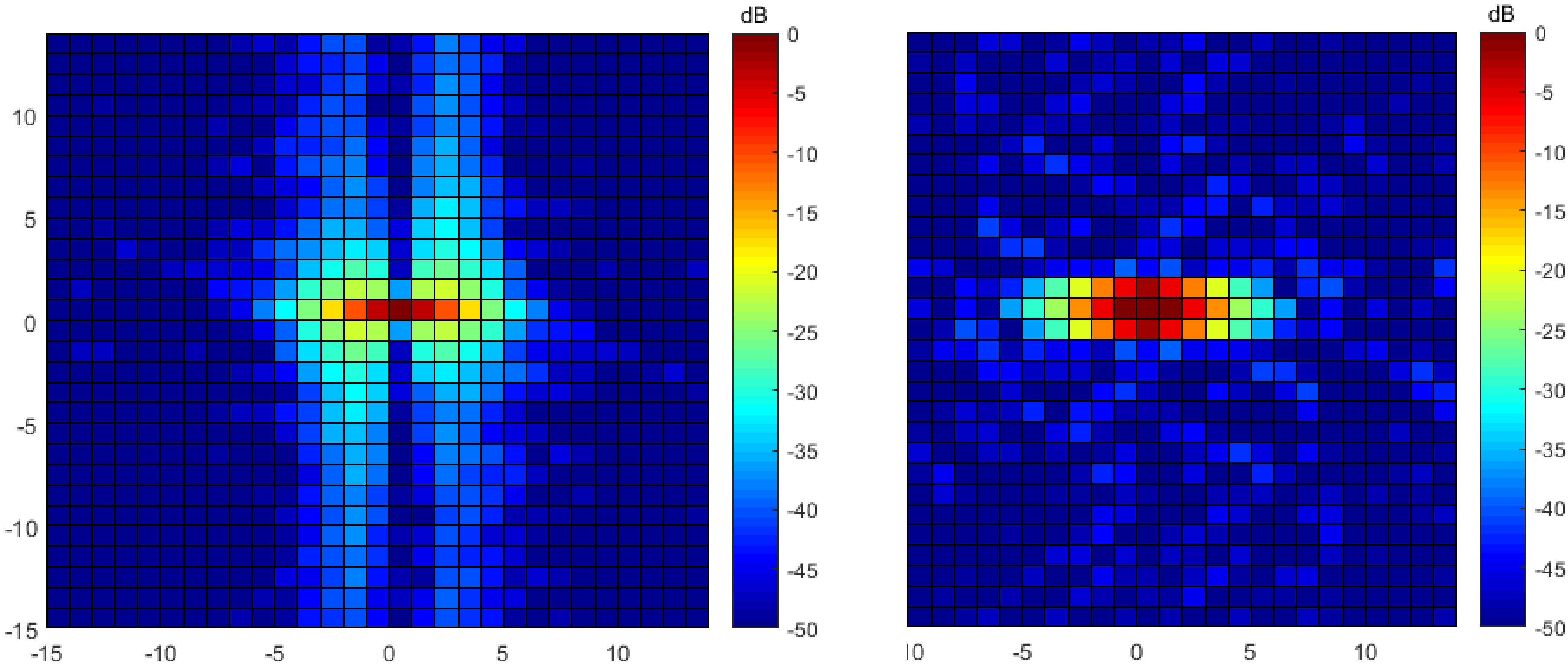




Enjanelamento

- Exemplo (Escoamento de um Jato)

$$\mathcal{F}\{f[m,n]\} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}\{f[m,n]\} \otimes \mathcal{F}\{w[m,n]\}$$



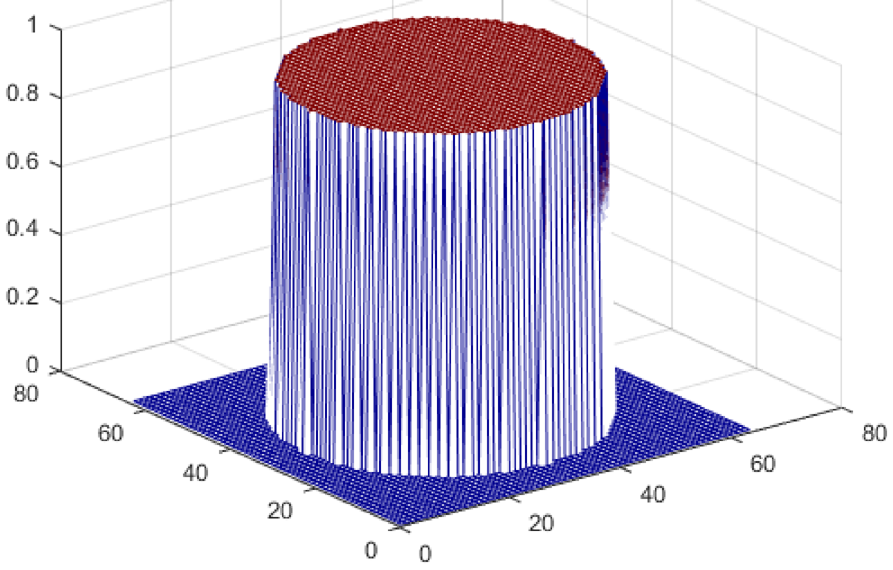
Enjanelamento

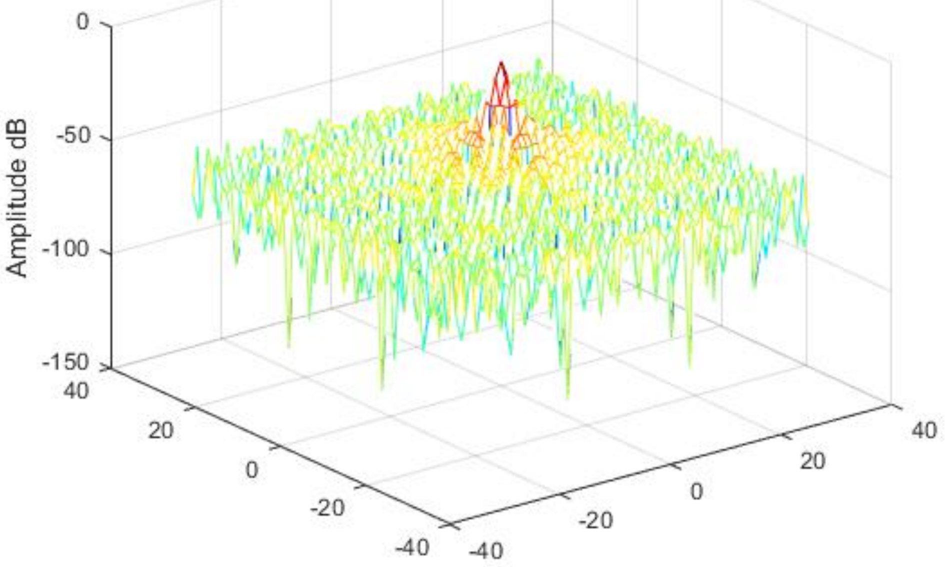
- Exemplos (Algumas funções comuns de enjanelamento)

Janela	função
Elíptica	$w[m,n] = \begin{cases} 1 & para\ 0 \leq r_{m,n} \leq r_{window} \\ 0 & para\ outros\ valores \end{cases}$
Gaussiana	$w[m,n] = e^{\left(\frac{-r_{m,n}^2}{2\sigma^2}\right)}$
Hanning	$w[m,n] = \begin{cases} 0.5\left[1 + cos\left(\pi r_{m,n}\right)\right] \\ para\ 0 \leq r_{m,n} \leq r_{window} \\ 0 \quad para\ outros\ valores \end{cases}$
onde	$r_m = \frac{m - M/2}{M/2}, r_m = \frac{n - N/2}{N/2}, r_{m,n} = \sqrt{r_m^2 + r_n^2},$ $0 < r_{window} \leq 1$

Enjanelamento

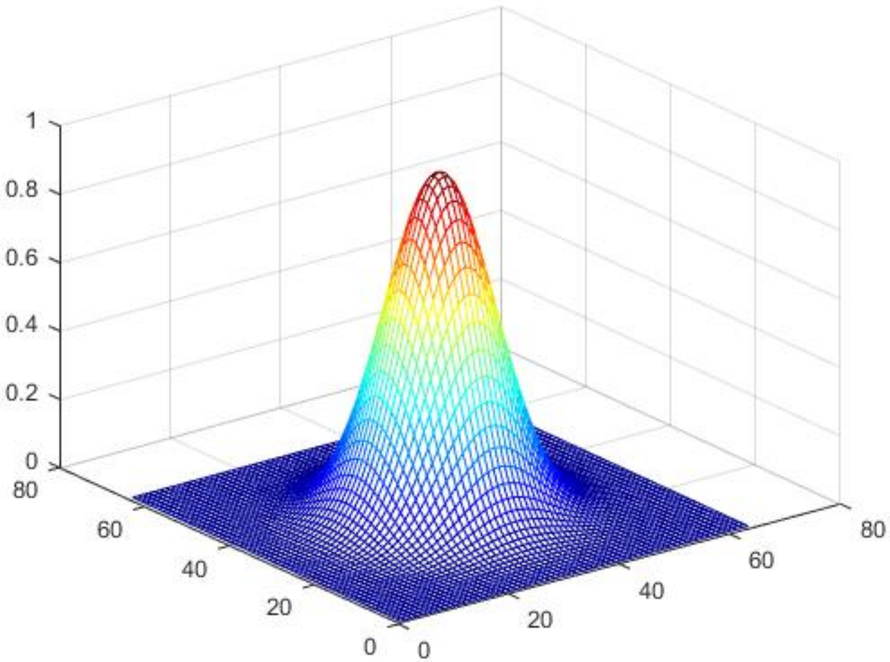
- Exemplos (Janela Elíptica)

