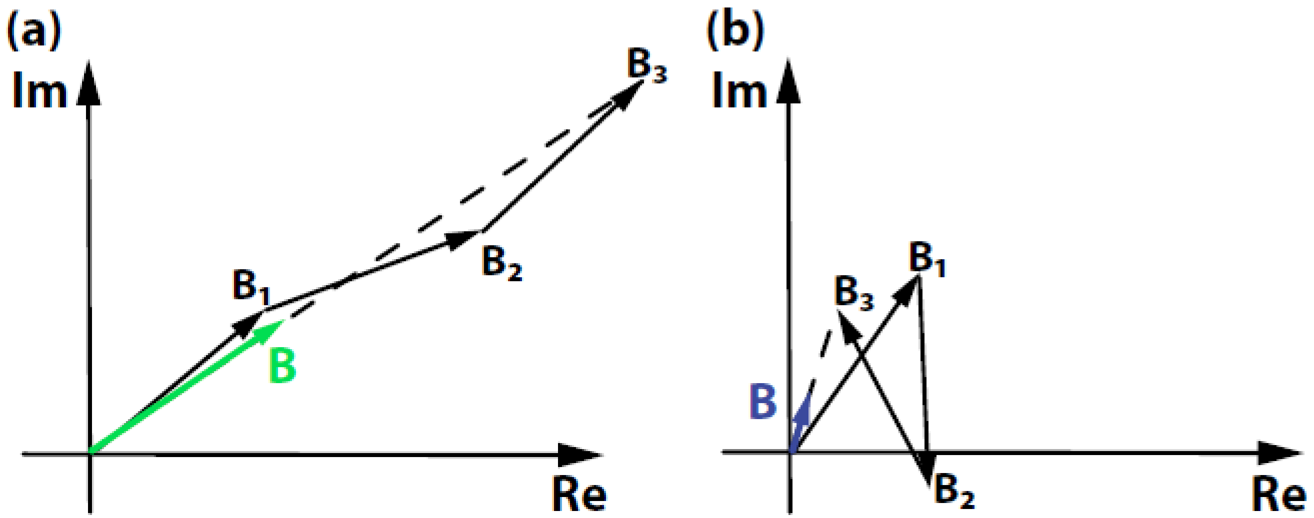
Continuação bi-espectro, bicoerência e transformada de Hilbert

Revisão da aula passada

- Continuando o que foi visto na aula passada, vamos ver a implementação do cálculo de bi-espectro e bicoerência.
- Lembrando que a análise bi-espectral é a representação no domínio da frequência de um momento de terceira ordem. Que reflete uma combinação entre frequências distintas
- A combinação de sinais com frequências diferentes é refletida em uma relação de fase coerente.
- A ferramenta explora esse conceito de fase coerente. A média do produto entre sinais com fase coerente tende a exibir valores diferentes de zero, enquanto que a média de modos cujo produto possui fase aleatória tende a zero.
- Logo, a ferramenta é aplicada a sinais estacionários.

Como funciona o Bi-espectro

- O procedimento pode ser visualizado graficamente.



- Na figura (a) os valores de B1, B2, B3 obtidos a partir de diferentes amostras, apresentam relação coerente de fase. Assim, a resultante B tende a apresentar valor elevado. Já na Figura (b) o mesmo não ocorre

Simetrias

- Como foi visto rapidamente na aula passada, existem diversas simetrias no bi-espectro. Para sinais reais essas simetrias ficam

$$B(\omega_1,\omega_2) = E[X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(\omega_1+\omega_2)] = E[X(\omega_2)X(\omega_1)X^*(\omega_1+\omega_2)] = B(\omega_2,\omega_1)$$

$$B(\omega_1,\omega_2) = E[X^*(\omega_1)X^*(\omega_2)X(\omega_1+\omega_2)] = B^*(-\omega_1,-\omega_2)$$

$$B(\omega_1,\omega_2) = E[X(-\omega_1-\omega_2)X(\omega_2)X^*(-\omega_1)] = B(-\omega_1-\omega_2,-\omega_2)$$

$$B(\omega_1,\omega_2) = E[X(\omega_1)X(-\omega_1-\omega_2)X^*(-\omega_2)] = B(\omega_1,-\omega_1-\omega_2)$$

Cálculo do bi-espectro

- Como o bi-espectro e a bicoerência envolvem a estimação de um valor médio do produto entre três frequências, é comum o uso de técnicas de aumento do número de blocos.

- Nesse caso, técnicas como àquelas propostas por Barlett e Welch, e que já foram apresentadas no curso, podem ser implementadas em conjunto com o cálculo do bi-espectro e da bicoerência.

Análise espectral – bispectra

- Código Matlab - $B(\omega_1,\omega_2) = E[X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(\omega_1+\omega_2)]$

```
%*************************************************************
% Bi-spectral analysis
% Estimation of bispectra and bicoherence for a 1D sampled data
%                 created I. B. de Paula; Lec. Signal Processing
%                                       DEM PUC-Rio , 2019
%*************************************************************
%
% INPUT DATA
% y          -   arbitrary signal vector y(nsamples,n_repetitions)
% win        -   window function. The length of window function must 
be
%                equal to length of vector y%
% OUTPUT
% bispec     -   estimated bispectrum %
%                matrix size-> 
bispec(1:length(y(:,1)),1:length(y(:,1)))
% bicoh      -   estimated bicoherence (normalized bi-spectrum)
%**************************************************************
```

