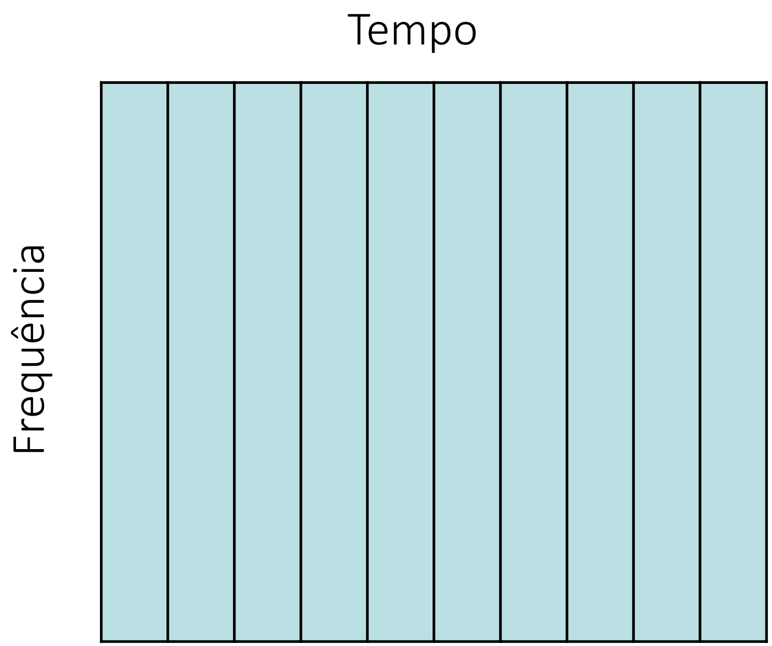
Introdução a transformada wavelet

Texto complementar à literatura do curso:
M. Farge, 1992, "*Wavelet transforms and their applications to turbulence*". Ann. Rev. Fluid Mech

Revisão da análise no domínio da frequência

- Podemos resumir, esquematicamente, o que já foi visto sobre análise temporal e espectral nos seguintes diagramas

Representação no domínio do tempo



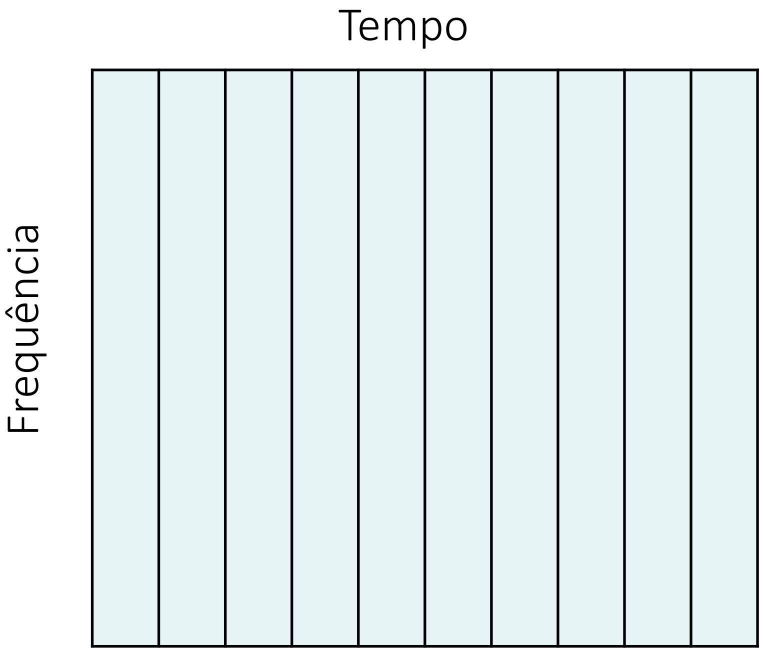
Representação no domínio da frequência - Fourier

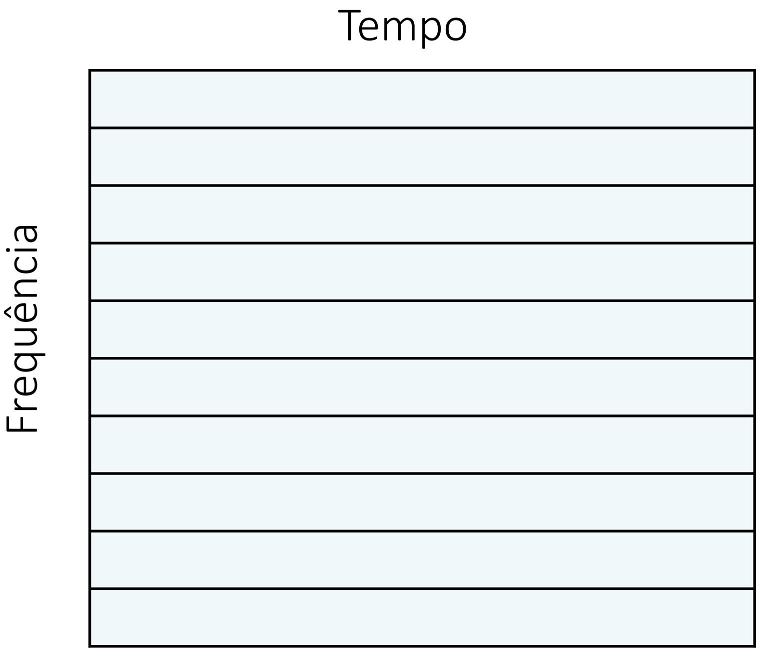
Revisão da análise no domínio da frequência

- Na aula passada vimos que outra representação é possível

Representação tempo-frequência

STFT

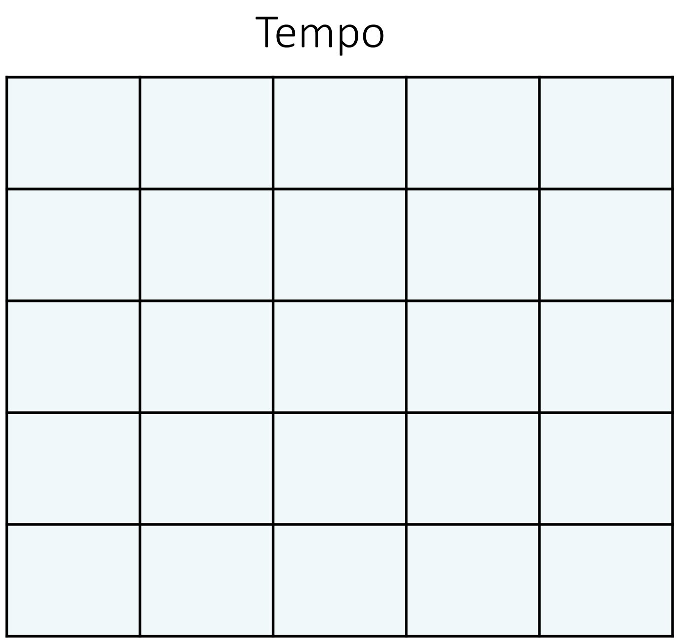




Revisão da análise no domínio da frequência

- Na representação tempo frequência, define-se um intervalo de tempo para a análise e obtém-se uma faixa de frequências correspondente. (Devido a incerteza de Heisenberg não é possível obter alta resolução tanto no tempo como frequência)

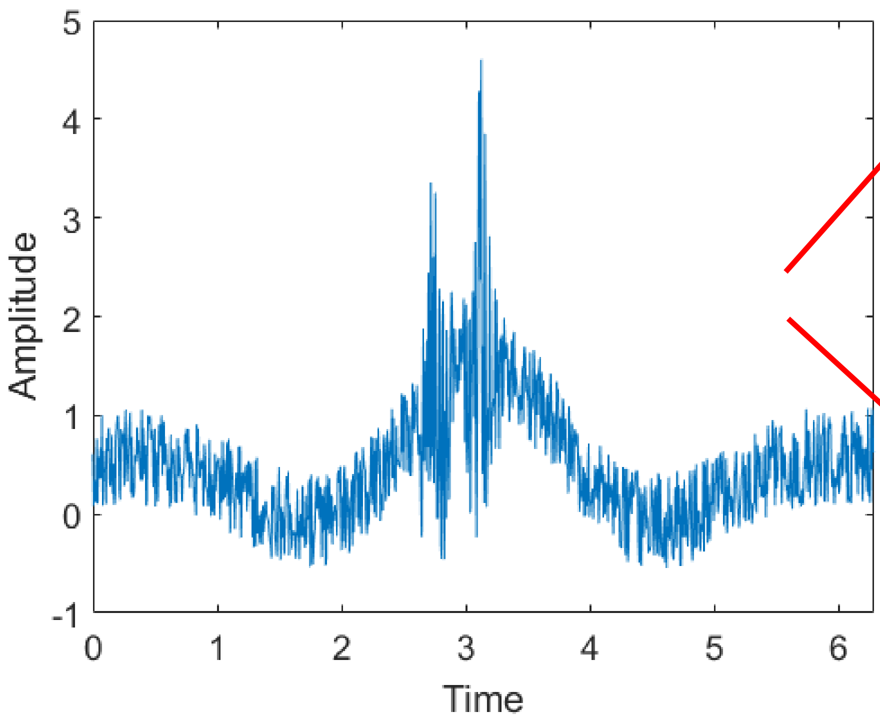
Representação tempo-frequência
STFT (*Short Time Fourier Transform*)