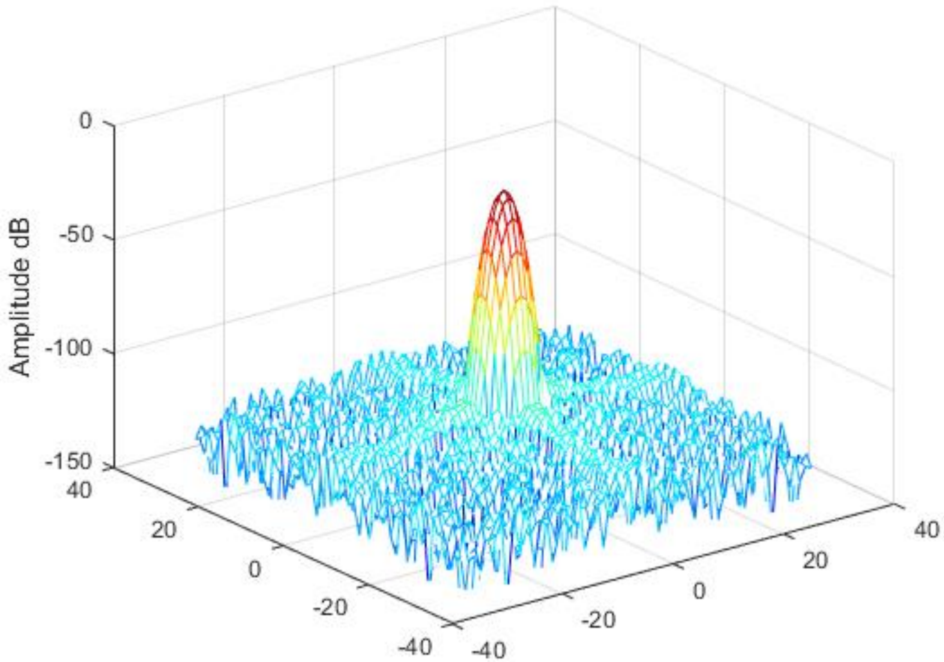




Enjanelamento

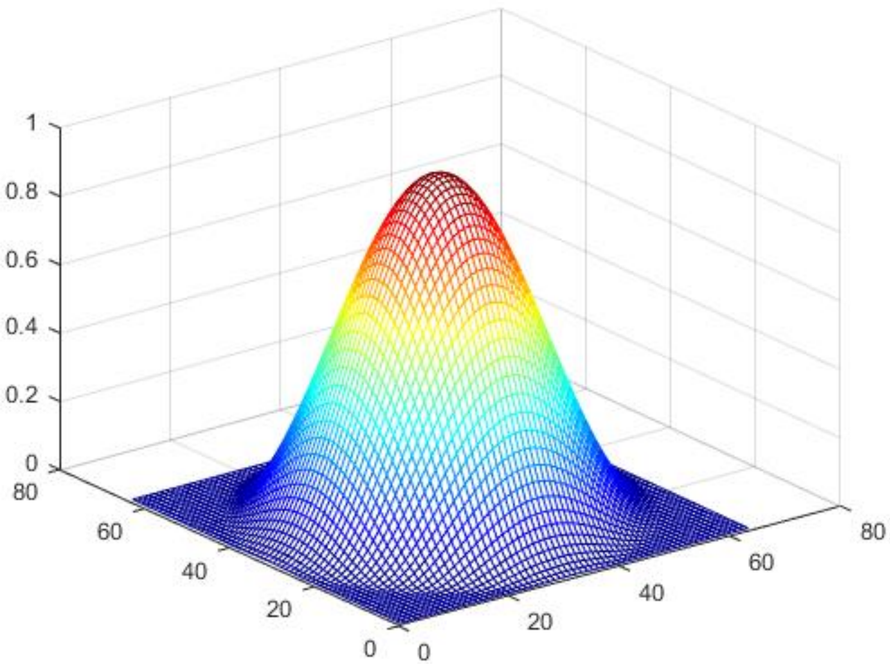
- Exemplos (Janela Gaussiana)

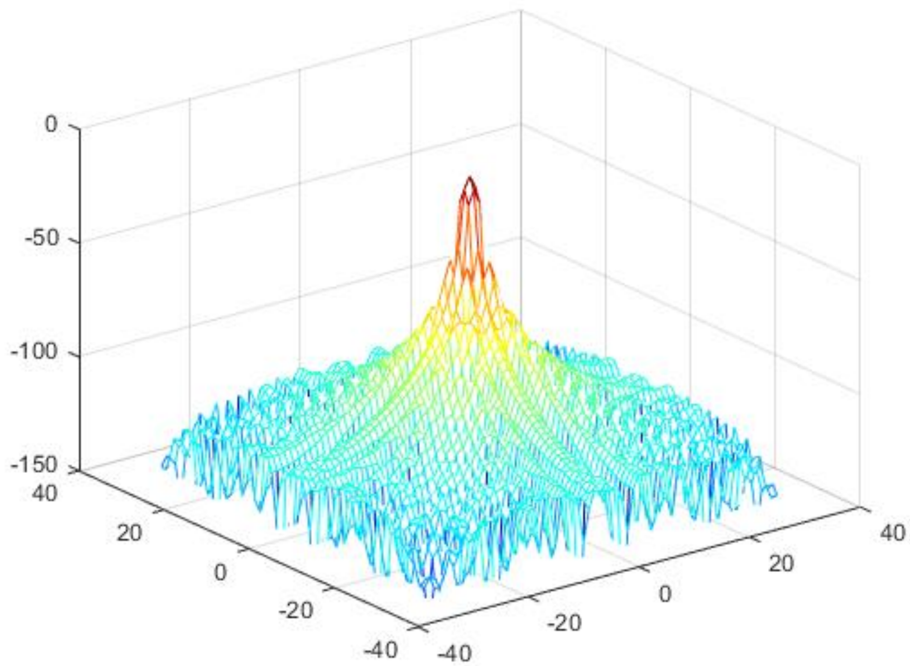




Enjanelamento

- Exemplos (Janela Hanning)





Enjanelamento

- Assim como no caso 1D existem inúmeras funções de enjanelamento e cada uma possui características específicas.
- A correção da amplitude do espectro é dada pela integral do volume da função janela dividida pelo volume equivalente de uma janela retangular de tamanho da matriz de dados.

Filtragem

- No caso 2D, assim como no caso 1D, a extração de informação em bandas específicas de frequência é facilitada com o uso de filtros digitais.

- Lembrando que a filtragem é um produto no domínio da frequência da matriz *x[m,n]* e do filtro *f[m,n]*