Análise espectral – bispectra

- Código Matlab

```
% Data initialization
size_y=size(y,1);
n_rep=size(y,2);
bispec  = zeros(size_y,size_y);
if (exist('win') ~= 1)
    win=ones(size_y,1);
end
% initialization of power spectrum
pwr_yy  = zeros(size_y,1);
%%% generation of a Hankel matrix containing
% position indexes i+j. Alternatively, one can use hankel func.
for i=1:size_y
    for j=1:size_y
        mask(i,j)=rem((i-1)+(j-1),size_y)+1;
       % the procedure already accounts for Fourier symmetry
    end
end
```

Análise espectral – bispectra

- Código Matlab

```
% % estimating cumulative products
for i=1:n_rep
    fft_y=fft((y(:,i)-mean(y(:,i))).*win)/size_y;
    conj_ffty=conj(fft_y);
    pwr_yy=pwr_yy+fft_y.*conj_ffty;
    ffty_12=conj_ffty(mask);
    bispec=bispec+(fft_y*fft_y.').*ffty_12;
end

% dividing by the number of repetitions
bispec=bispec/n_rep;
pwr_yy=pwr_yy/n_rep;

pwr_y12 = pwr_yy(mask);
bicoh = abs(bispec).^2 ./ (pwr_yy * pwr_yy.' .* pwr_y12);
%%
return
```

Exercícios

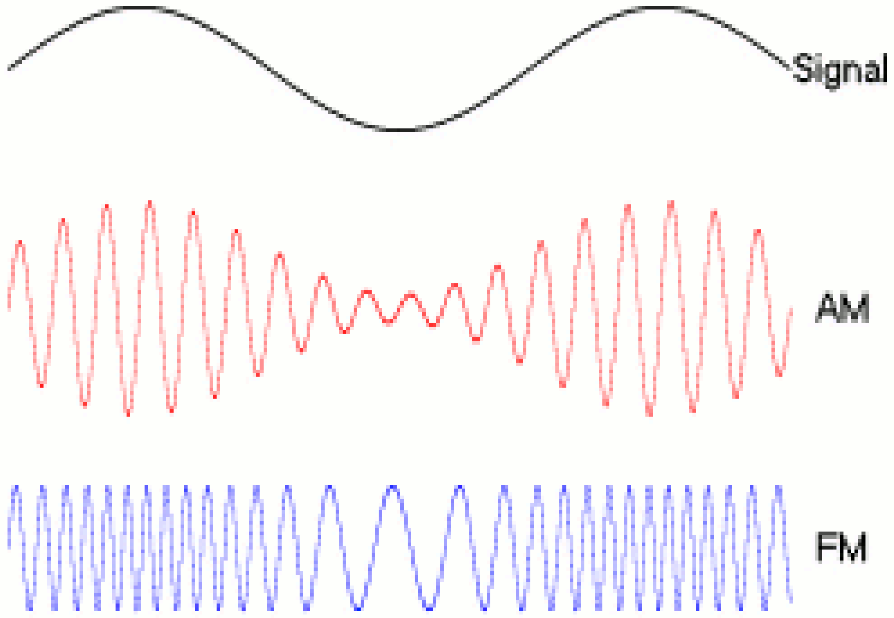
- Exercício – escolher um paper sobre sinais estacionários não lineares (de preferência relacionado com a tese ou dissertação), em que a bicoerência é utilizada para estudar o fenômeno.
- Preparar revisão e apresentação de 10 minutos
- Adaptar o código fornecido para melhorar a estimativa do cálculo da bicoerência utilizando a metodologia de Welch (periodograma). Comparar resultados para o sinal gerado na aula anterior (com e sem a aplicação da metodologia de Welch).