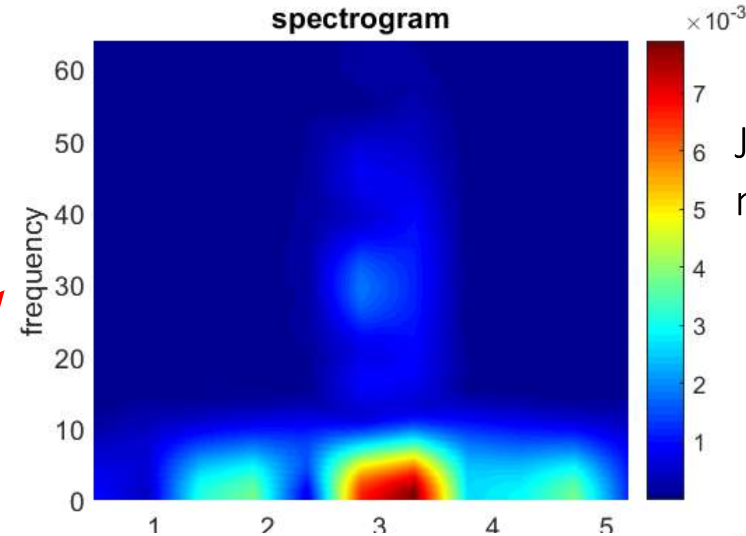


O que fazer quando se deseja analisar variação localizadas no tempo, sem desprezar frequências baixas (tempos longos)?

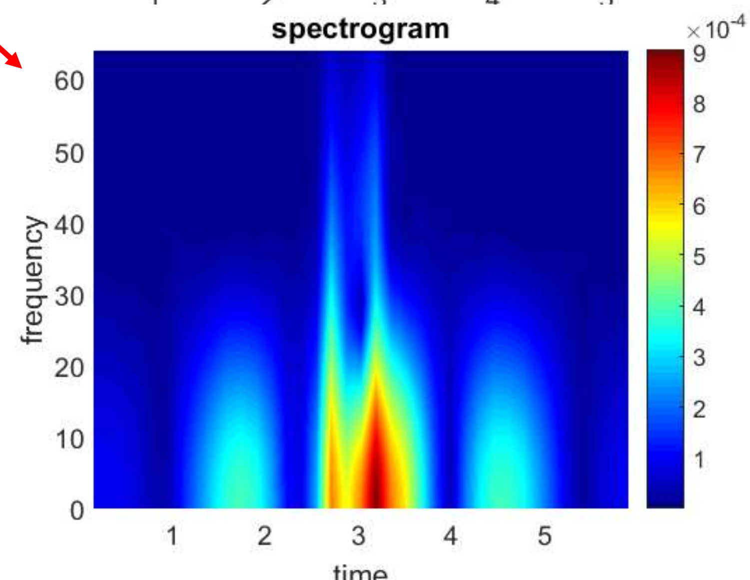
Motivação

➢ Exemplo. Sinal com oscilação de baixa frequência com eventos localizados no tempo.





Janela mais longa



Janela mais curta

Introdução a Transformada Wavelet

- A transformada Wavelet busca suprir essa limitação da transformada de tempo curto.
- Na transformada Wavelet, busca-se resolver com uma alta resolução espectral (consequentemente baixa resolução temporal) as oscilações de baixa frequência. Já as oscilações de mais alta frequência são resolvidas com alta resolução temporal e baixa resolução espectral.
- Essa variação de resolução se assemelha, por exemplo, a sensibilidade auditiva humana.
- Se pegarmos a escala musical, vemos que a cada oitava a frequência dobra. Assim, o espaçamento espectral entre as notas se torna maior e precisamos de menor resolução no espectro para resolver essas notas.

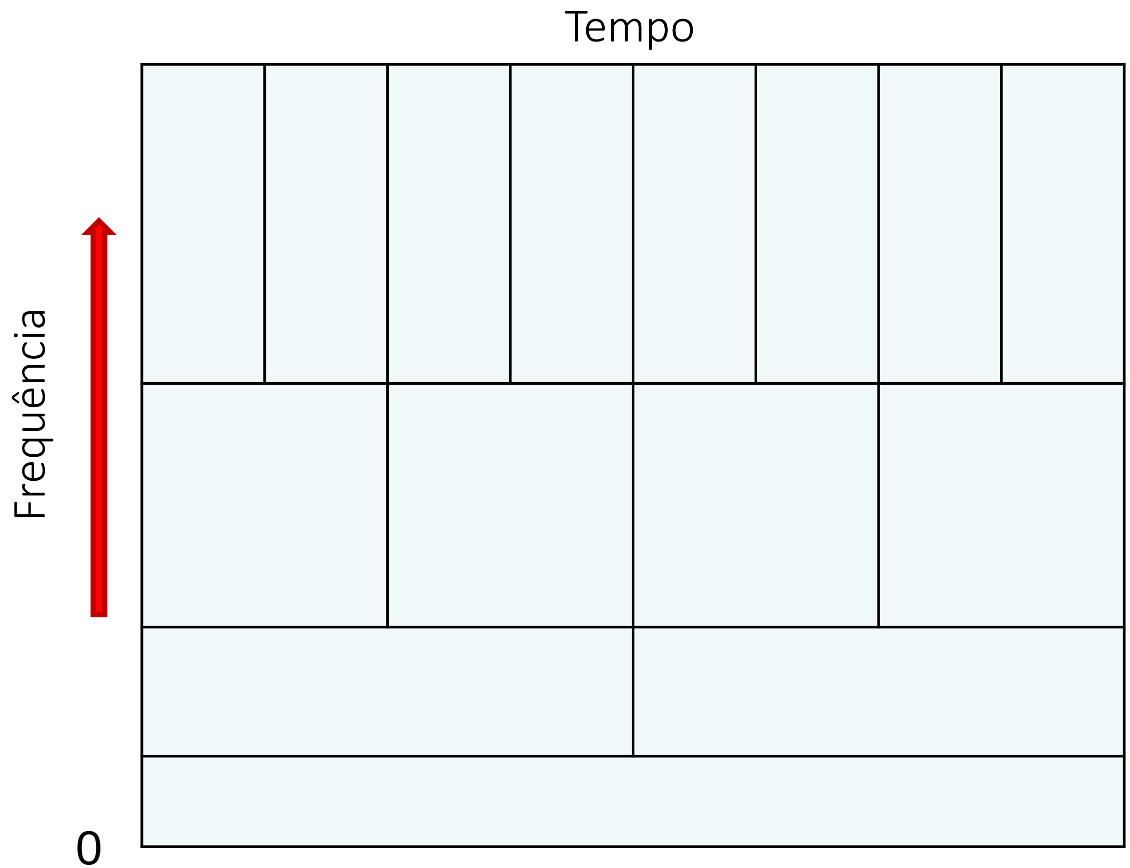
Introdução a Transformada Wavelet

Note Frequency Chart

	Octave 0	Octave 1	Octave 2	Octave 3	Octave 4	Octave 5	Octave 6	Octave 7	Octave 8
C	16.35	32.70	65.41	130.81	261.63	523.25	1046.50	2093.00	4186.01
C#	17.32	34.65	69.30	138.59	277.18	554.37	1108.73	2217.46	4434.92
D	18.35	36.71	73.42	146.83	293.66	587.33	1174.66	2349.32	4698.64
D#	19.45	38.89	77.78	155.56	311.13	622.25	1244.51	2489.02	4978.03
E	20.60	41.20	82.41	164.81	329.63	659.26	1318.51	2637.02	5274.04
F	21.83	43.65	87.31	174.61	349.23	698.46	1396.91	2793.83	5587.65
F#	23.12	46.25	92.50	185.00	369.99	739.99	1479.98	2959.96	5919.91
G	24.50	49.00	98.00	196.00	392.00	783.99	1567.98	3135.96	6271.93
G#	25.96	51.91	103.83	207.65	415.30	830.61	1661.22	3322.44	6644.88
A	27.50	55.00	110.00	220.00	440.00	880.00	1760.00	3520.00	7040.00
A#	29.14	58.27	116.54	233.08	466.16	932.33	1864.66	3729.31	7458.62
B	30.87	61.74	123.47	246.94	493.88	987.77	1975.53	3951.07	7902.13