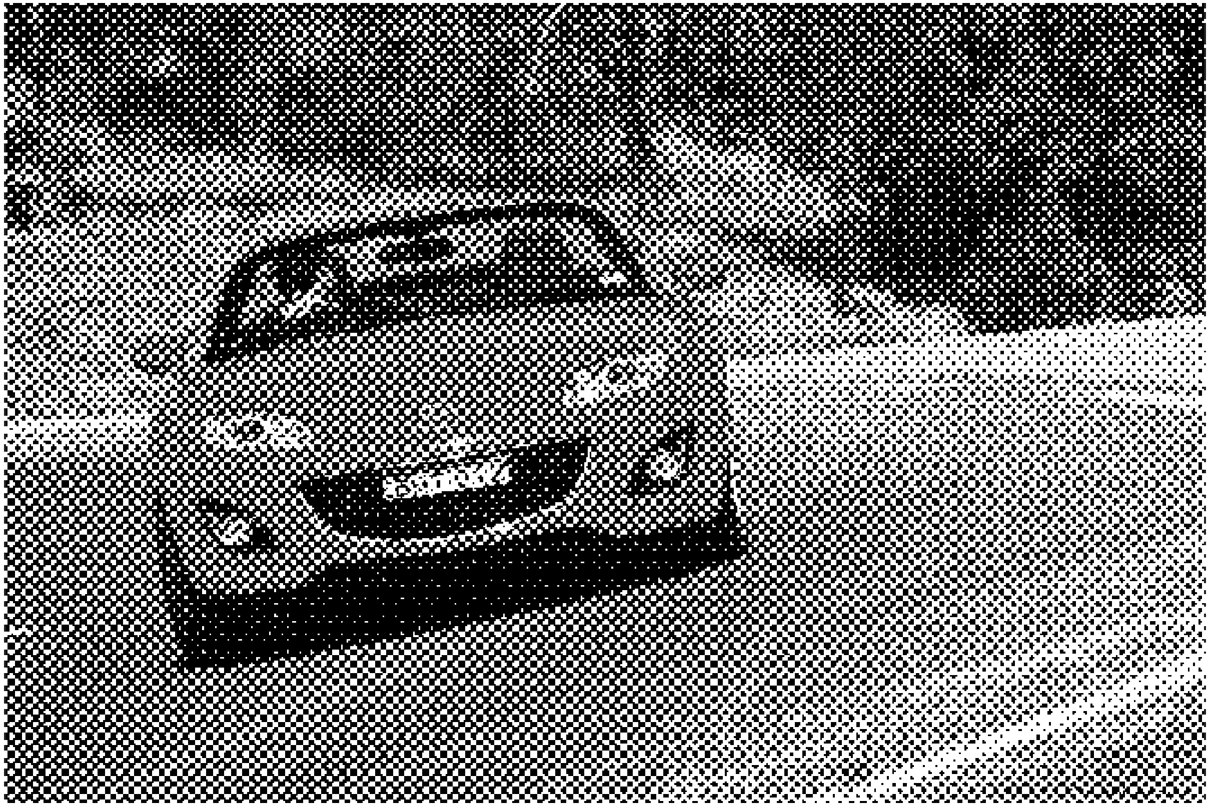
$$X[u,v]F[u,v]$$

- Já vimos que a filtragem equivale a uma convolução no tempo

$$X[u,v]F[u,v] = x[m,n] \otimes f[m,n]$$

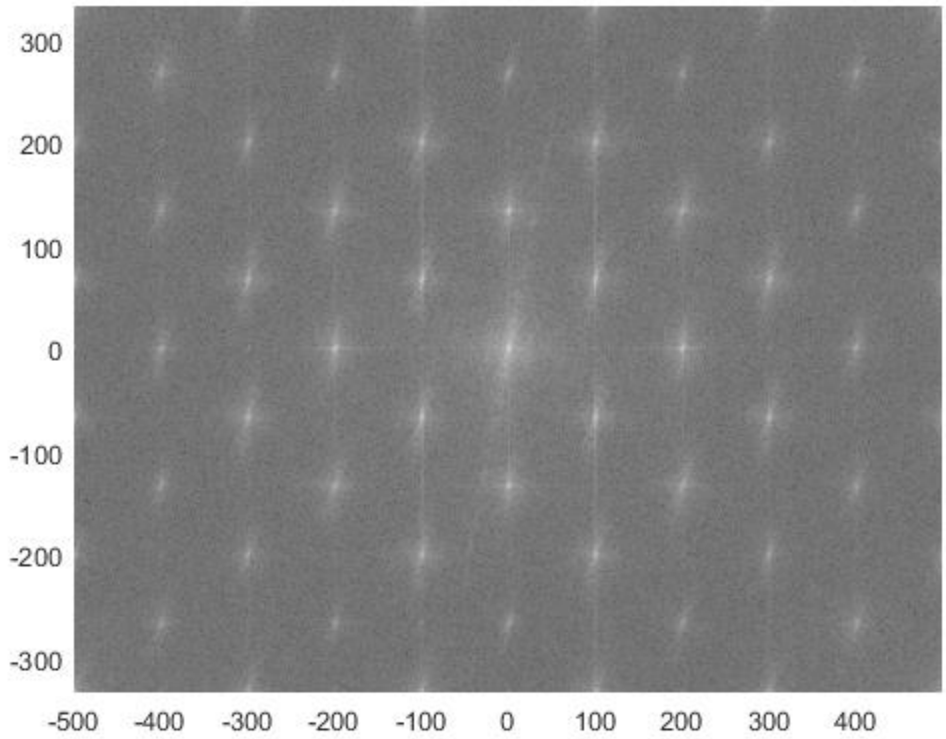
Filtragem

- De maneira similar ao caso 1D, existem diferentes funções de filtragem cada uma com características próprias.
- Exemplo de aplicação de filtros no processamento de imagens



Filtragem

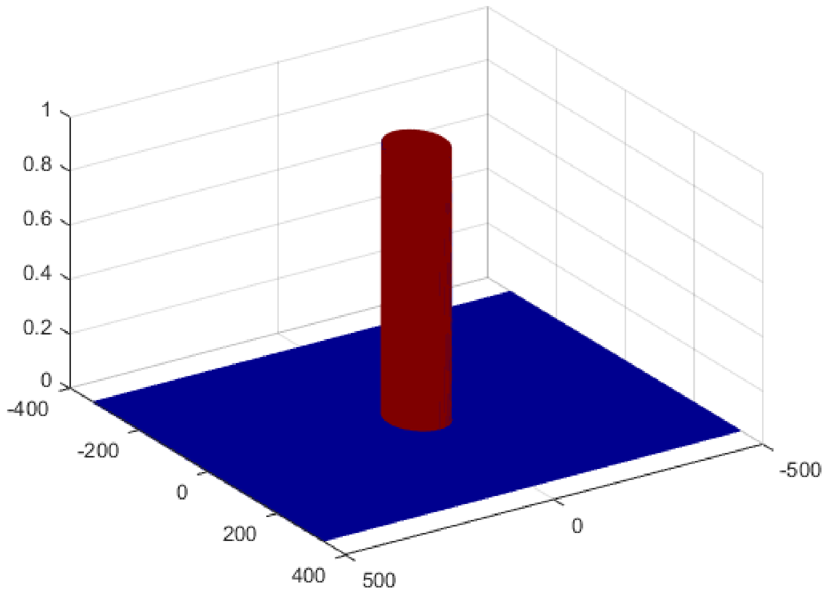
- Espectro da imagem do slide anterior.

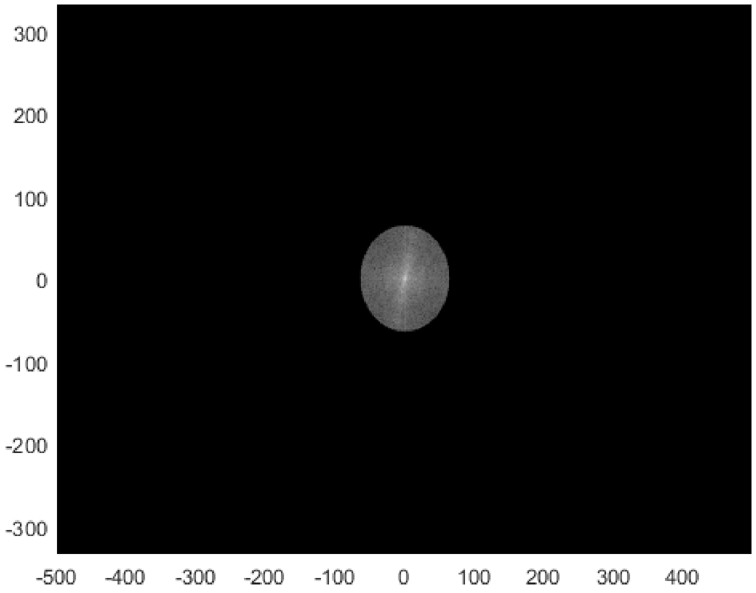


- Como interpretar esse espectro e o que pode ser feito para melhorar a imagem?

Filtragem

- Filtro passa baixa ideal





- O que se espera que aconteça com a imagem, além da óbvia remoção de altas frequências?

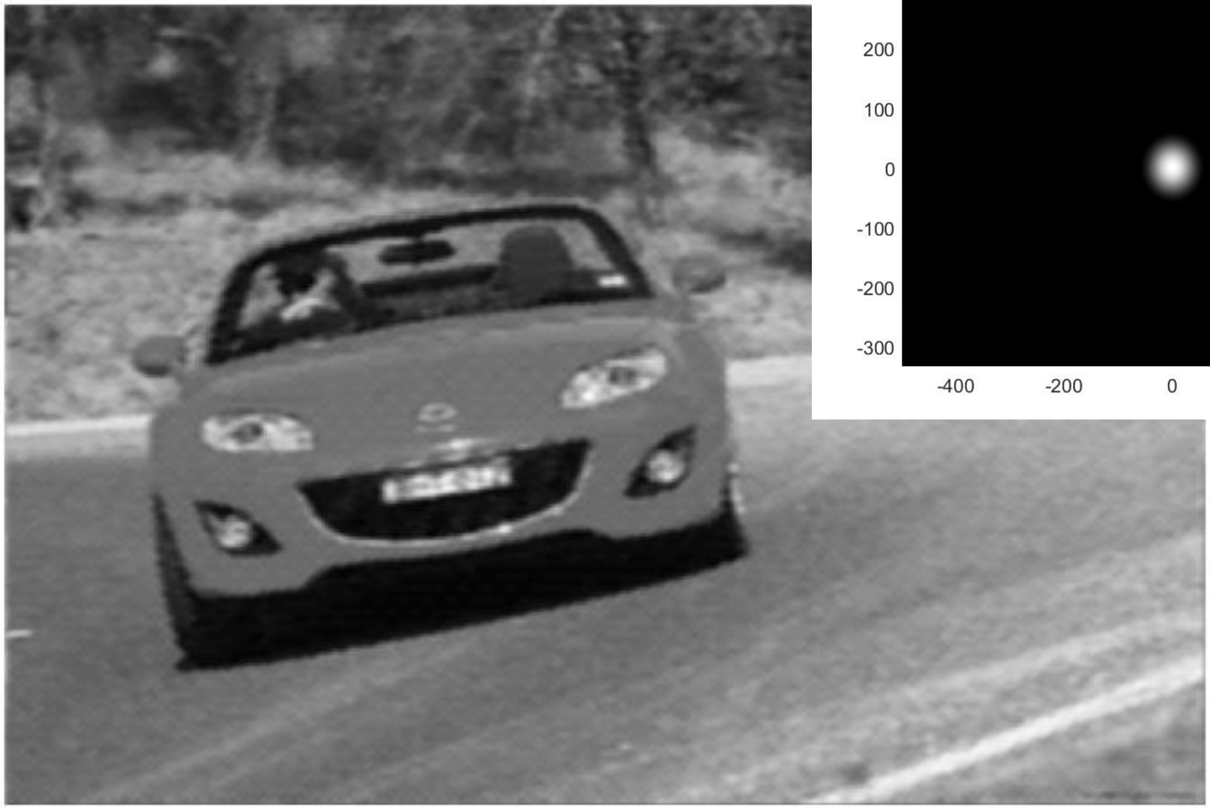
Filtragem

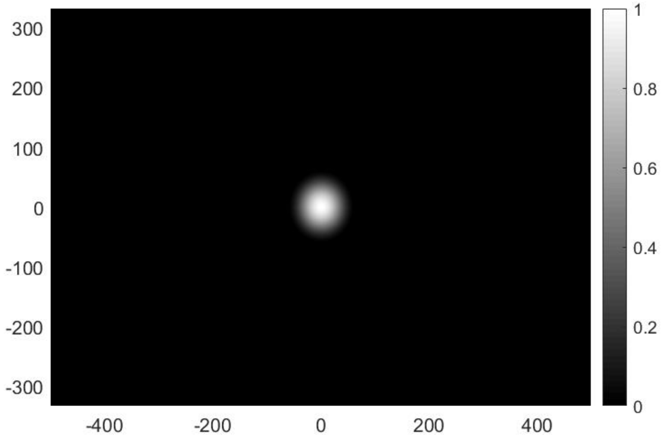
- Aplicação de filtro passa baixa ideal

- Nota-se oscilações na imagem (lembrar da análise de filtros FIR 1D).