Análise de sinais modulados

Motivação

Considere um sinal com amplitude modulada

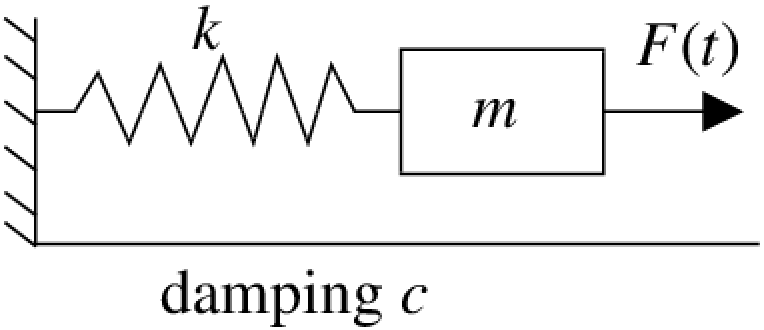
- onda de rádio AM

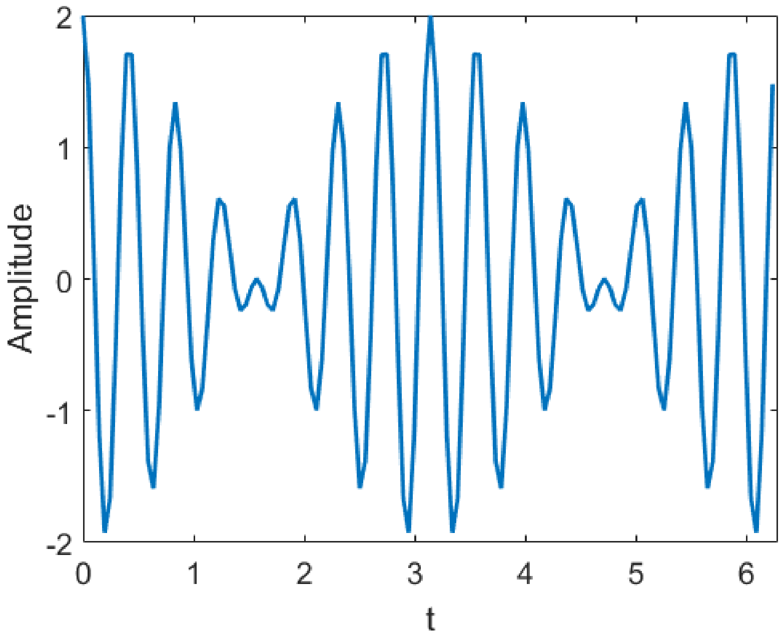


Motivação

Considere um sinal com amplitude modulada

- vibração mecânica com batimento





Motivação

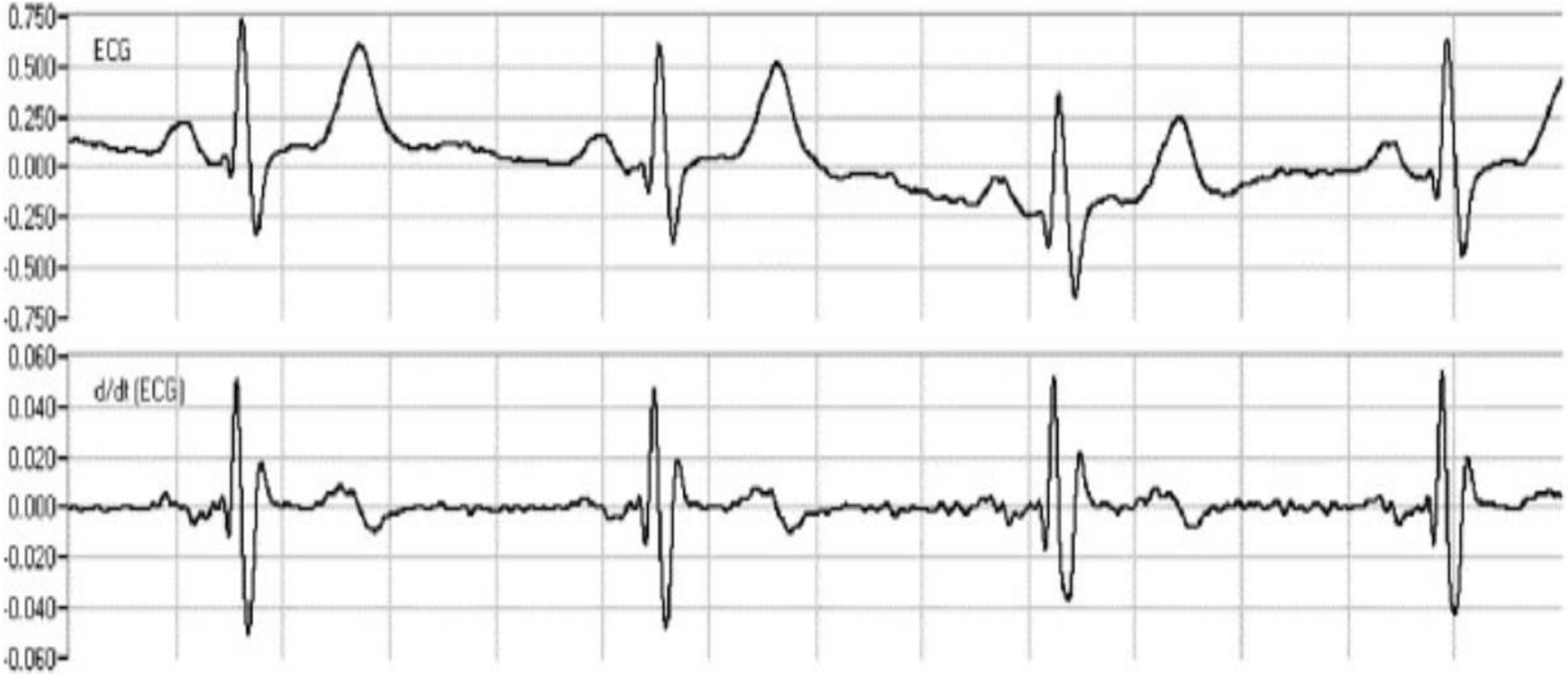
Considere um sinal com amplitude modulada

- Batimento cardíaco ...

Motivação

Considere um sinal com amplitude modulada

- Batimento cardíaco ...



Extraido de https://doi.org/10.1016/S0010-4825(01)00009-9

Introdução – Análise de sinais modulados

- Nos sinais dos exemplos apresentados, como poderíamos estimar a amplitude da modulação do sinal?

- O matemático alemão David Hilbert, criou uma ferramenta muito útil para esse tipo de análise.

- A transformada de Hilbert, é definida como

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Essa integral pode ser entendida como a convolução entre x(τ) e 1/(πt). Nota-se que a transformada resulta em um sinal no tempo

- Assim como a transformada de Fourier, a transformada de Hilbert é uma operação linear

Introdução – Análise de sinais modulados

- Logo, para a_1 e a_2 constantes

$$H\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1H\{x_1(t)\} + a_2H\{x_2(t)\}$$

- Como a integral da transformação é a convolução entre um sinal x(t) e 1/(πt), então, no domínio de Fourier, a transformação de Hilbert fica:

$$\mathcal{F}\{H\{x(t)\}\} = \mathcal{F}\{x(t) \otimes \frac{1}{\pi t}\} = \mathcal{F}\{x(t)\}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}$$

- A transformada de 1/(πt) é dada por

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -i\ sign(\omega) = \begin{cases} -i\ \ para\ \ \omega > 0 \\ \ \ i\ \ para\ \ \omega < 0 \end{cases}$$

- Para *f=0* existe uma singularidade. Logo, o cálculo no domínio de Fourier deve ser feito após a remoção da média do sinal