Introdução a Transformada Wavelet

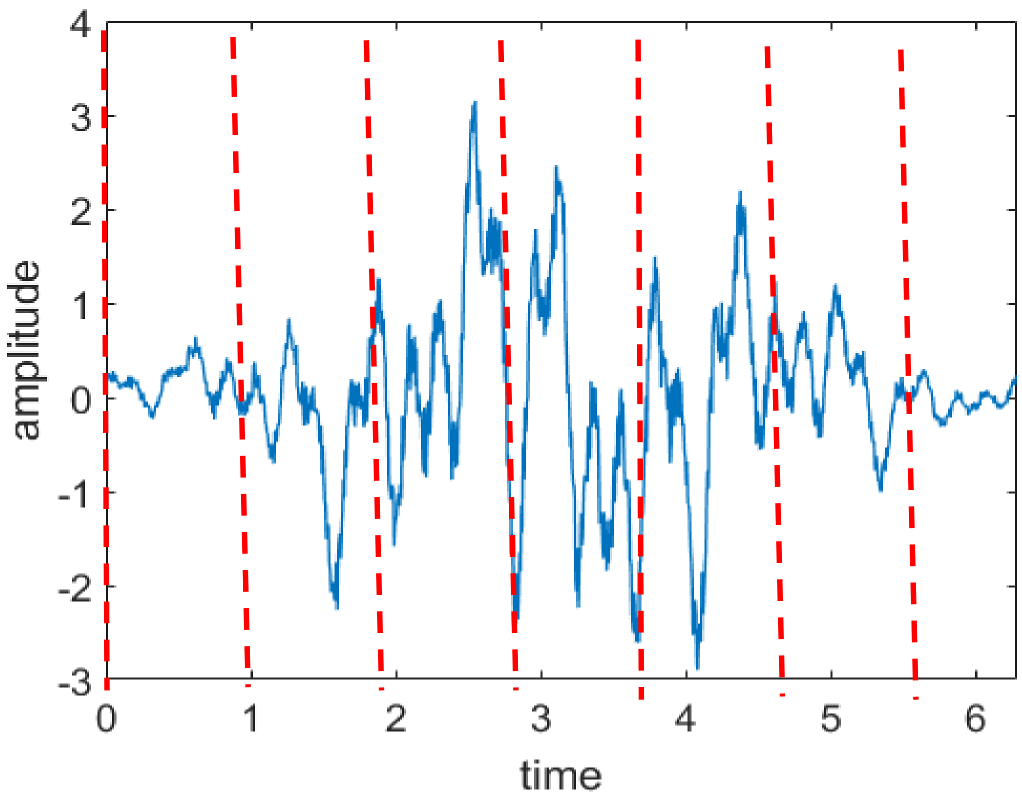
- Seguindo essa analogia, na transformação Wavelet o espectro é resolvido da seguinte maneira:



Como fazer isso?

Introdução a Transformada Wavelet

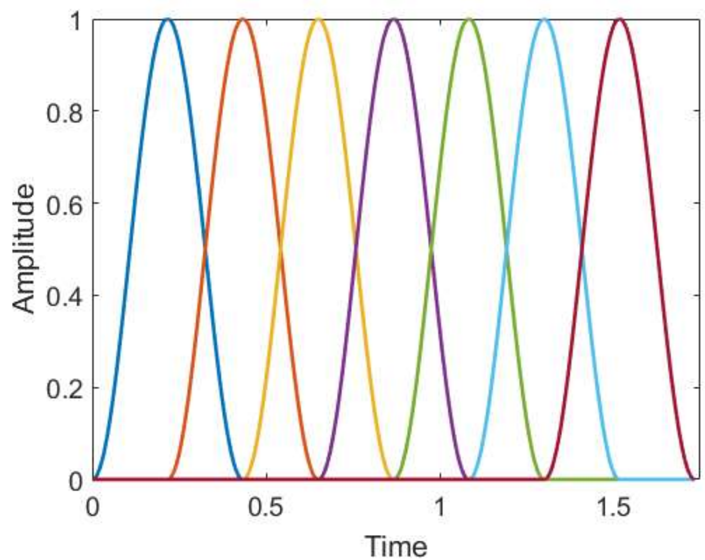
- Consideremos um sinal qualquer



- Já vimos da STFT que a variação do espectro no tempo é feita em sub-amostras da série de dados. Para variar a resolução temporal é necessário variar o comprimento da série de dados.

Introdução a Transformada Wavelet

- Vimos também que, para separar as amostras e evitar descontinuidades, podemos usar funções de enjanelamento.



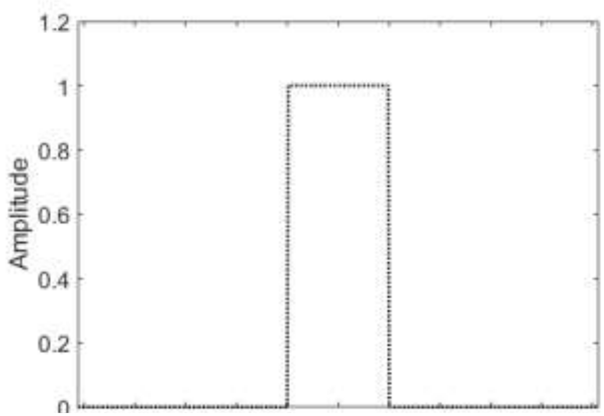
- Na seleção das janelas na STFT, não foi dada grande importância ao conteúdo espectral da função de enjanelamento.

- Se quisermos uma janela finita e localizada tanto no tempo como na frequência, temos que buscar funções especiais (wavelets)

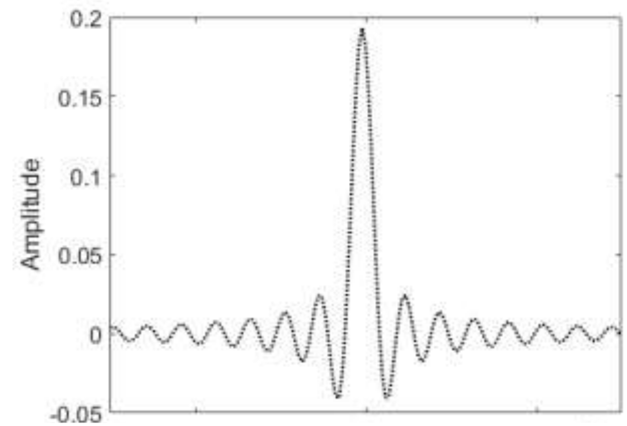
Introdução a Transformada Wavelet

➢ Na análise de filtros e janelas, vimos que algumas funções de enjanelamento espalham oscilações em todo o espectro e que alguns filtros espalham oscilações em toda a série temporal.