Filtragem

- Aplicação de filtro passa baixa do tipo hanning

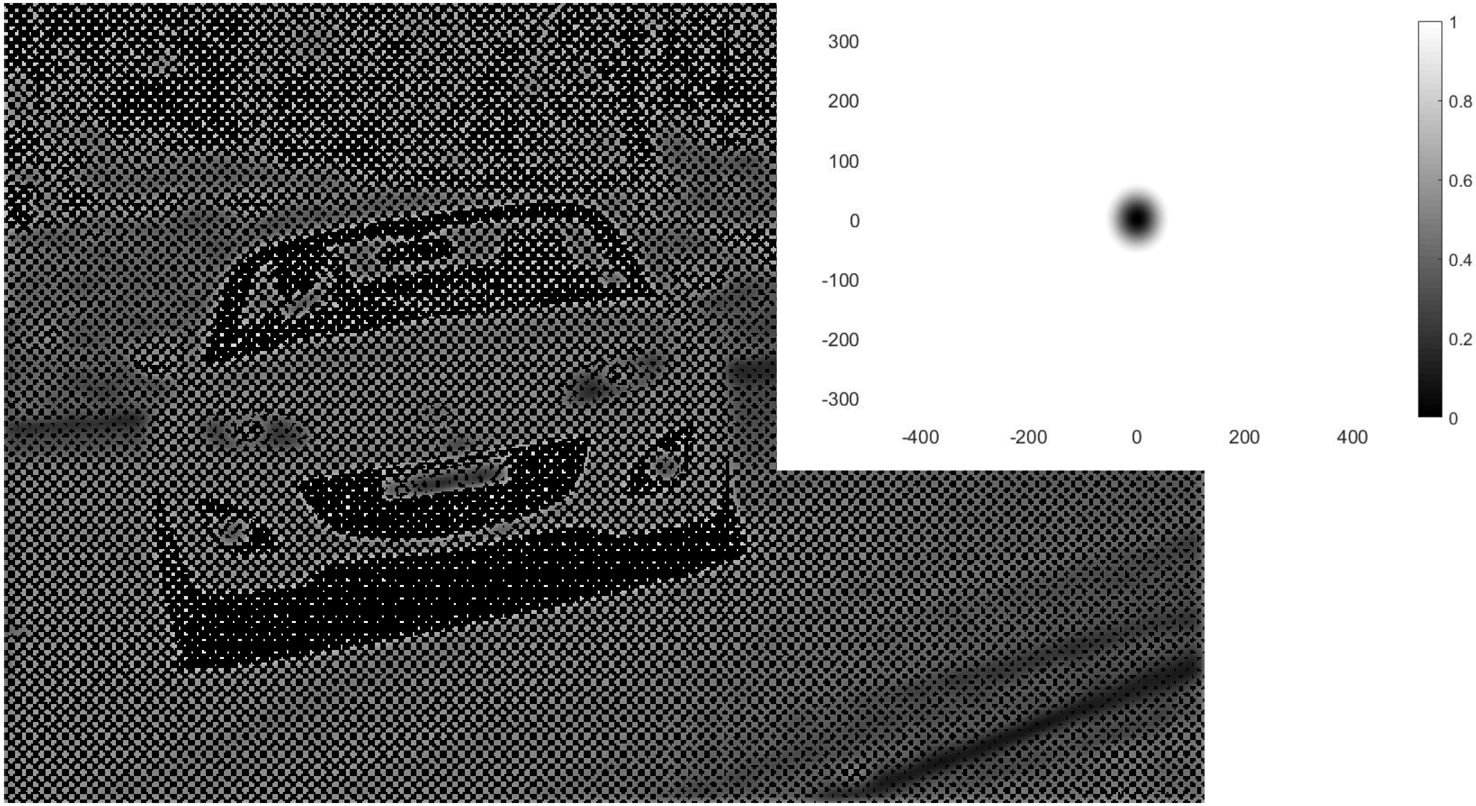




- Nota-se uma redução significativa das oscilações (lembrar da análise de filtros FIR 1D).

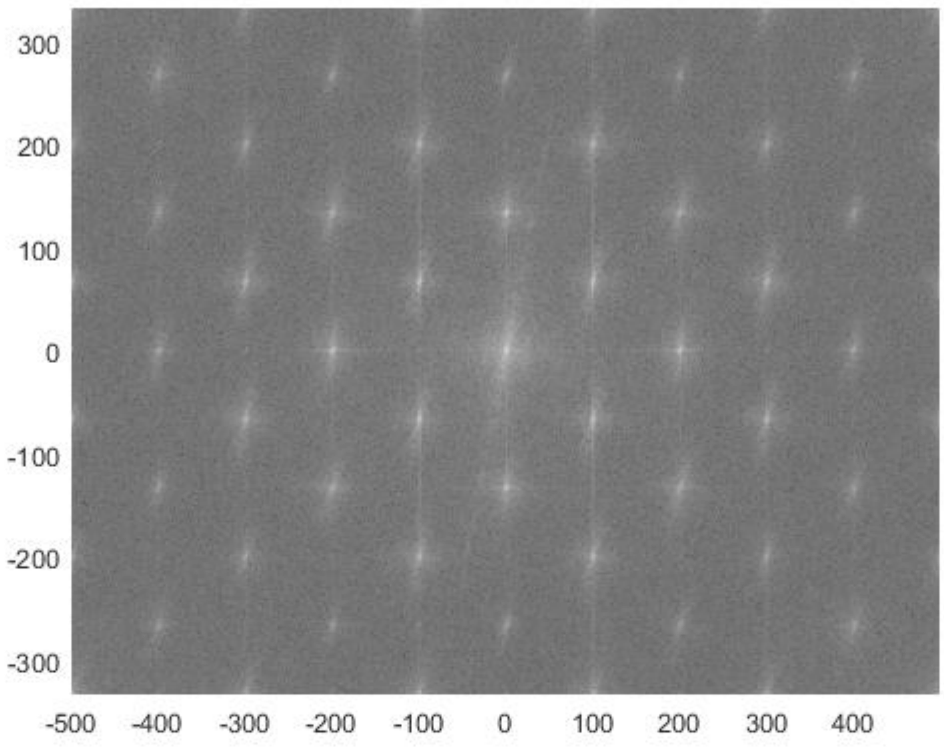
Filtragem

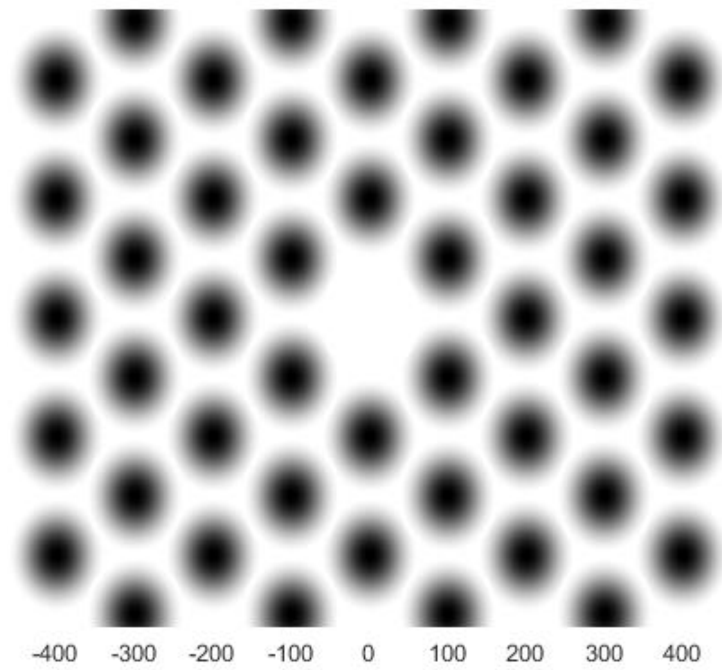
- Aplicação de filtro passa alta do tipo hanning