Introdução – Análise de sinais modulados

- Assim, a transformada de Hilbert no domínio da frequência pode ser obtida a partir do espectro de Fourier do sinal, na forma

$$H\{\omega\} = -i\ sign(\omega)X(\omega)$$

- A magnitude e a fase de $-i\ sign(\omega)$ são:

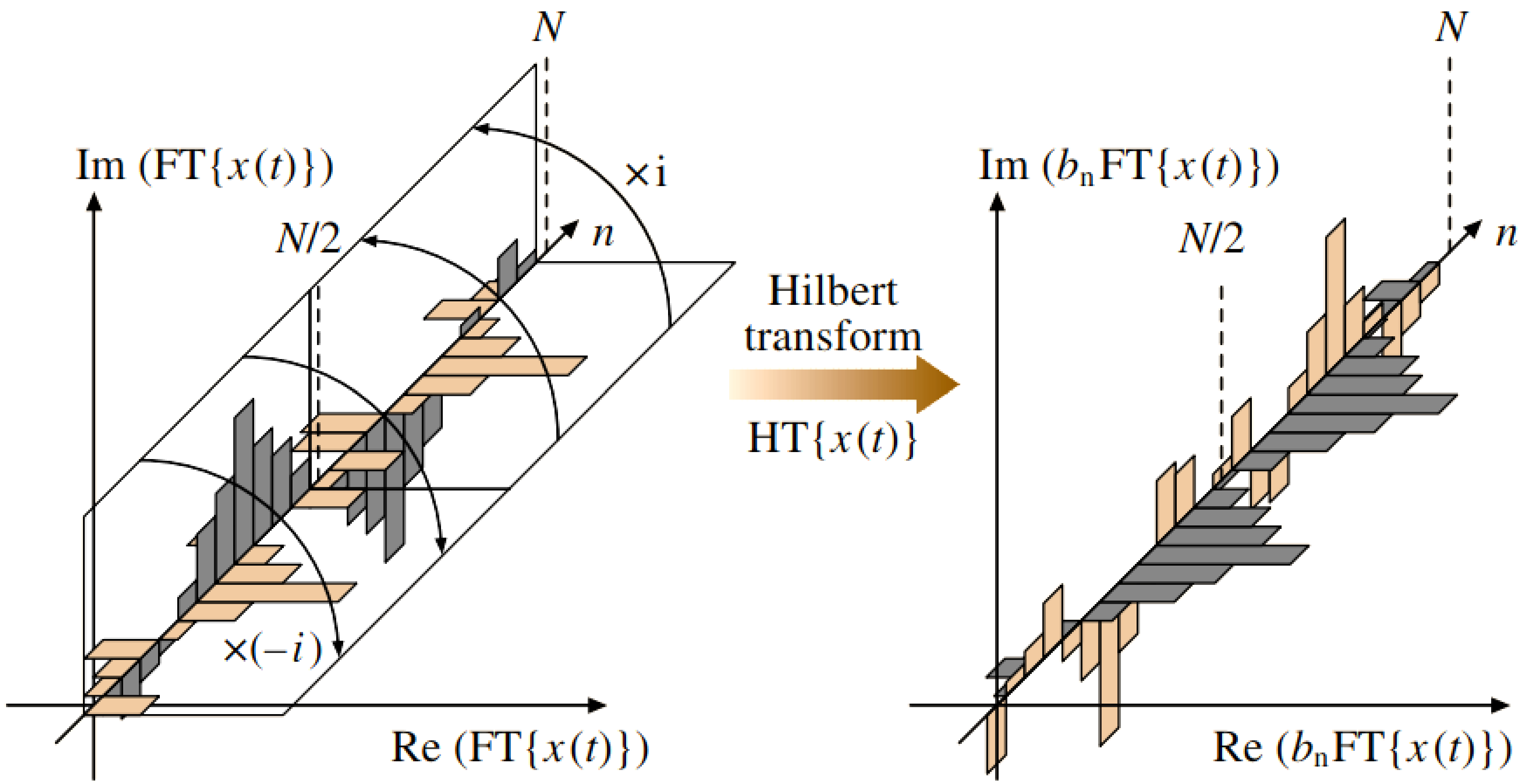
$$|-i\ sign(\omega)| = 1$$
$$\arg\big(-i\ sign(\omega)\big) = -\frac{\pi}{2} sgn(\omega)$$

- Logo, a transformada de Hilbert de um sinal consiste em passar o sinal x(t) por um filtro que mantém a amplitude do sinal, mas aplica um atraso de fase de 90º