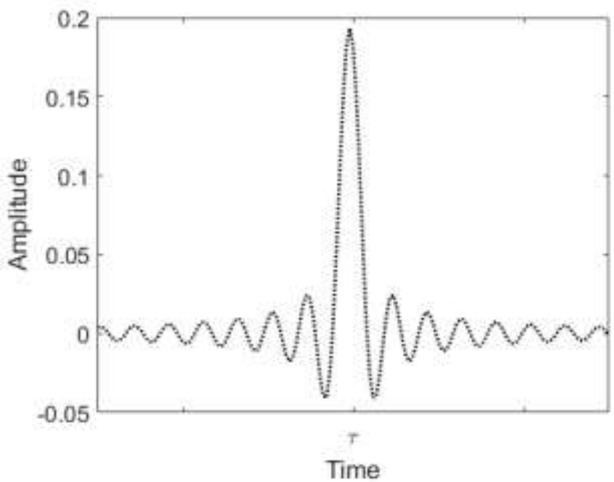
Ex.: Janela retangular



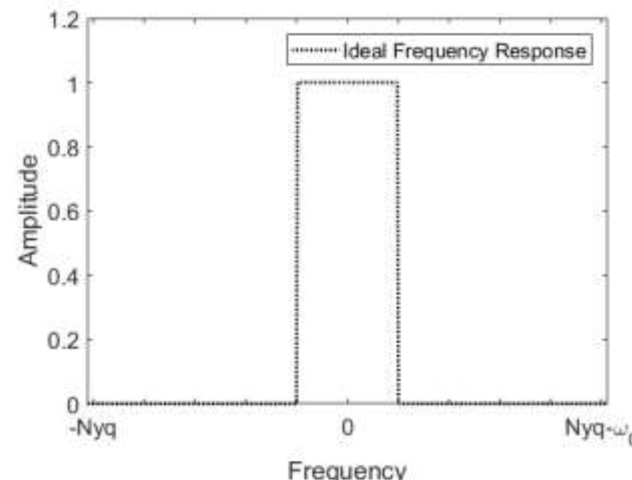
FFT



Ex.: Filtro ideal

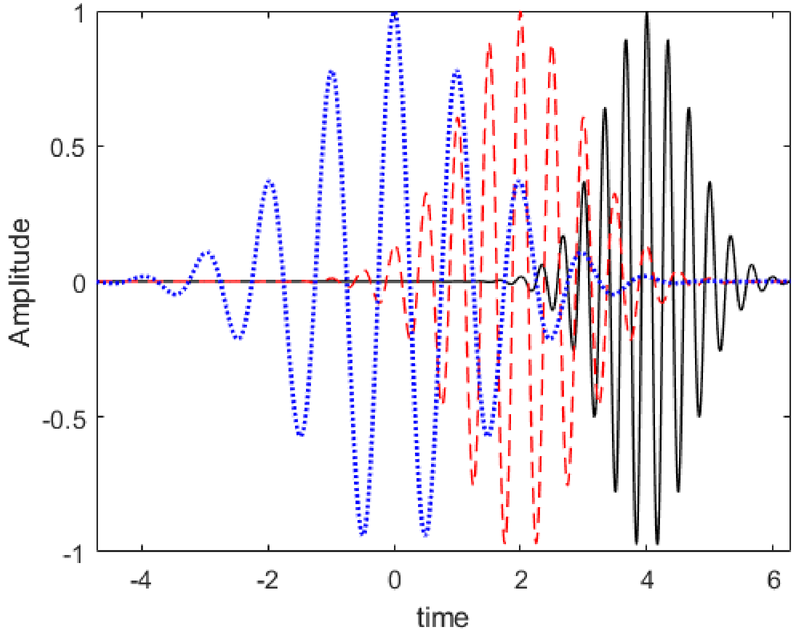


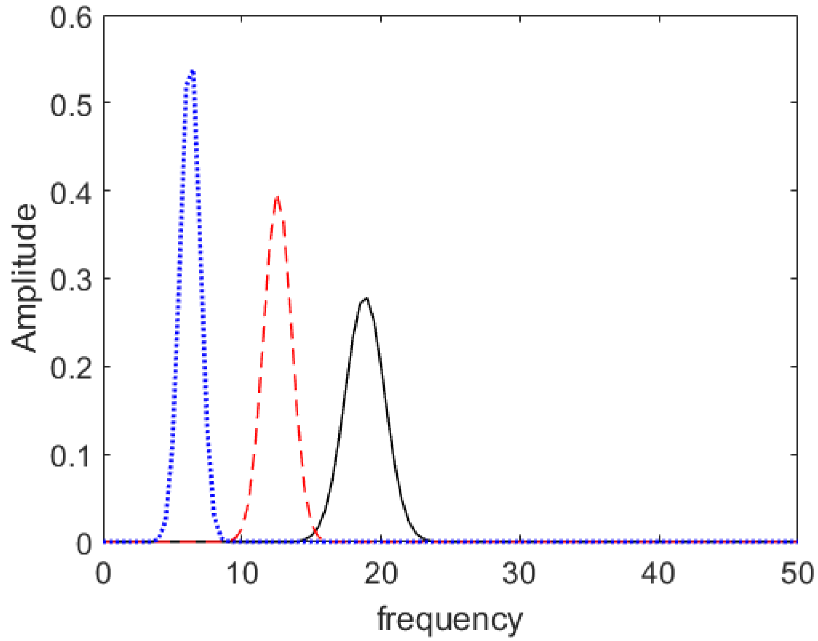
IFFT



Introdução a Transformada Wavelet

- Logo, uma análise tempo-frequência, com resolução variável, requer funções características que permitam, ao mesmo tempo, isolar uma faixa de frequências e um intervalo com duração finita.





- As funções que tem essa característica e satisfazem algumas outras restrições são chamadas de wavelets

Introdução a Transformada Wavelet

- As funções escolhidas como wavelets devem permitir:
  - deslocamento no tempo (para varredura ao longo da série de dados);
  - dilatação e compressão (para variação da largura da janela);
  - deslocamento no espectro (para varredura do conteúdo espectral do sinal – filtro passa banda ajustável)
- A largura da janela e a faixa de frequências capturadas são relacionadas e podem ser descritas por um único parâmetro da função wavelet ("*s*")

Introdução a Transformada Wavelet

- Assim, uma função wavelet no tempo ($\psi_{s,\tau}(t)$) pode ser escrita, de maneira geral como:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left[\frac{t-\tau}{s}\right]$$

Wavelet Mãe

- Nota-se que o parâmetro "s" sugere uma dilatação ou compressão da escala de tempo da função Ψ

- O fator $\sqrt{s}$ é uma normalização para que independentemente da dilatação todas as ondas tenham a mesma energia.

- O parâmetro τ é um deslocamento da função no tempo

- No domínio da frequência a função geral fica:

$$\Psi_{s,\tau}(\omega) = \sqrt{s}e^{-i\tau\omega}\Psi[s\omega]$$

Introdução a Transformada Wavelet

- Algumas janelas podem causar espalhamento em todo o espectro, dependendo da dilatação.

- Além disso, as funções wavelets devem ter médias iguais a zero, para não adicionar nenhuma tendência a transformação.

- Dessas duas restrições, tem-se as condições de admissibilidade das wavelets (para qualquer s e τ):

$$C_{\psi} = \int \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

$$\int \psi(t) dt = 0$$

Transformada Wavelet

- A partir da admissibilidade da função wavelet, podemos utilizá-la como uma base de referência e fazer a transformação do sinal (Fourier utilizou senos e cossenos, aqui utiliza-se uma função wavelet).

- Define-se a Transformada Wavelet Contínua (CWT, *Continuous Wavelet Transform*) como sendo a convolução entre a função x(t) e a função wavelet $\psi_{s,\tau}(t)$ para uma escala s .

$$W_{s,\tau} = \frac{1}{\sqrt{s}} \int x(t) \psi^* \left[\frac{t-\tau}{s}\right] dt = \int x(t) \psi^*_{s,\tau}(t) dt$$

Onde $W_{s,\tau}$ é a transformada wavelet da função x(t) no tempo t, para uma escala *s*. * denota o conjugado complexo.

Transformada Wavelet

- Respeitando-se as condições de admissibilidade é possível recuperar o sinal original a partir dos coeficientes da transformada $W_{s,\tau}$ (transformação inversa, ICWT)

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int\int W_{s,\tau} \psi_{s,\tau}(t) \frac{ds d\tau}{s^2}$$

- Na transformação wavelet a energia se conserva, e uma extensão da relação Parseval é observada (wavelets ortogonais)

$$\int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int\int \left|W_{s,\tau}\right|^2 \frac{ds d\tau}{s^2}$$

- A energia em cada escala fica

$$E(s) = \frac{1}{C_\psi} \int\int \left|W_{s,\tau}\right|^2 \frac{d\tau}{s^2}$$

Transformada Wavelet

- Sabemos que a convolução pode ser eficientemente implementada no domínio de Fourier. Assim, CWT pode ser obtida via IFT da convolução no domínio da frequência.

$$W_{s,\tau} = \frac{1}{2\pi}\int X(\omega)\Psi_{s,\tau}^{*}(\omega)d\omega$$

- No caso de sinais discretos a CWT, pode ser escrita como:

$$W_s[\tau] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,\Psi_s^{*}[k]e^{i\omega_0 k\tau}, \qquad para\ \tau = 0,1,2\ldots N-1$$

Onde: $X[k] = \mathcal{F}\{x[n]\}$ e $\Psi_s[k] = \mathcal{F}\{\psi_s\ [n]\}$, e $\omega_0 = 2\pi/N$

Escalas de tempo e frequência

- Localização no tempo é uma medida de concentração de $\psi_{s,\tau}$em torno de um tempo (faz sentido para wavelets assimétricas):

$$\mu_\tau = \frac{1}{\left\|\psi_{s,\tau}\right\|^2} \int t\left|\psi_{s,\tau}(t)\right|^2 dt$$

- Já a frequência central de cada escala é dada de maneira análoga por:

$$\mu_\omega = \frac{1}{\left\|\Psi_s\ \right\|^2} \int \omega\left|\Psi_s\ (\omega)\right|^2 d\omega$$

Para algumas funções wavelets a relação entre escala de dilatação e deslocamento no tempo podem ser obtidas analiticamente.