Filtragem

- Detecção de padrões (texturas) e filtros seletivos

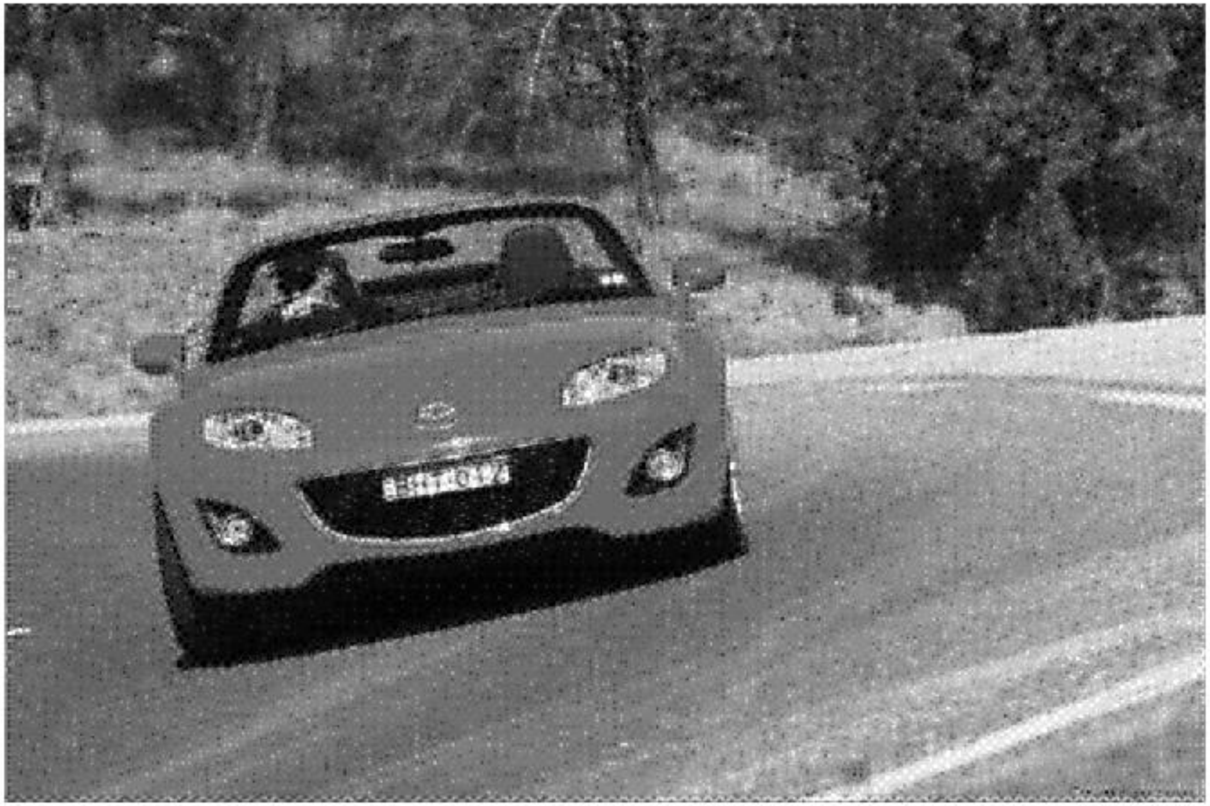




- Nota-se que existe um padrão periódico nas imagens. Como a imagem de interesse é um carro, não é de se esperar que a repetição esteja relacionada com a imagem de interesse.

Filtragem

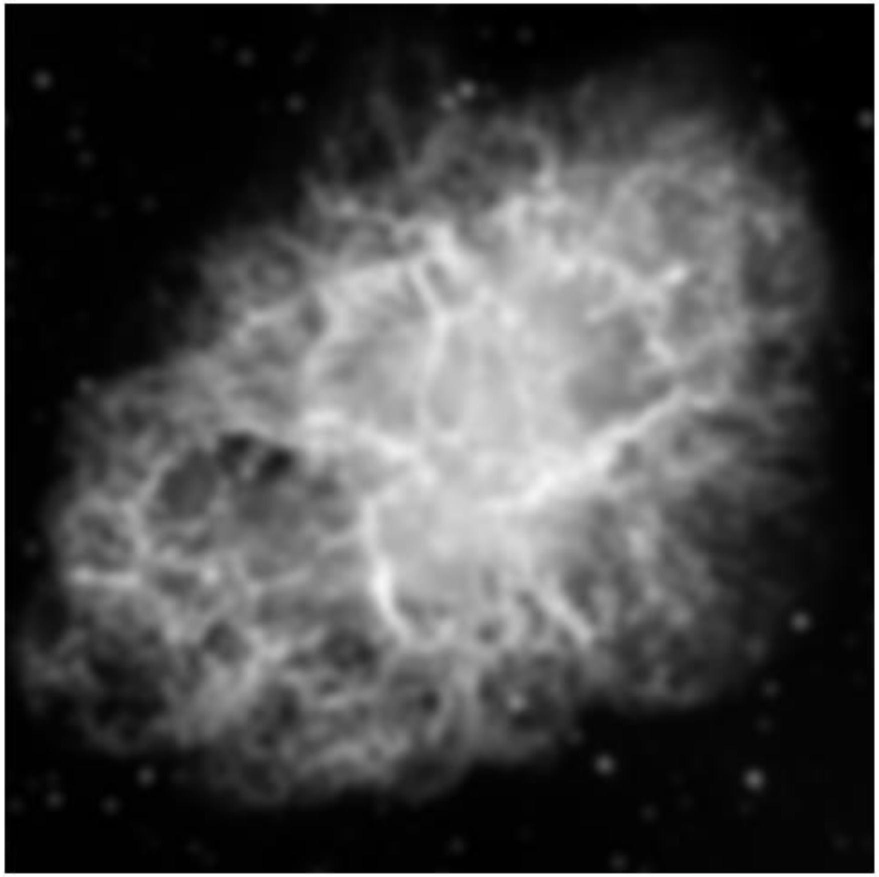
- Após a remoção da textura (filtros do tipo remove banda)



- Remoção clara do padrão de impressão da imagem.

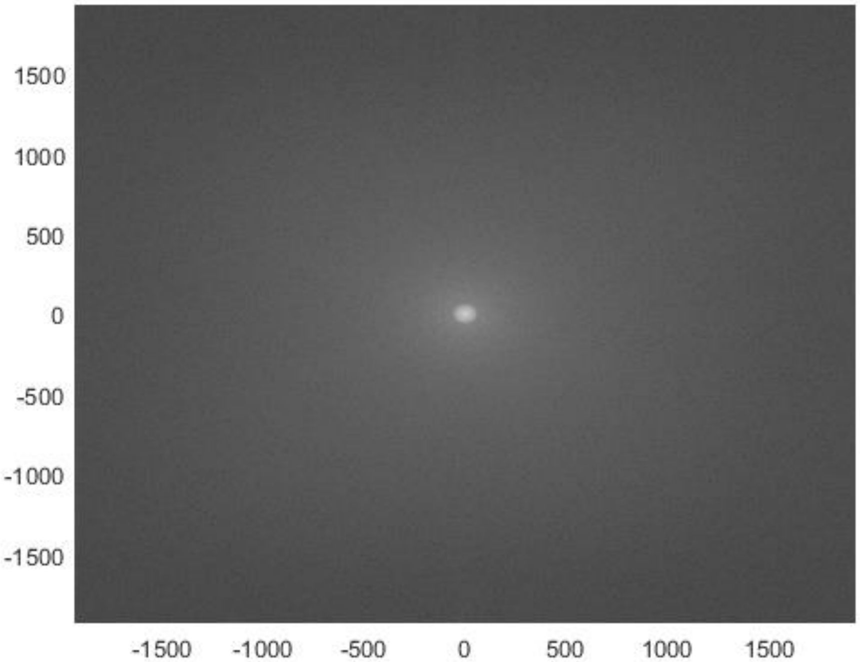
Deblurring - Deconvolução

- Imagem borrada de uma nebulosa
- Uma imagem desse tipo pode ser entendida como resultado de uma convolução com um filtro.
- Pode-se tentar modelar o filtro que induziu a perda de nitidez da imagem
- Normalmente se utiliza uma função de filtro que modela o espalhamento induzido por um ponto (point spread function -PSP)

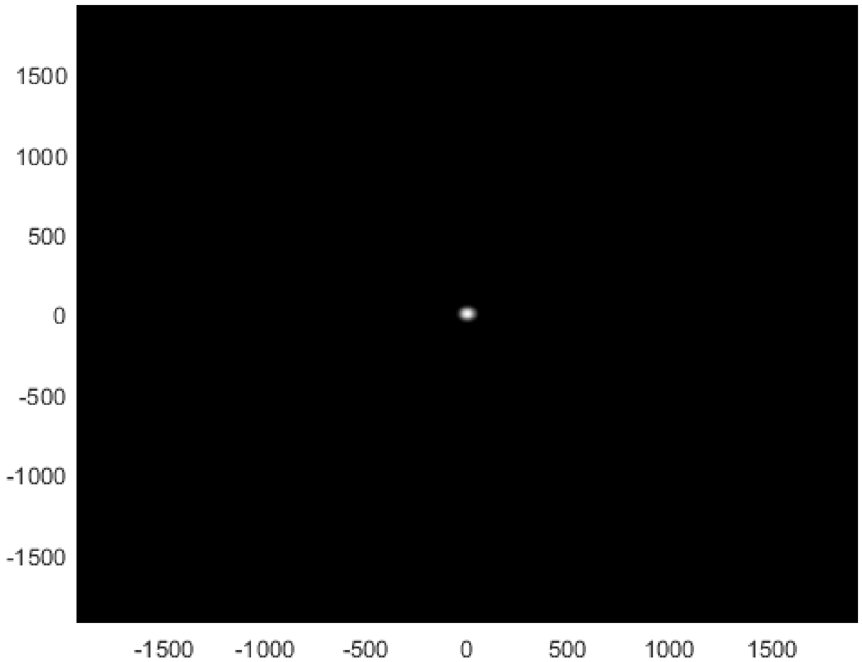


Deblurring - Deconvolução

- O procedimento consiste na divisão do espectro da imagem por uma função de filtro que modela o espalhamento da imagem.
- A partir do espectro da imagem pode-se tentar inferir a função de espalhamento PSP