Introdução – Análise de sinais modulados

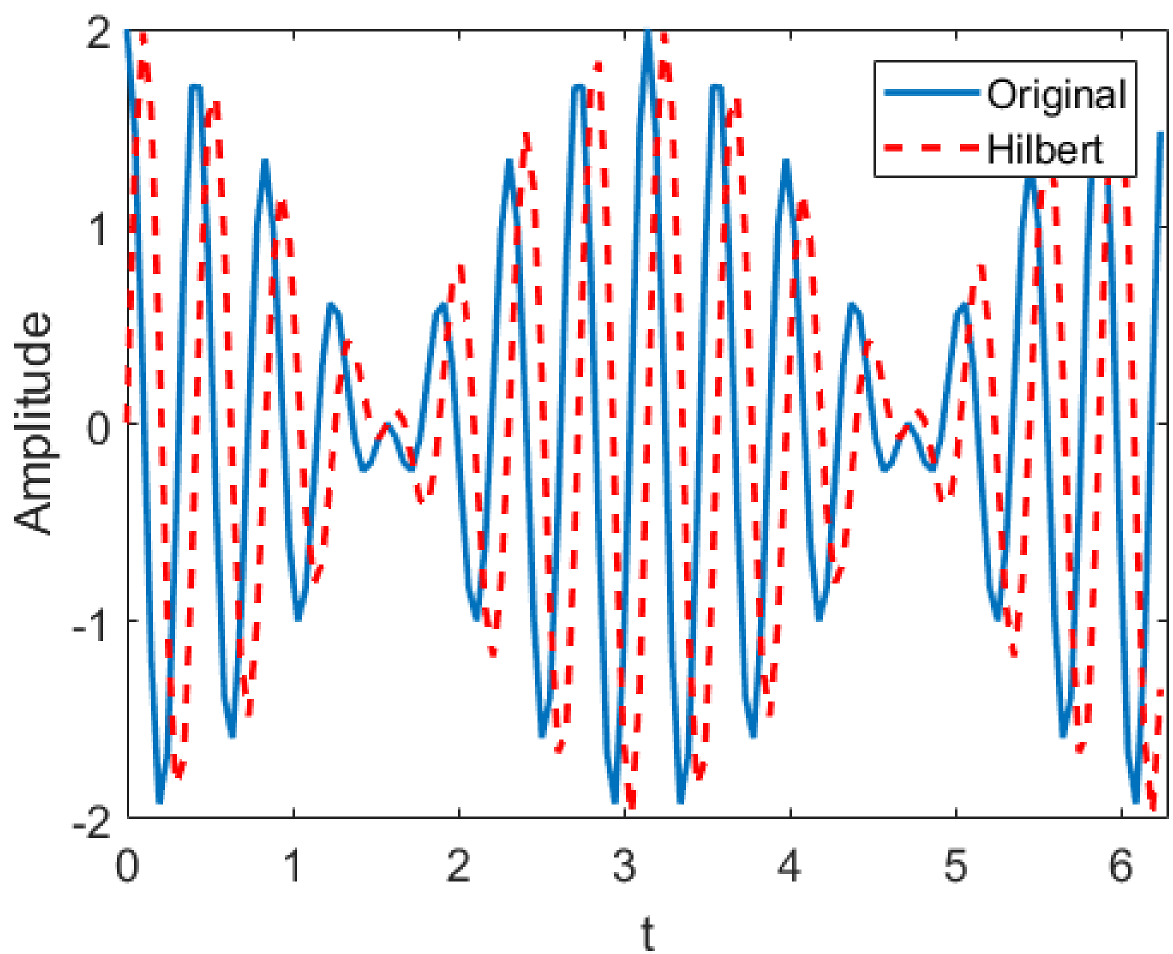
- Modificação dos coeficientes de Fourier para transformada de Hilbert

Extraído de Tropea, Yarin & Foss (2007)



Introdução – Análise de sinais modulados

➤ Para ilustrar a afirmação anterior, vamos comparar um sinal x(t) com a sua transformada de Hilbert (no domínio do tempo)



Demodulação

- Se pensarmos no caso de um sinal com amplitude modulada, do tipo $\mathrm{x(t)} = A(t)\cos(\omega t)$, a transformada de Hilbert desse sinal é $\mathrm{H\{x(t)\}} = A(t)\mathrm{sen}(\omega t)$.

- Considerando a identidade de Euler, temos

$$\mathrm{z(t)} = \mathrm{x(t)} + \mathrm{iH\{x(t)\}} = A(t)[\cos(\omega t) + i\mathrm{sen}(\omega t)]$$
$$\mathrm{z(t)} = A(t)e^{i\omega t}$$

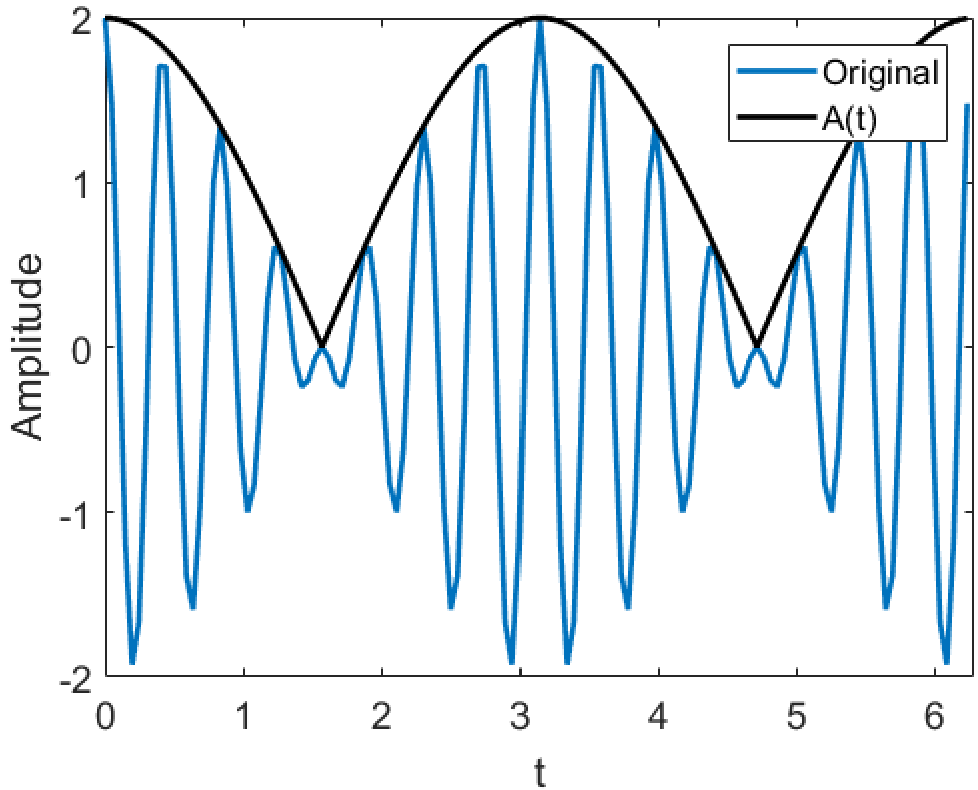
- A amplitude e a fase de z(t), correspondem a:

$$|\mathrm{z(t)}| = \sqrt{\left(A(t)\cos(\omega t)\right)^2 + \left(A(t)\mathrm{sen}(\omega t)\right)^2} = A(t)$$
$$\arg(z) = tan^{-1}\left[\frac{H\{x(t)\}}{x(t)}\right] = 2\pi\omega_0 t$$

Onde $\omega 0$ é chamado de frequência instantânea

Demodulação

- A partir das relações do slide anterior, pode-se estimar a modulação do sinal $\mathrm{A(t)} = |\mathrm{z(t)}| = |\mathrm{x(t)} + \mathrm{iH\{x(t)\}}|$



Algumas propriedades

Chamando $\mathrm{H}\{\mathrm{x}(\mathrm{t})\} = \tilde{x}(t)$

- Um deslocamento no tempo da função x(t) equivale a um desclocamento em $\tilde{x}(t)$

$$\mathrm{H}\{\mathrm{x}(\mathrm{t}-\mathrm{a})\} = \tilde{x}(t-a)$$

- Transformada da transformada

$$\mathrm{H}\{\tilde{x}(t)\} = -x(t)$$

- Transformada inversa

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{H}^{-1}\{\tilde{x}(t)\} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{x}(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

Isso equivale a convolução de $\tilde{x}(t)$ com (-1/πt). Assim, $x(t)$ pode ser definida por

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}) = \mathcal{F}^{-1}\{j\, sgn(\omega)\tilde{X}(\omega)\}$$

Algumas propriedades

- Ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\tilde{x}(t)dt = 0$$

Isso ocorre porque se $x(t)$ for uma função ímpar, $\tilde{x}(t)$ necessariamente será uma função par, e vice versa.

- Convolução

$$\mathrm{H}\{x(t)\otimes y(t)\} = \tilde{x}(t)\otimes \mathrm{y(t)} = \mathrm{x(t)}\otimes \tilde{y}(t)$$

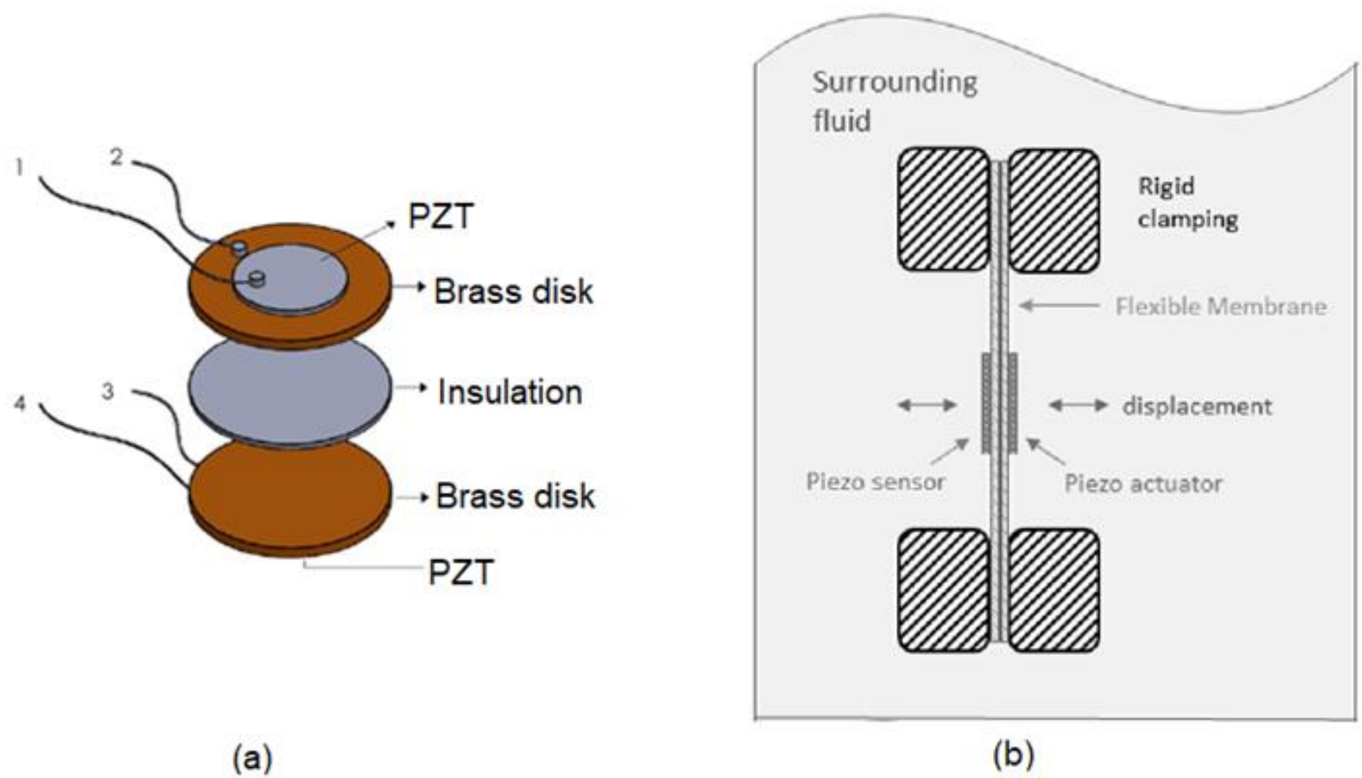
Isso vem do fato que

$$\mathcal{F}\{x(t)\otimes y(t)\} = X(\omega)Y(\omega)$$

$$\big[\big(-i\ sgn(\omega)\big)X(\omega)\big]Y(\omega) = \tilde{X}(\omega)Y(\omega)$$