Como funciona a transformação

- Primeiro vamos definir uma função wavelet.
- Nesse exemplo, usaremos uma muito comum, conhecida como Morlet (Morlet et. al. 1983).
- Essa função corresponde ao produto entre uma senoide complexa e uma gaussiana na forma:

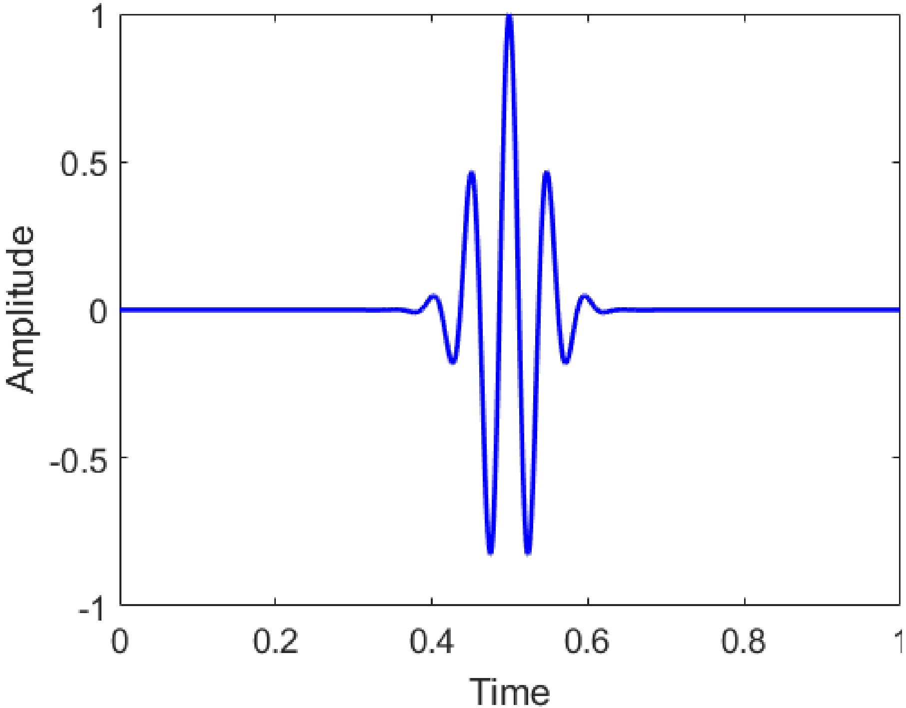
$$\psi_{s,\tau}(t) \sim e^{[-2\pi i f_c (t-\tau)]} e^{[-\frac{(t-\tau)^2}{2s^2}]}$$

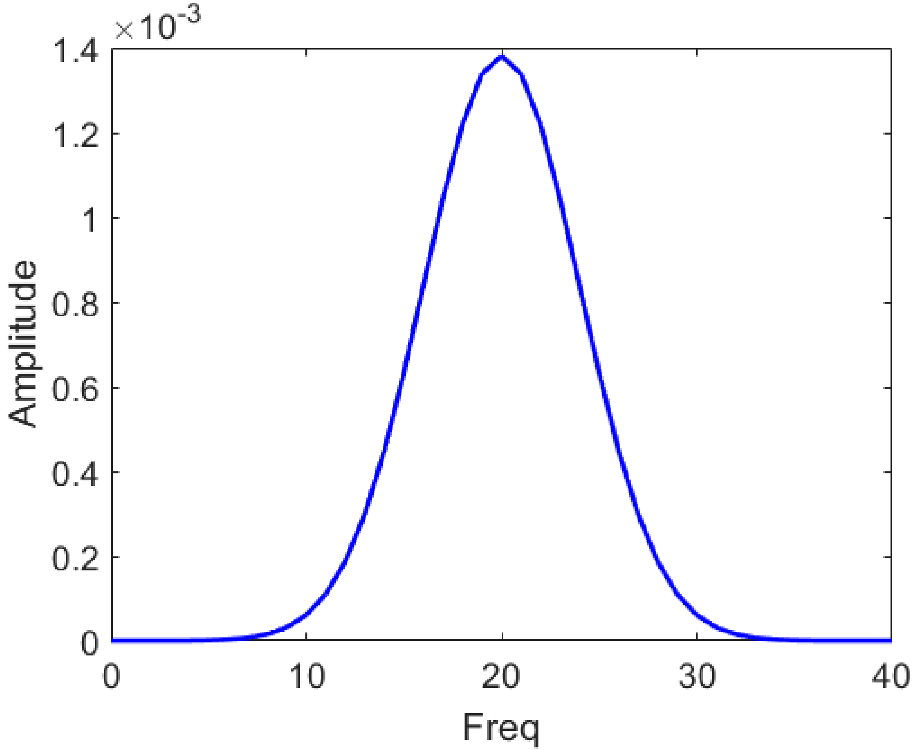
Senóide Gaussiana

Onde s é o fator de dilatação da escala de tempo da gaussiana e fc a frequência central da senoide.

Como funciona a transformação

- Função wavelet no tempo e no domínio da frequência (τ*=0.5, fc=20 e s=0.04*)





Como funciona a transformação

- Para manter a relação das ondas com a wavelet mãe, é necessário que o número de ciclos por janela ("*nc*") não se modifique, mesmo que a frequência da senóide (fc) mude

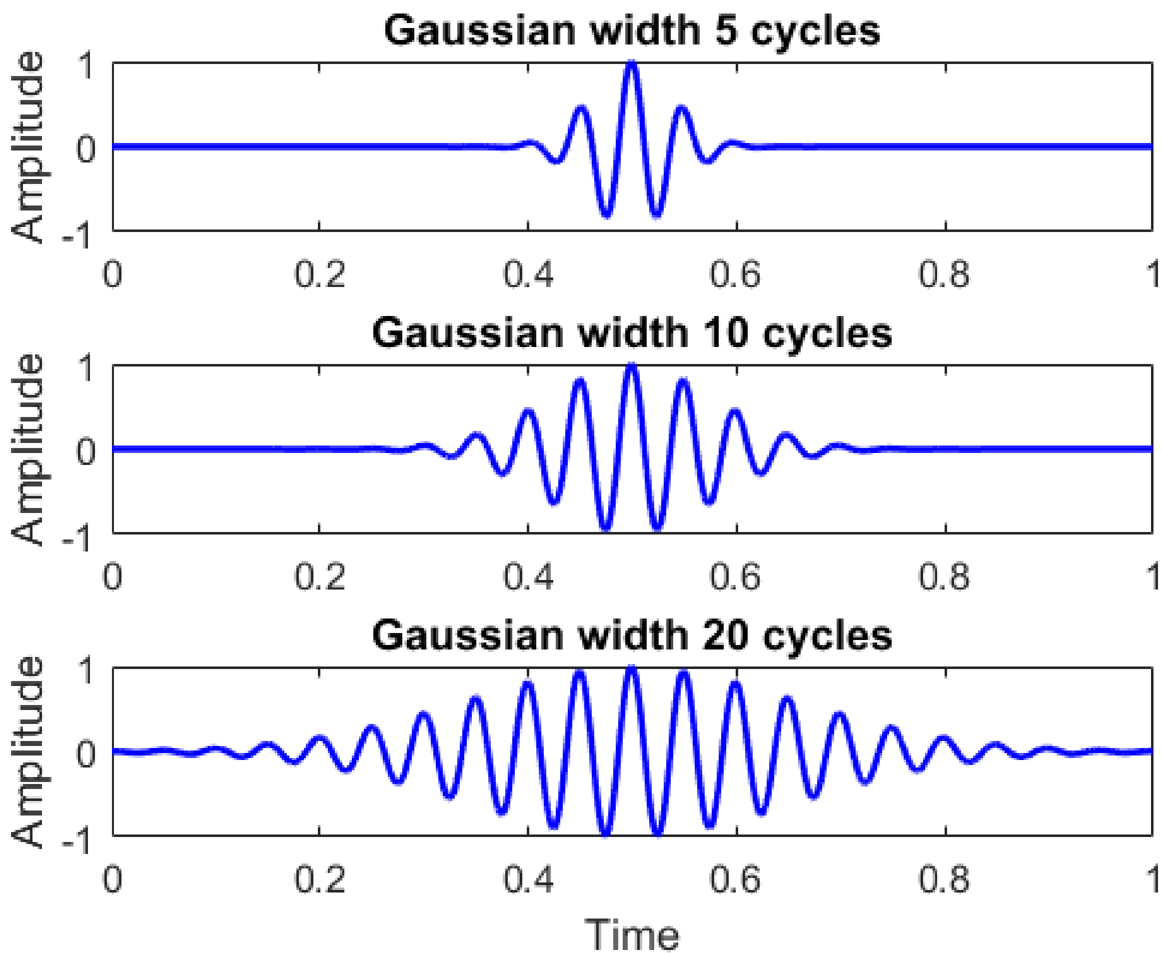
- Logo, existe uma relação entre fc e s para um número constante de ciclos (*nc*) por janela. Para a função janela do exemplo, essa relação é dada por

$$s = \frac{nc}{2\pi f_c}$$

- A relação número de ciclos por janela, para uma dada frequência têm influência na largura da janela e consequentemente no espalhamento da função no espectro