Espectro da imagem



Função de espalhamento

Deblurring - Deconvolução

- Dividindo-se o espectro da imagem pela PSP, faz-se a deconvolução

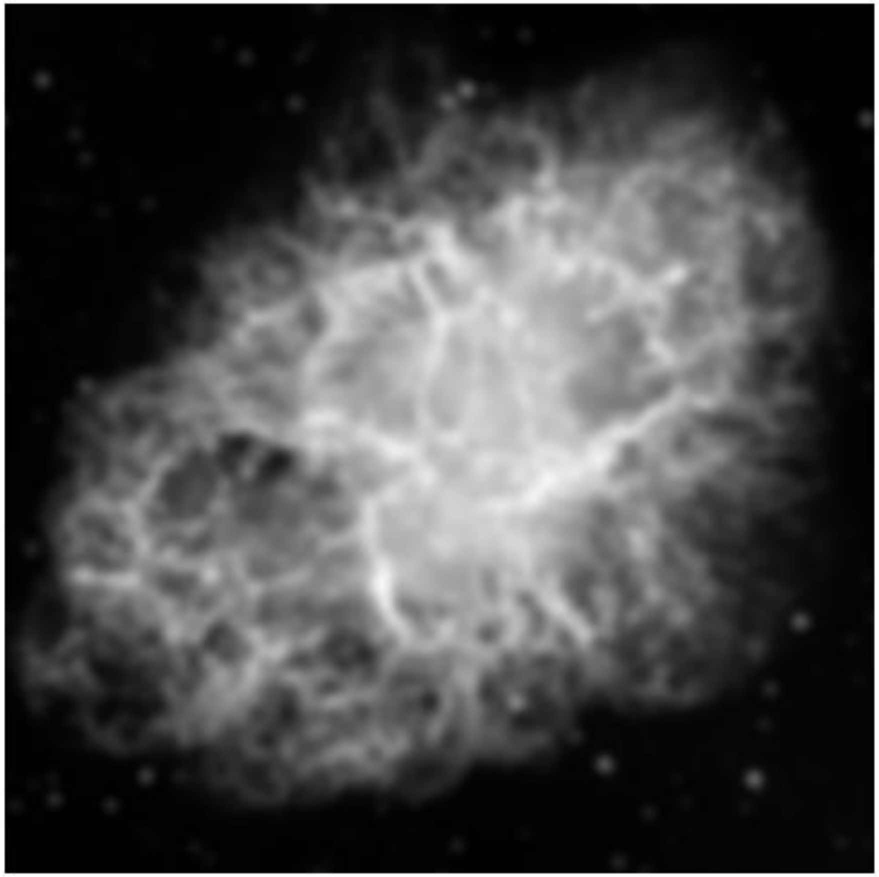


Imagem borrada

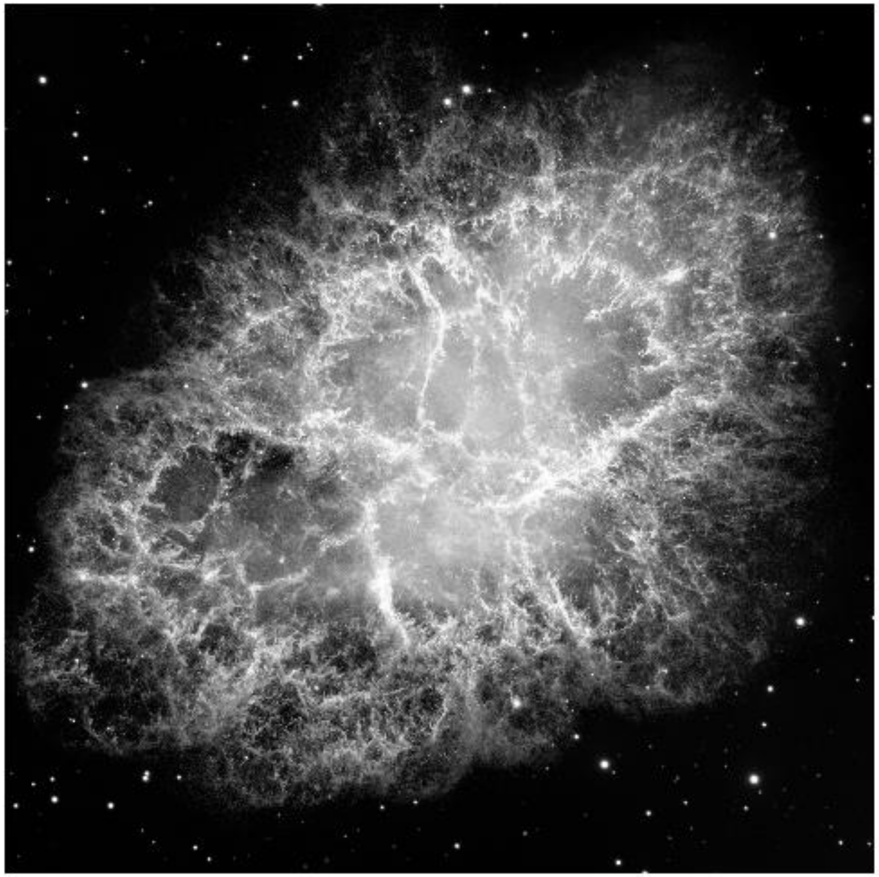


Imagem após a deconvolução

Análise espectral - bispectra

Análise espectral - bispectra

- Agora que já discutimos sobre, cálculo, propriedades e interpretação dos espectros, pergunta-se:

- Quais informações podemos extrair diretamente da leitura de um espectro?

- No caso das frequências mais relevantes do espectro, como saber se elas estão, de alguma forma, relacionadas entre si?

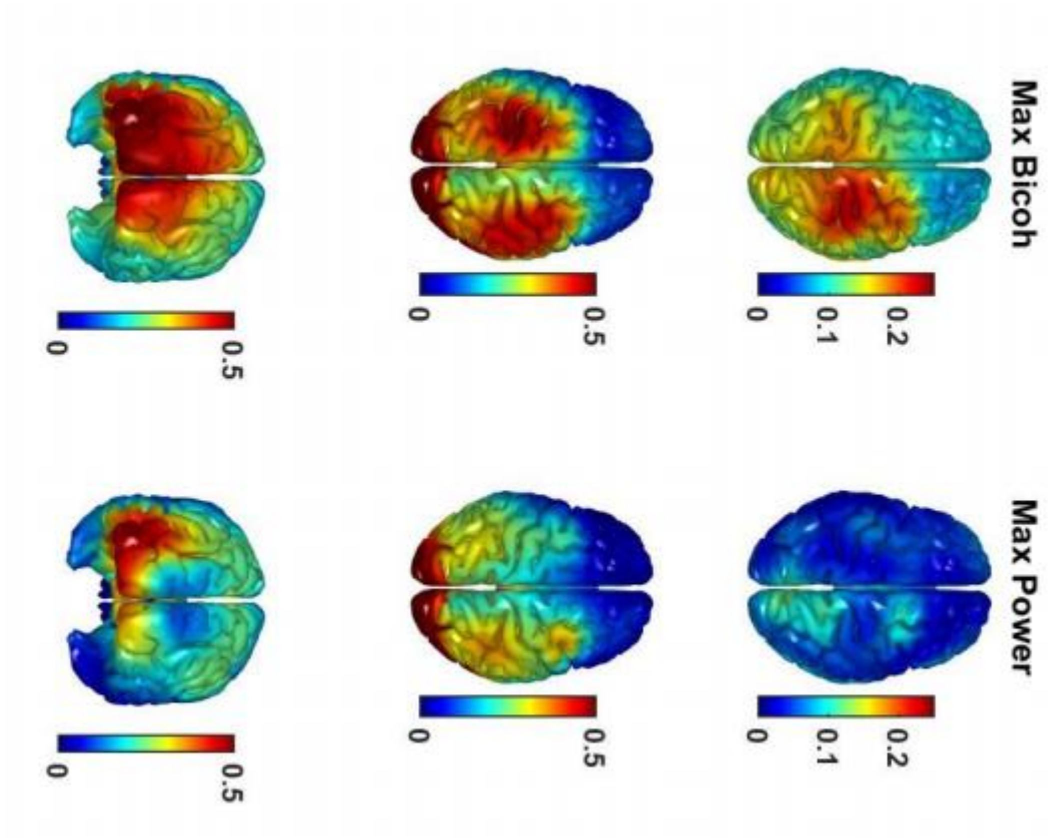
Análise espectral - bispectra

- Em problemas lineares, as oscilações são tipicamente independentes e as frequências do espectro não exibem interação relevante.

- Em problemas não lineares a situação é diferente. Diferentes frequências podem ser simplesmente um subproduto de uma oscilação dominante ou podem exibir algum nível de acoplamento.