Exemplos de aplicação

- ➢ Medidor de viscosidade e densidade de fluidos Newtonianos



Exemplos de aplicação

- Medidor de viscosidade e densidade de fluidos Newtonianos. Análogo a sistema massa mola amortecedor.

Trabalho de IC Mike Valente

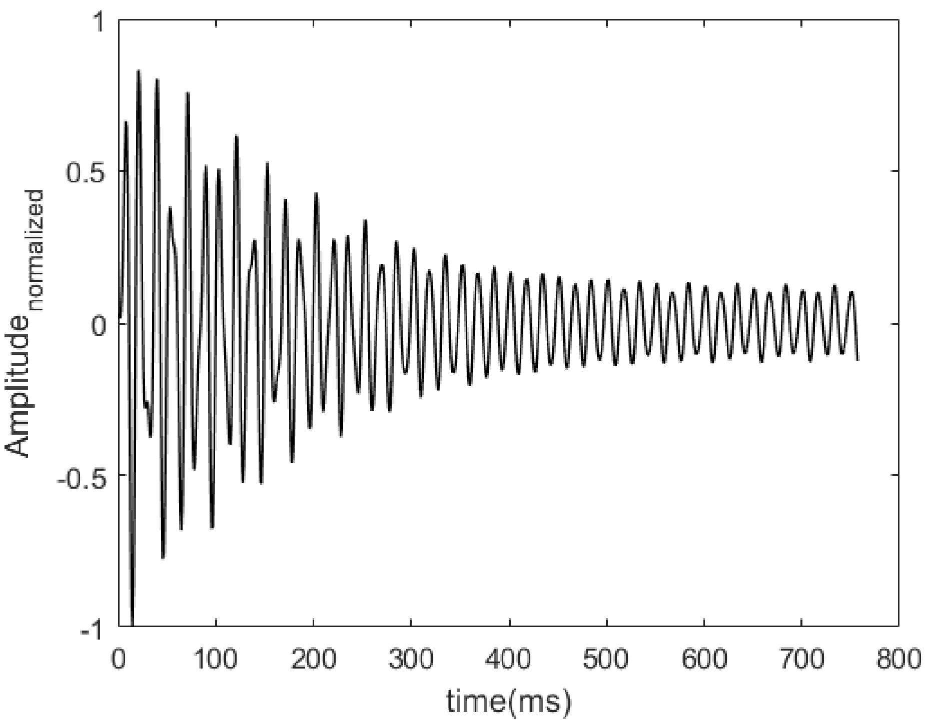
$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$$