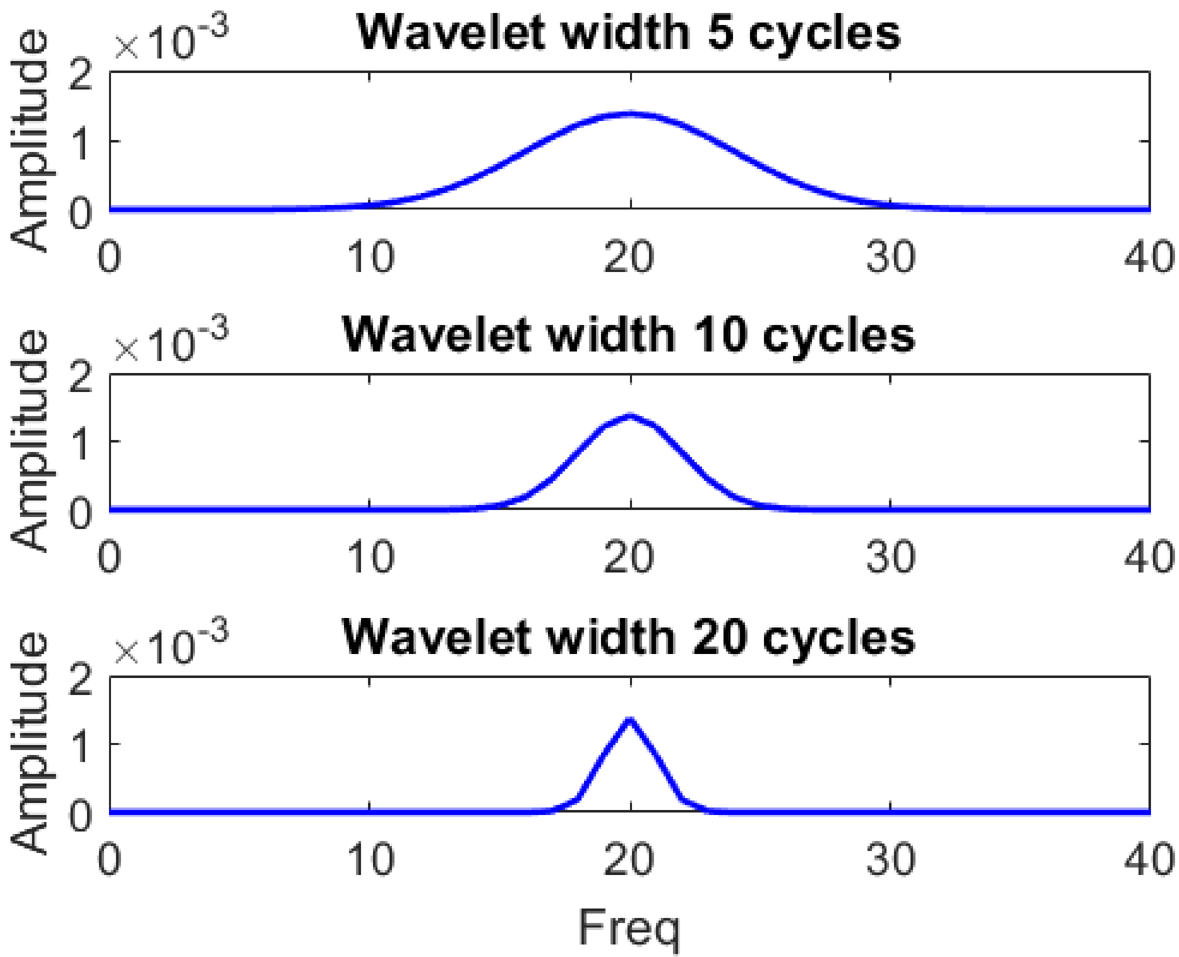
Como funciona a transformação

- Influência do número de ciclos na largura da gaussiana (figura mostra somente parte real da função)



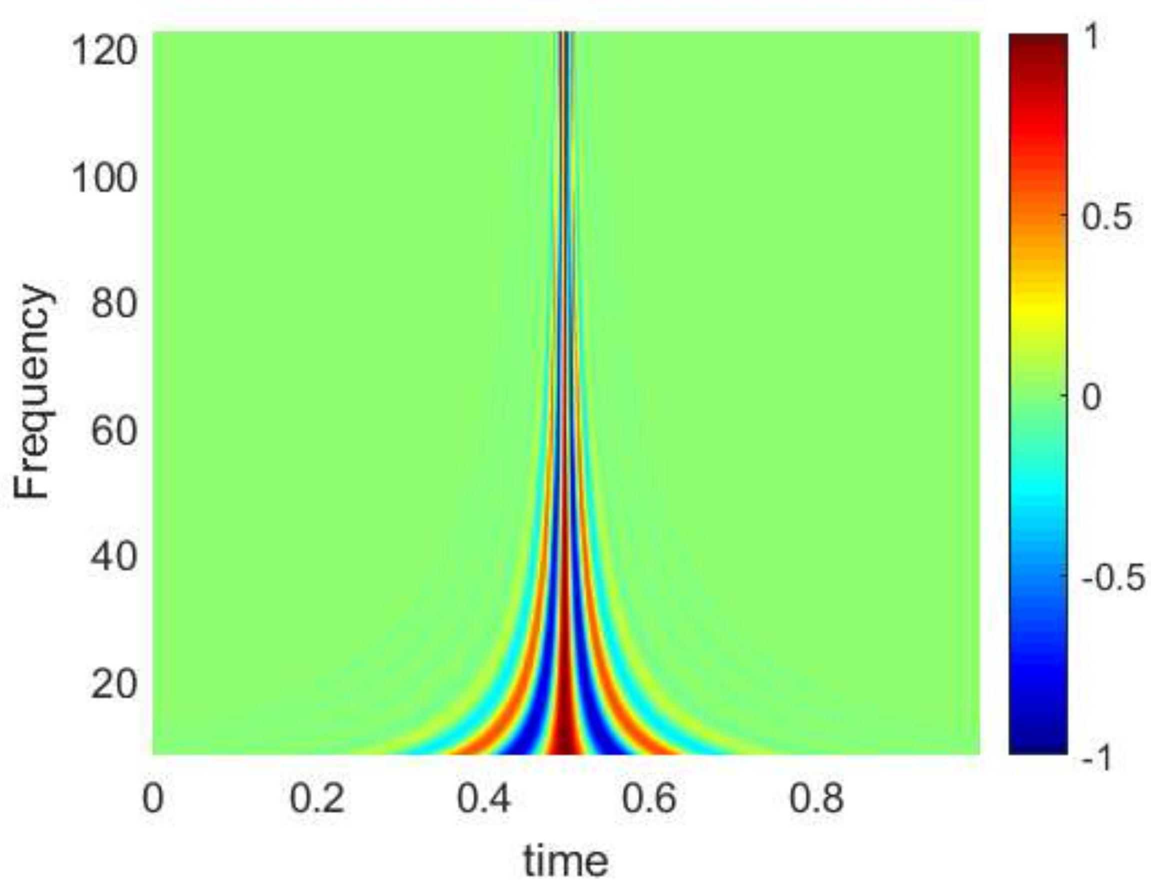
Como funciona a transformação

- Influência do número de ciclos na largura da gaussiana (figura mostra somente parte real da função)



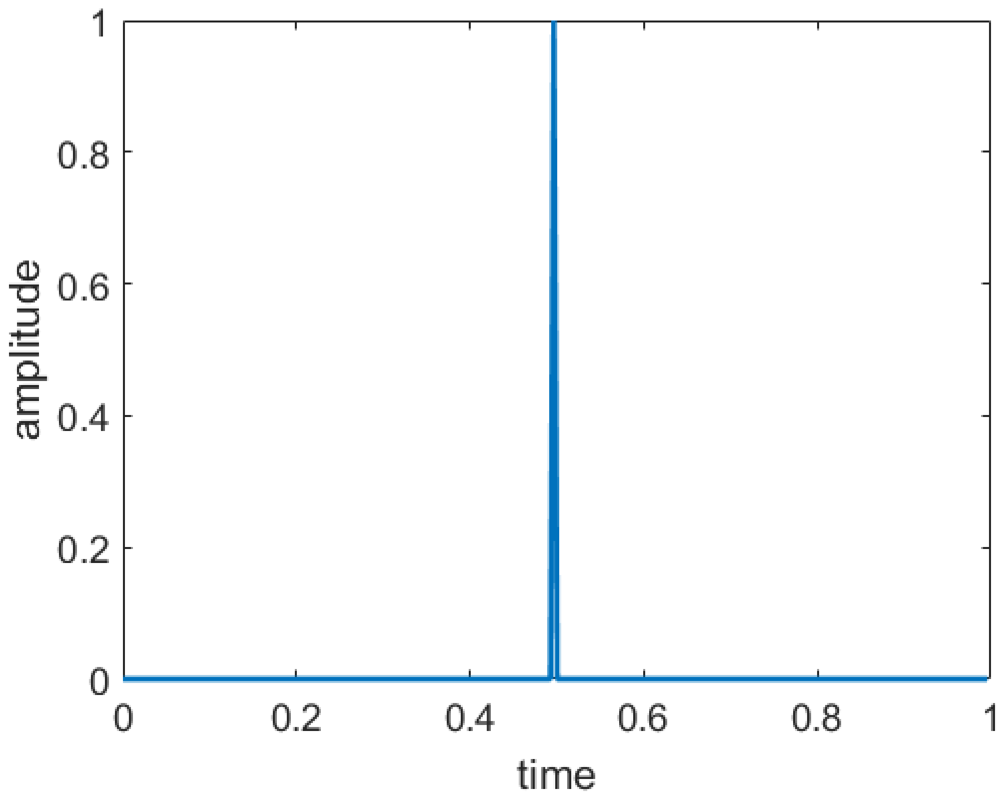
Como funciona a transformação

- Definido o número de ciclos dentro do envelope, pode-se observar como ficam as ondas $\psi_{s,\tau=0.5}\ (t)$