Análise espectral - bispectra

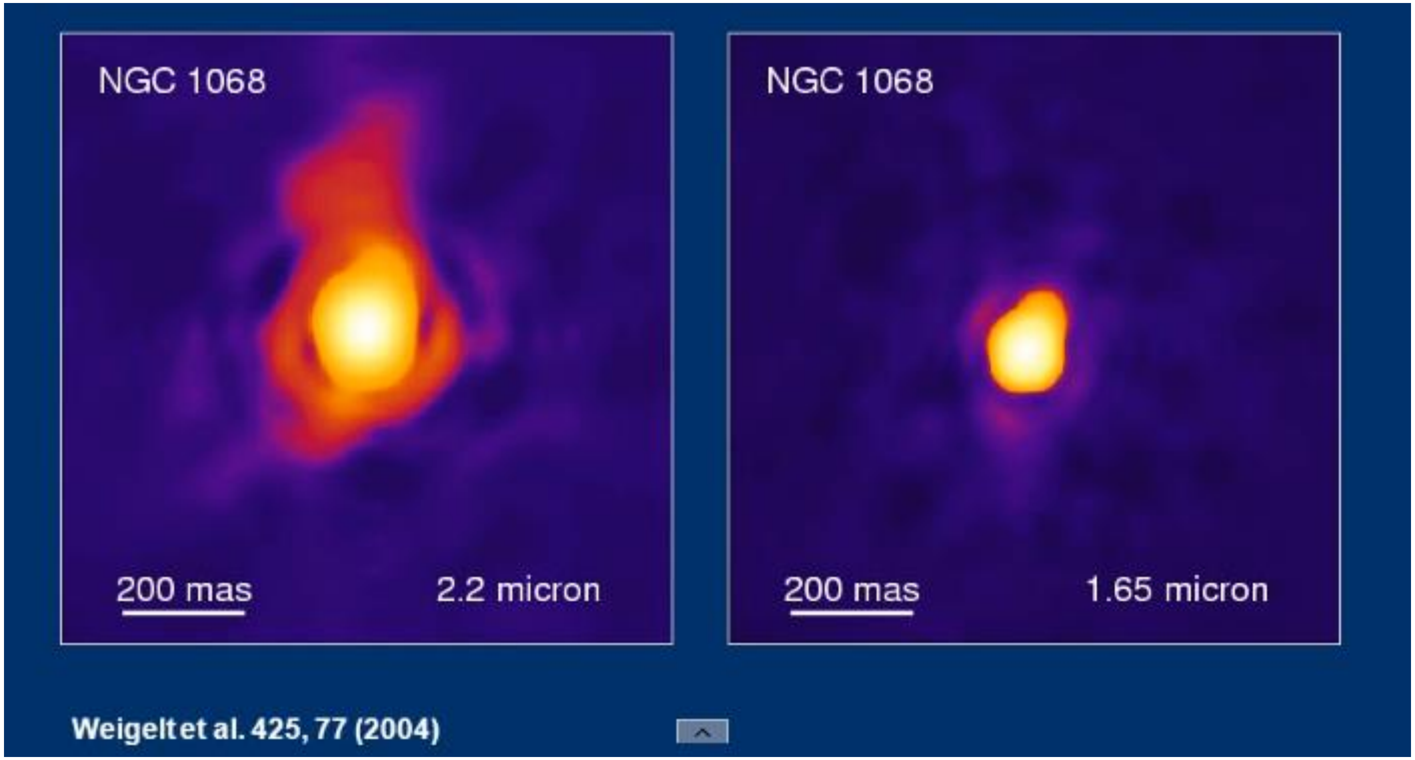
- Esse tipo de análise é utilizada em diversas aplicações
- Ex.: EletroEncéfaloGrafia- EEG (busca por áreas correlatas)



Neuroimage. 2018 Jul 1;174:352-363. doi: 10.1016/j.neuroimage.2018.01.044. Epub 2018 Feb 5.

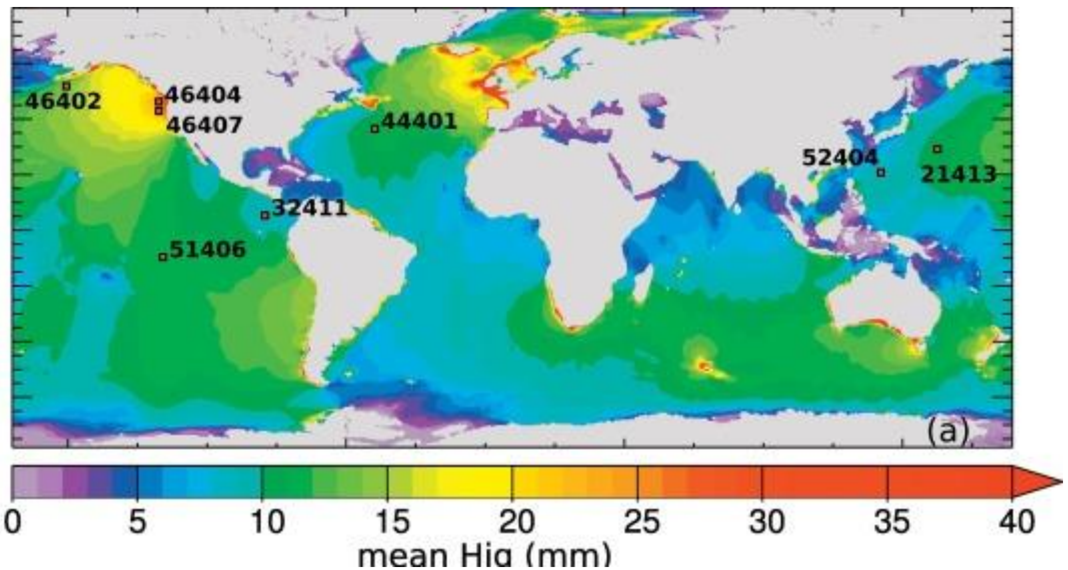
Análise espectral - bispectra

- Ex.: Processamento de imagens de telescópios (Bispectrum optical interferometry)



Análise espectral - bispectra

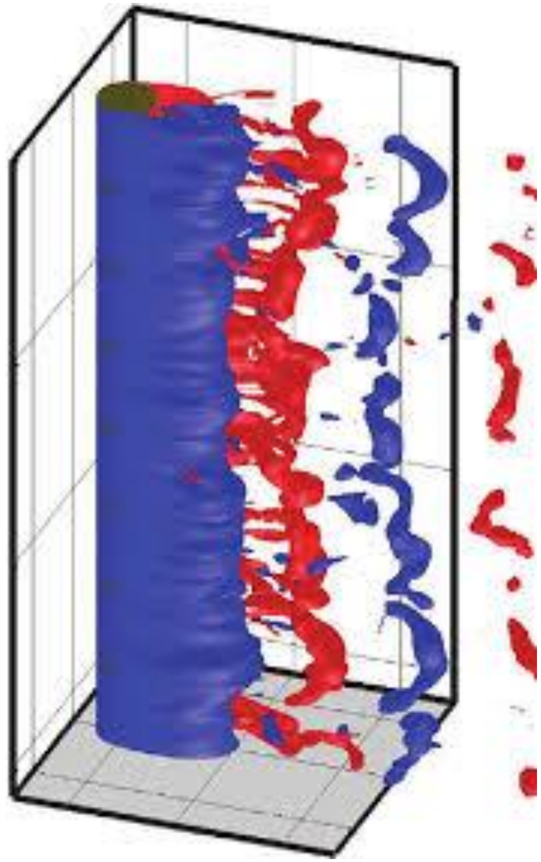
- Ex.: Interação entre eventos correntes oceânicas, eventos atmosféricos e etc.



Extraído de: https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2018.01.002

Análise espectral - bispectra

- Ex.: Turbulência e dinâmica de vórtices



Extraído de https://doi.org/10.1155/2018/2394124

Análise espectral – bispectra

- A análise bi-espectral é a representação no domínio da frequência de um momento de terceira ordem.
- A bicoerência é somente a representação normalizada do bi espectro.
- Pode ser usada para se obter mais informações de sinais estocásticos do que aquelas fornecidas pela correlação (espectro de potência).
- A ferramenta permite que sejam identificadas combinações de frequências, que guardam relação de fase.
- Ex.: Combinação entre (f1,f2,f3) onde f3=f1+f2

Análise espectral – bispectra

- A definição de bi-espectro de um sinal no domínio da frequência X(ω) é dada por:

$$B(\omega_1, \omega_2) = E[X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(\omega_1 + \omega_2)]$$

- Uma alternativa é o cálculo através do momento de terceira ordem dos sinais no domínio do tempo

$$\mathrm{M}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)x(t_1 + t_2)\ ]\text{(convolução)}$$

- O espectro pode ser encontrado a partir da transformada 2D do momento de terceira ordem

Análise espectral – bispectra

- A bicoerência equivale ao biespectro normalizado pelo produto das potências em cada frequência

$$Bicoher(\omega_1, \omega_2) = \frac{E[X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(\omega_1 + \omega_2)]}{E[|X(\omega_1)|^2|X(\omega_2)|^2|X^*(\omega_1 + \omega_2)|^2]^{1/2}}$$

Vale lembrar que o cálculo da bicoerência deve ser feito para sinais com médias iguais a zero.