Problema admite solução do tipo, para perturbação do tipo degrau

$$Cte \cdot e^{\left(-\xi\omega_n + i\omega_n^*\right)t}$$

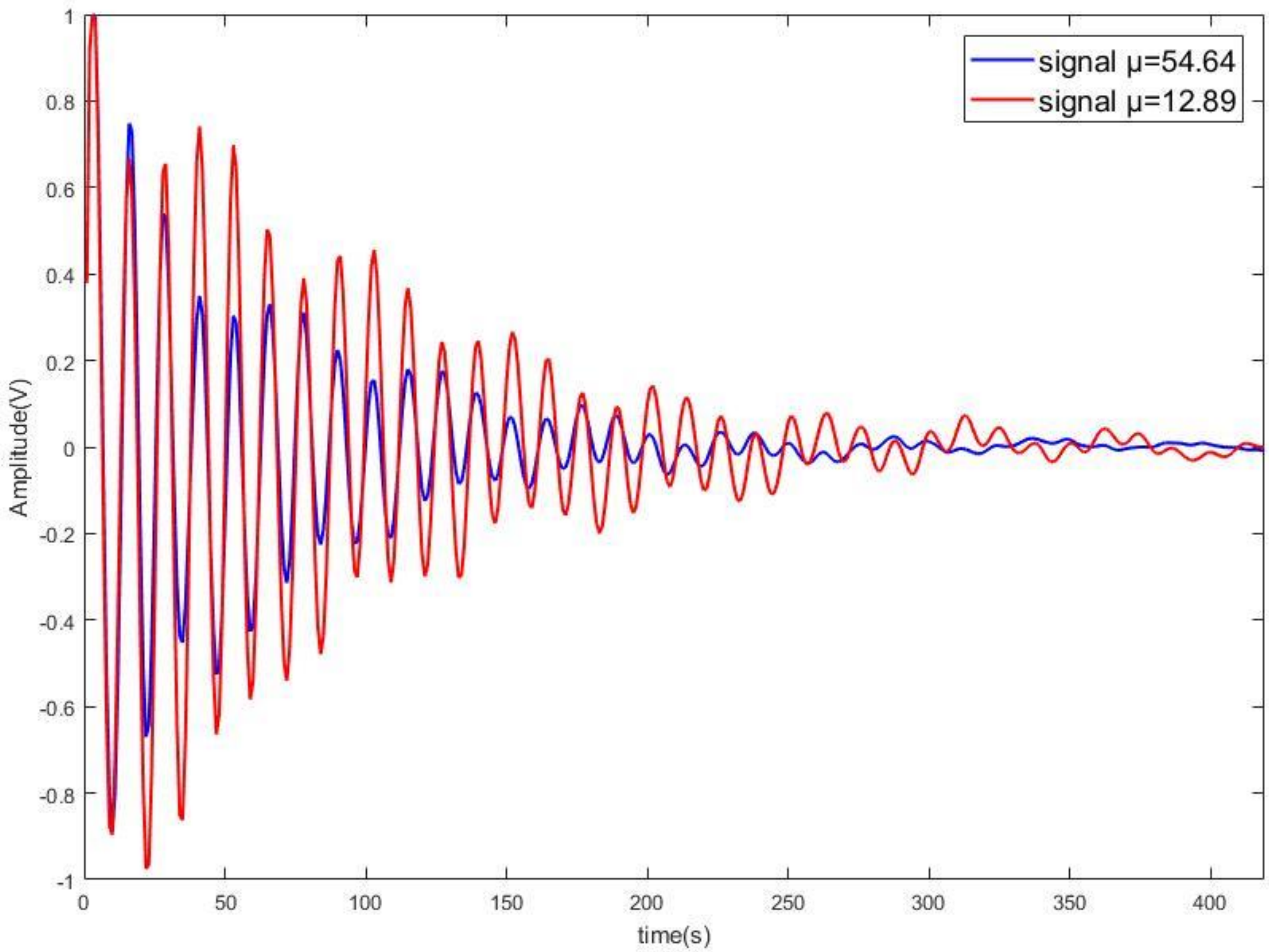
Resposta do sensor

Como fariam para medir o decaimento exponencial?



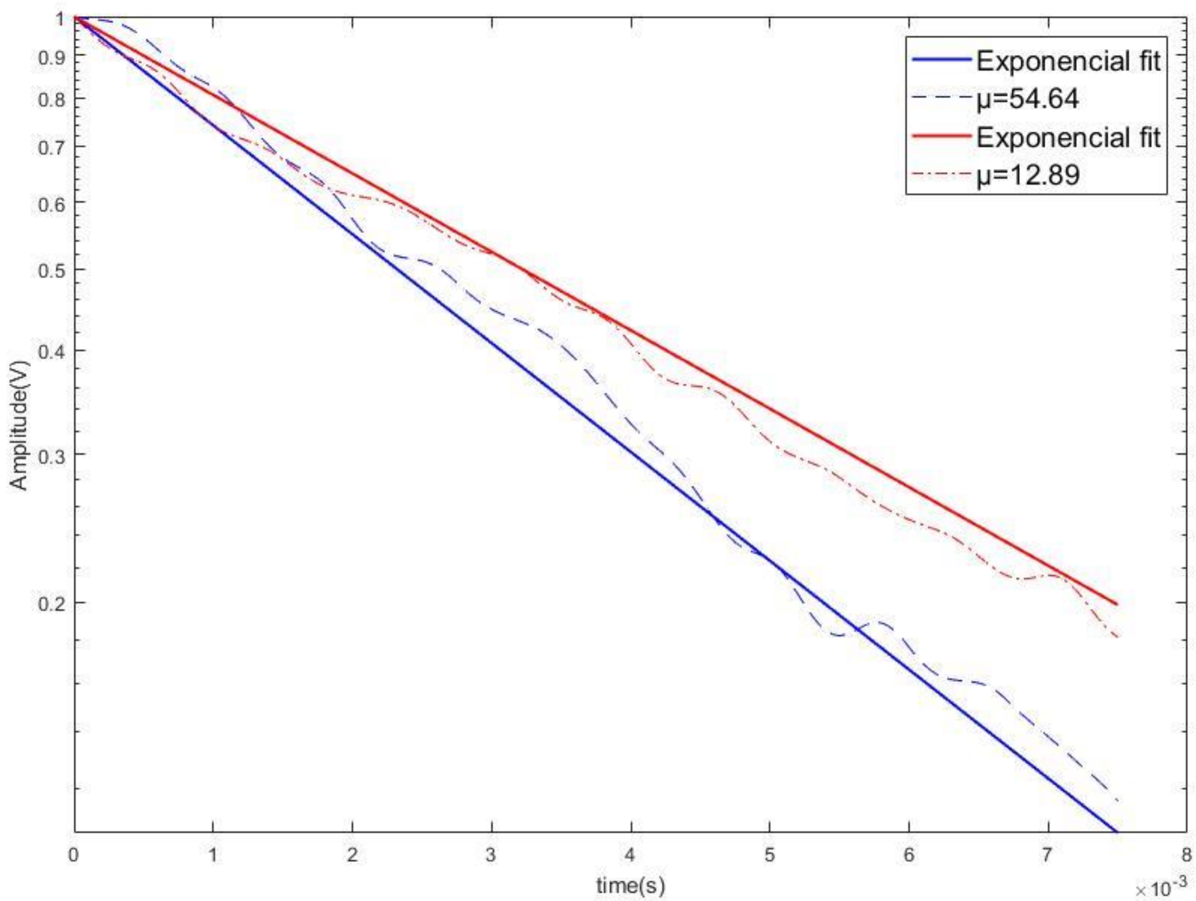
Exemplos de aplicação

➢ Análise



Exemplos de aplicação

- Decremento logarítmico ~ $Cte \cdot e^{(-\xi\omega_n)t}$



Exercícios

- Encontrar o decremento logarítmico do sinal abaixo

```
t=0:2*pi/128:2*pi-2*pi/128;
y=cos(14*t).*exp(-0.75*t);
```

Discutir resultados