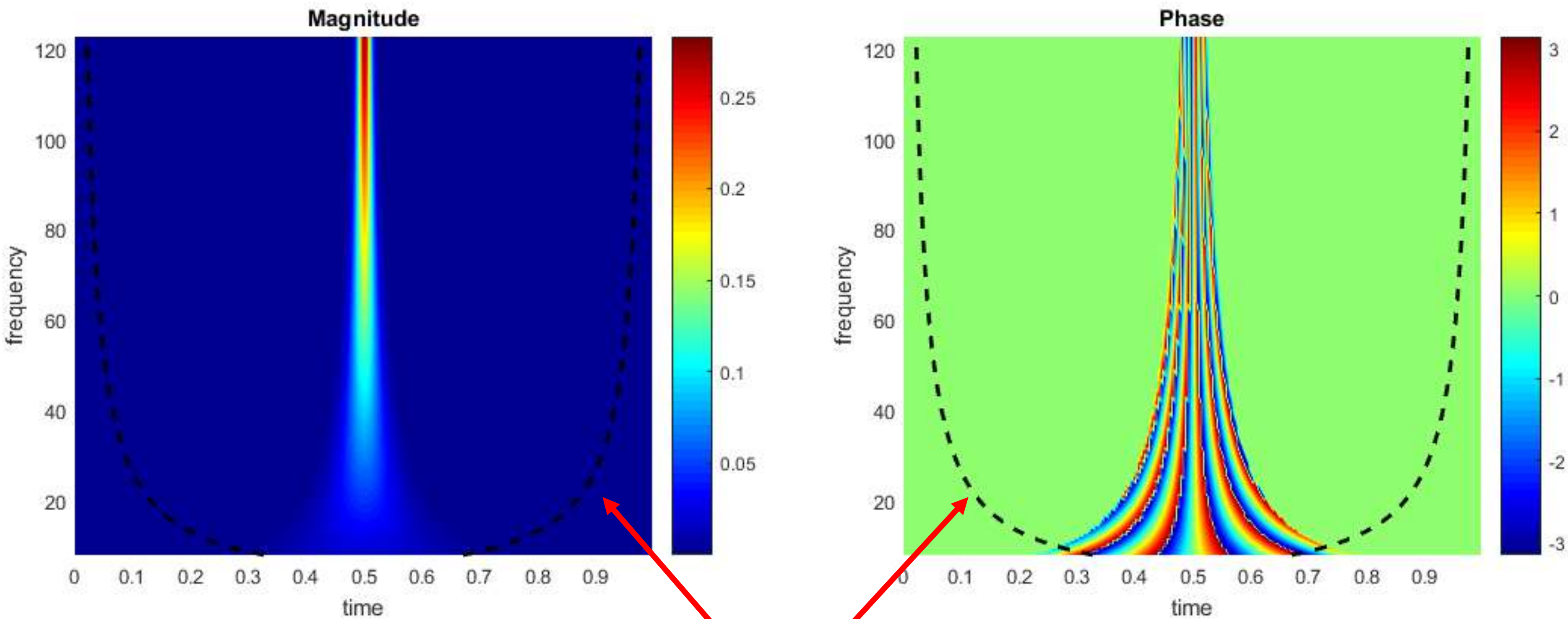
Exemplo

- Fazendo a transformada wavelet de uma função conhecida.
  Ex.: delta de Dirac



Exemplo

➢ Transformada Wavelet

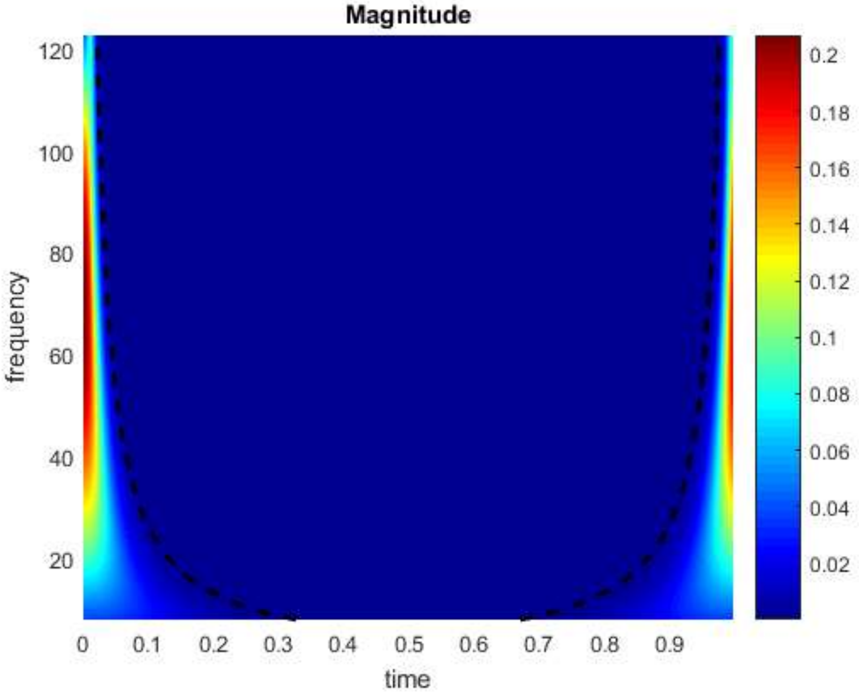


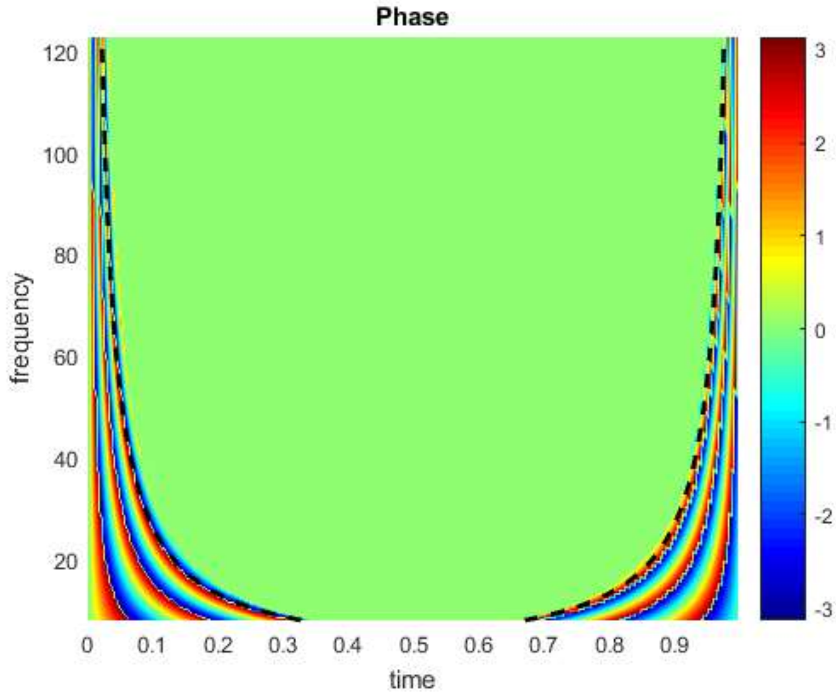
Cone de influência - COI

➢ As bordas do domínio influenciam os resultados da análise. A região abaixo das linhas tracejadas indicam essa região de influência

Exemplo

- Cone de Influência. Para estimar a região de influência, pode-se efetuar a transformada de dois pulsos, sendo um no início e outro no final da série de dados.