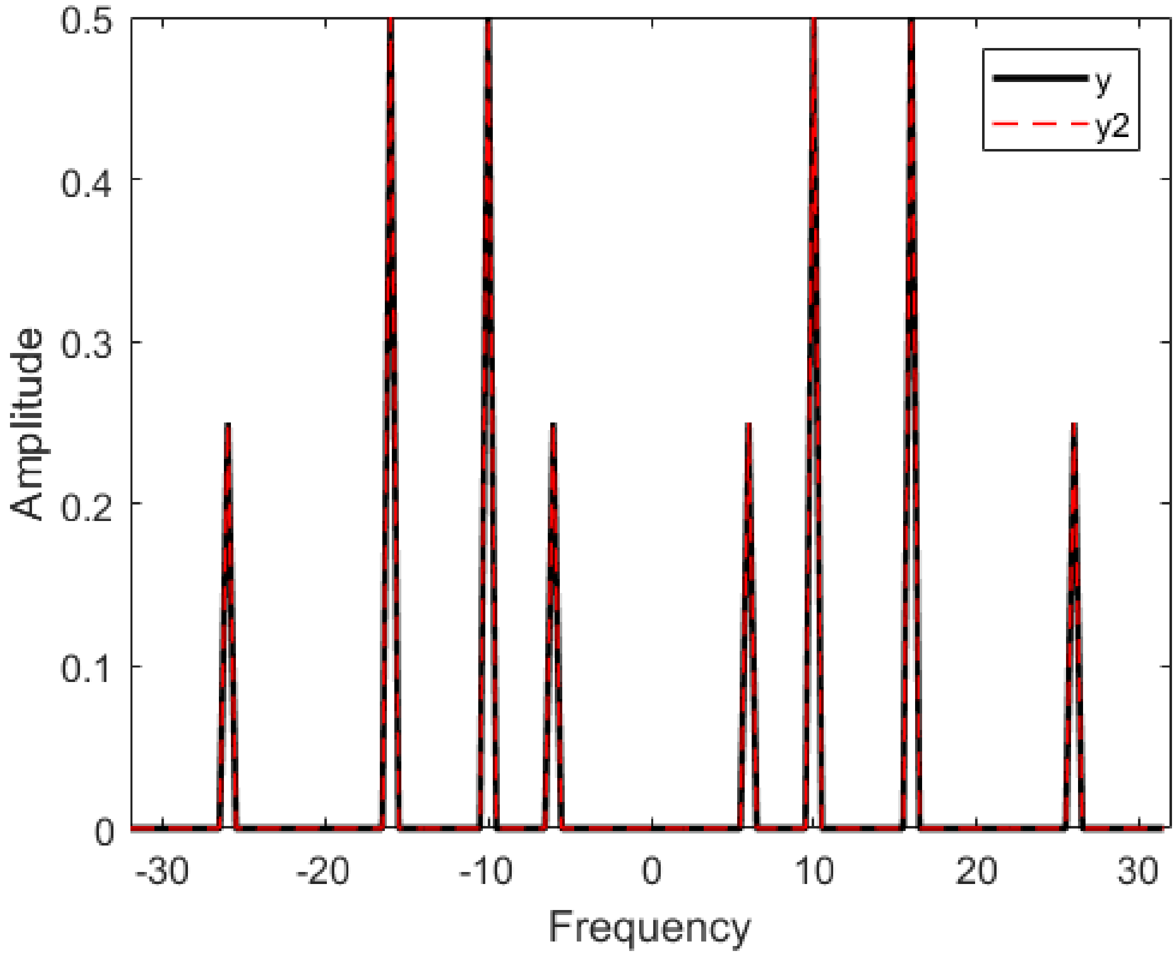
Análise espectral – bispectra

- Exemplo Matlab.: Dois sinais com o mesmo conteúdo espectral, mas no primeiro caso y as fases não estão correlacionadas e no segundo a do sinal com frequência igual a f1+f2 tem relação

```
t=0:2*pi/64:4*pi-2*pi/64; % para o sinal ser periódico
for i=1:100
        phase=2*pi*(rand);
        signal1=cos(10*t+2*pi*rand);
        signal2=cos(16*t+2*pi*rand);
        signal_df=0.5*cos(6*t+2*pi*rand);
        signal_2f=0.5*cos(26*t+2*pi*rand);
        y(:,i)=signal1+signal2+signal_df+signal_2f;
        y2(:,i)=signal1+signal2+signal1.*signal2;
end
```

Análise espectral – bispectra

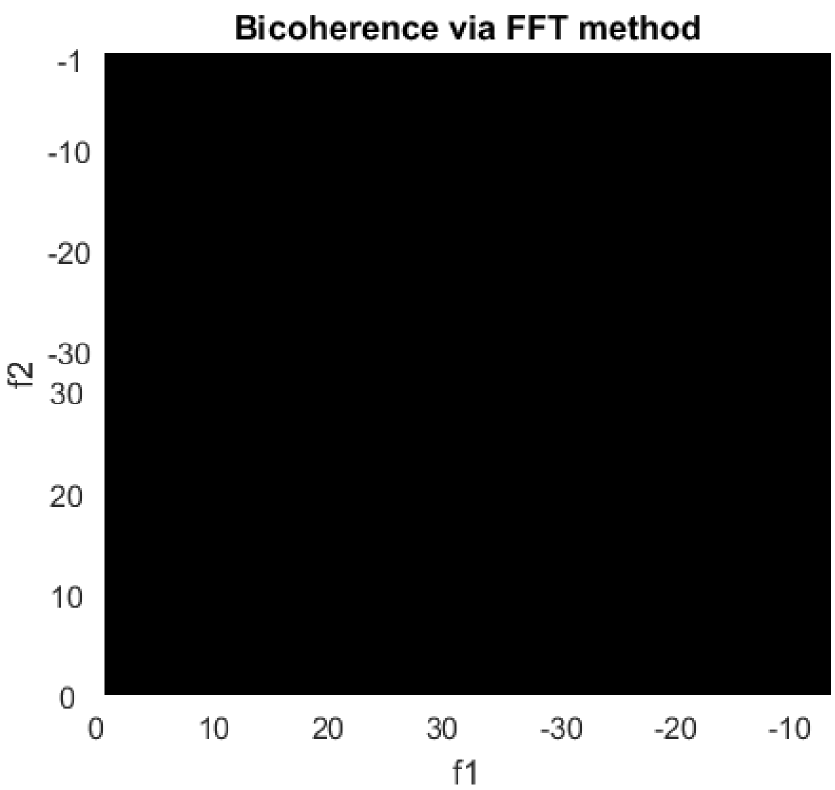
- Espectro dos sinais



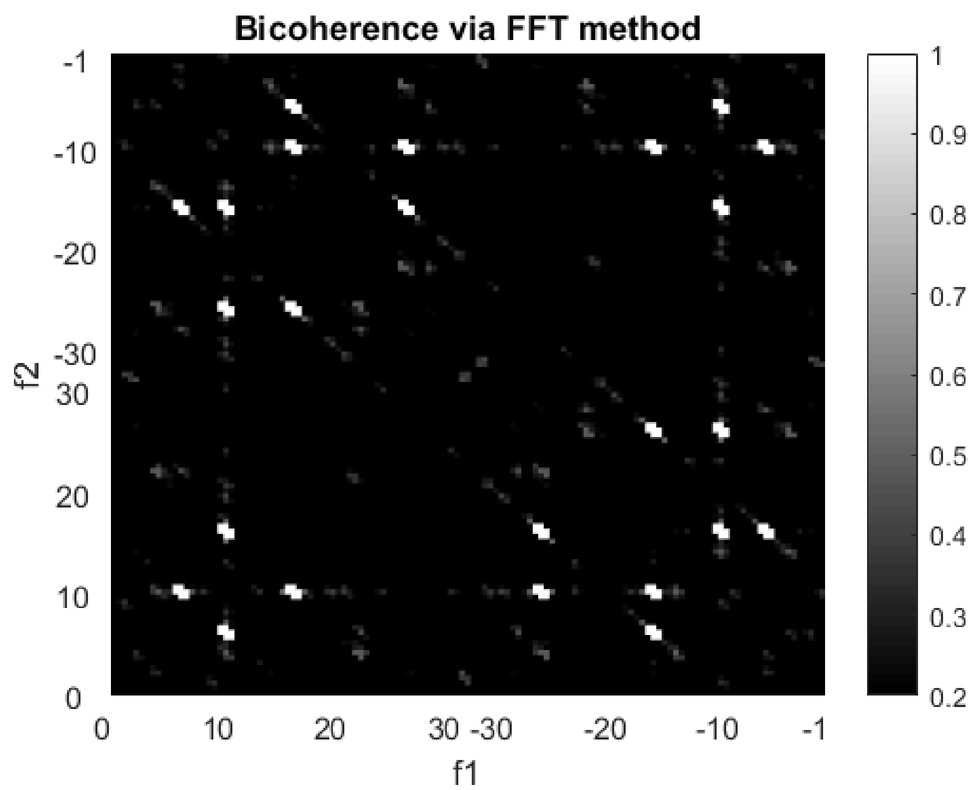
Análise espectral – bispectra

- Bicoerência

y

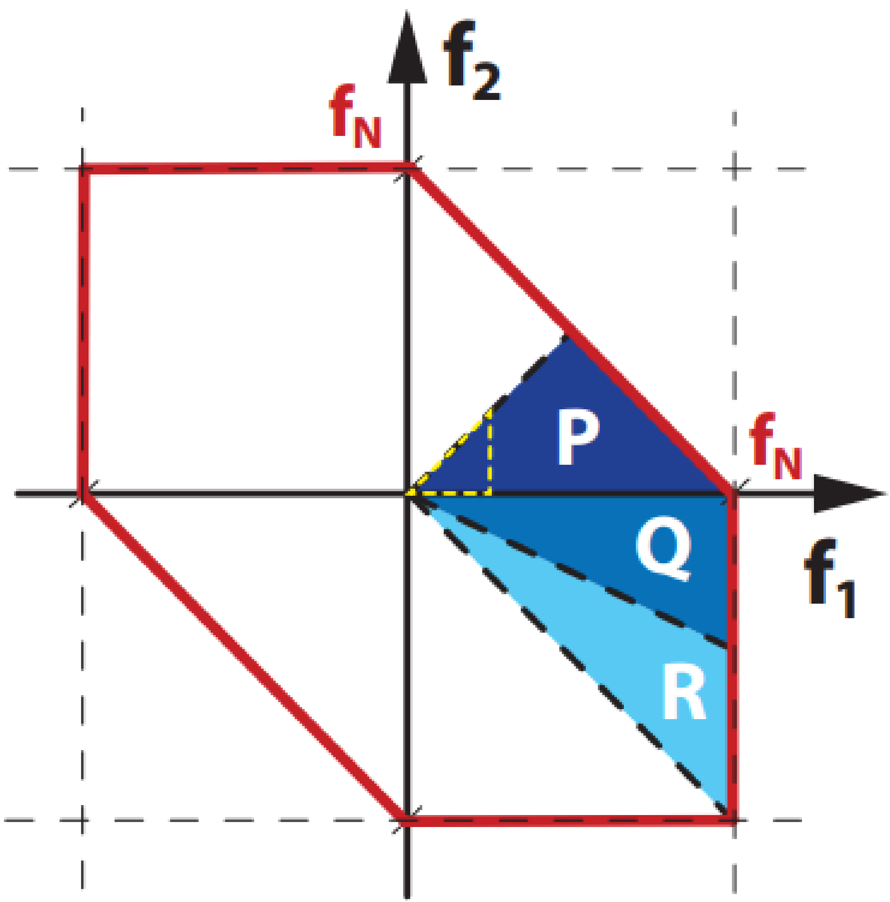


y2



Análise espectral – bispectra

- Devido a simetrias a análise pode ser reduzida a uma área restrita do espectro (P)



Análise espectral – bispectra

- Devido a simetrias a análise pode ser reduzida a uma área restrita do espectro (P)