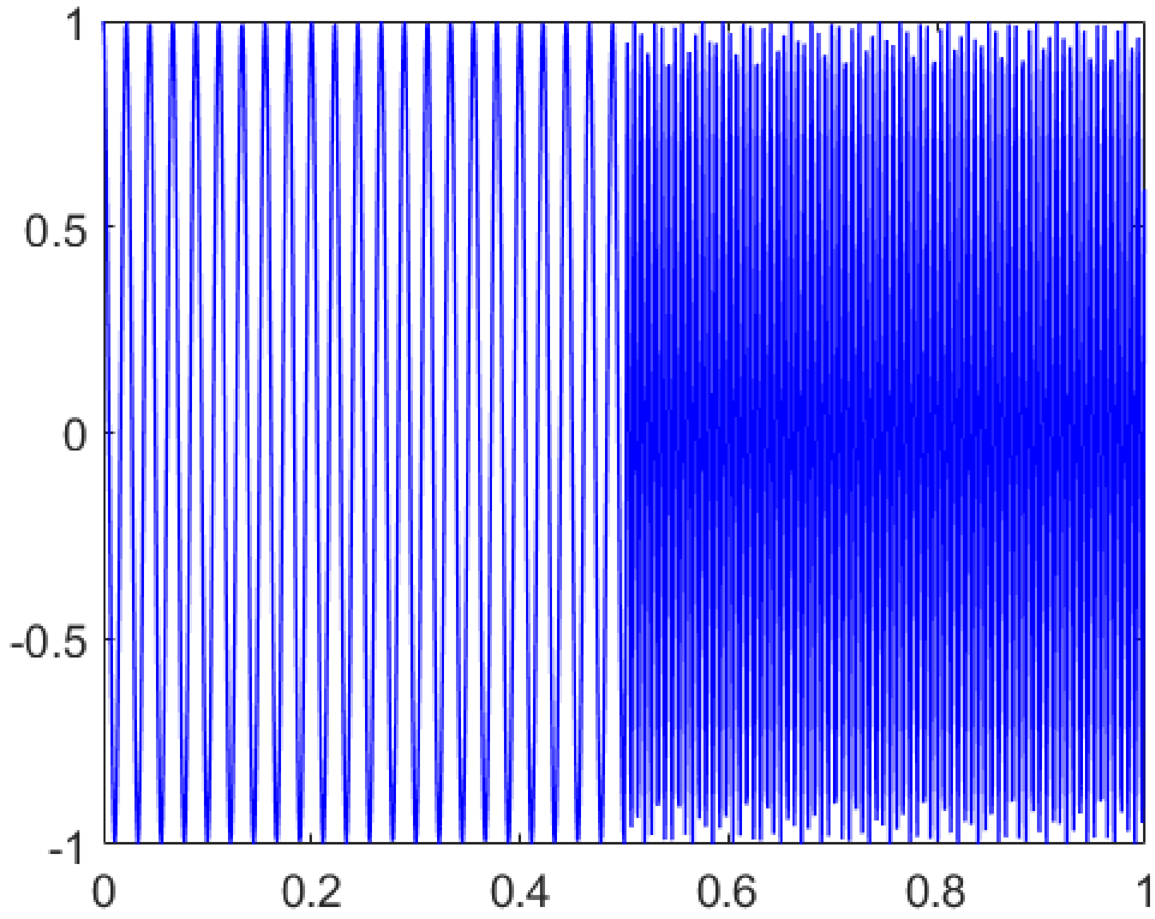




Para algumas funções, encontra-se um tempo de decaimento característico (teórico) que depende do tamanho da escala de dilatação do tempo

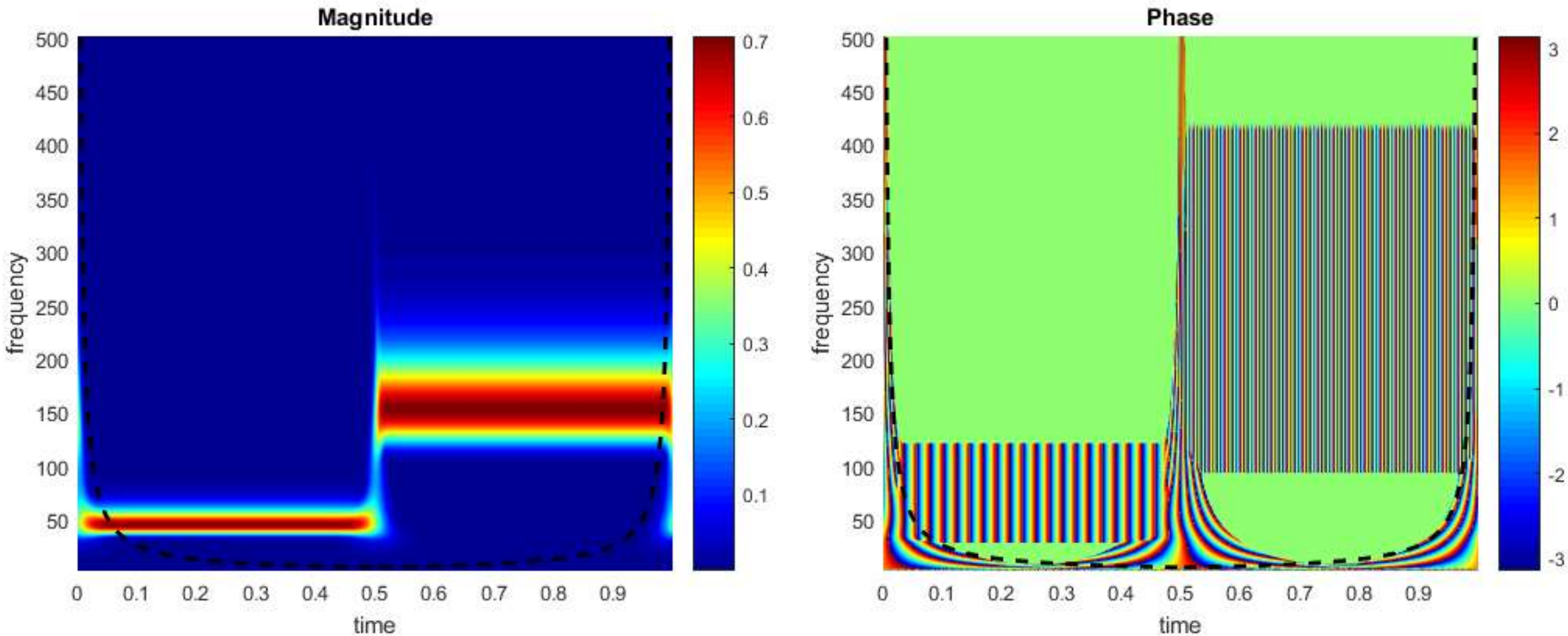
Exemplo 2

- Sinal conhecido



Exemplo 2

➢ CWT – Morlet Complexa. 6 ciclos por janela



Obs: Critério limite para fase (se amplitude menor que 0.5% do máximo, não mostrar fase)

Código

```
function [wt,fc] = wavelet_class(y,fs,a0,ns)
%***********************************************************
%          Function for Demonstration of
%           Continuous Wavelet Transform
%***********************************************************
% Created by I B de Paula, PUC-Rio 2019,
% Signal processing lecture
% Last Review 17- Jun 2019
%***********************************************************
% INPUT DATA
% y          - data time series vector
% fs         - sampling frequency
% a0         - frequency ratio between consecutive scales ;
% ns         - number of scales
% mwtype (not used)    - Mother wavelet type ('ex. Morlet, etc')
%***********************************************************
n_cycles=[6]; % number of cycles per wavelet window
%                 (minimum 6 for admissibility of Morlet wavelet)
%                  see Farge, Annual Rev. Fluid Mech 1992
dt=1/fs;
time=0:dt:(length(y)-1)*dt;
freq=fftshift(-fs/2:fs/length(time):fs/2-fs/length(time));
```

Código

```
fft_y=(fft(y-mean(y))); % FFT of signal for calculation of CWT
% definition of scales based on input parameters
scales=1./(a0.^(ns:-1:1));
% if scale =1 then the last frequency is equals to Nyquist
fc=(scales)*fs/2; % aproximate central frequencies for Morlet wavelet
for i=1:length(fc)
        s = n_cycles/(2*pi*fc(i)); % width of gaussian function
        % dilated wavelet. It is not necesssary to translate
        % because the convolution is performed in Fourier space
        t=time-time(end/2); % centralizaton of wavelet
        psi=fftshift(exp(sqrt(-1)*2*pi*fc(i).*t).*exp(...
                                                     -t.^2./(2*s^2)));
       % fftshift removes time delay introduced for centering
        %Fourier transform of wavelet function
        psi_f=(fft(psi));
        c=sum(abs(psi_f).^2)/length(psi_f); % factor c for
       %normalization of wavelets - all have the same energy
        psi_f=psi_f/c;
        %convolution with data series and inverse Fourier Transform
        convol=(ifft((conj(psi_f).*fft_y))); %
        wt(:,i)=convol(:); % Continuous Wavelet Coefficient
end
return
```

Funções de enjanelamento

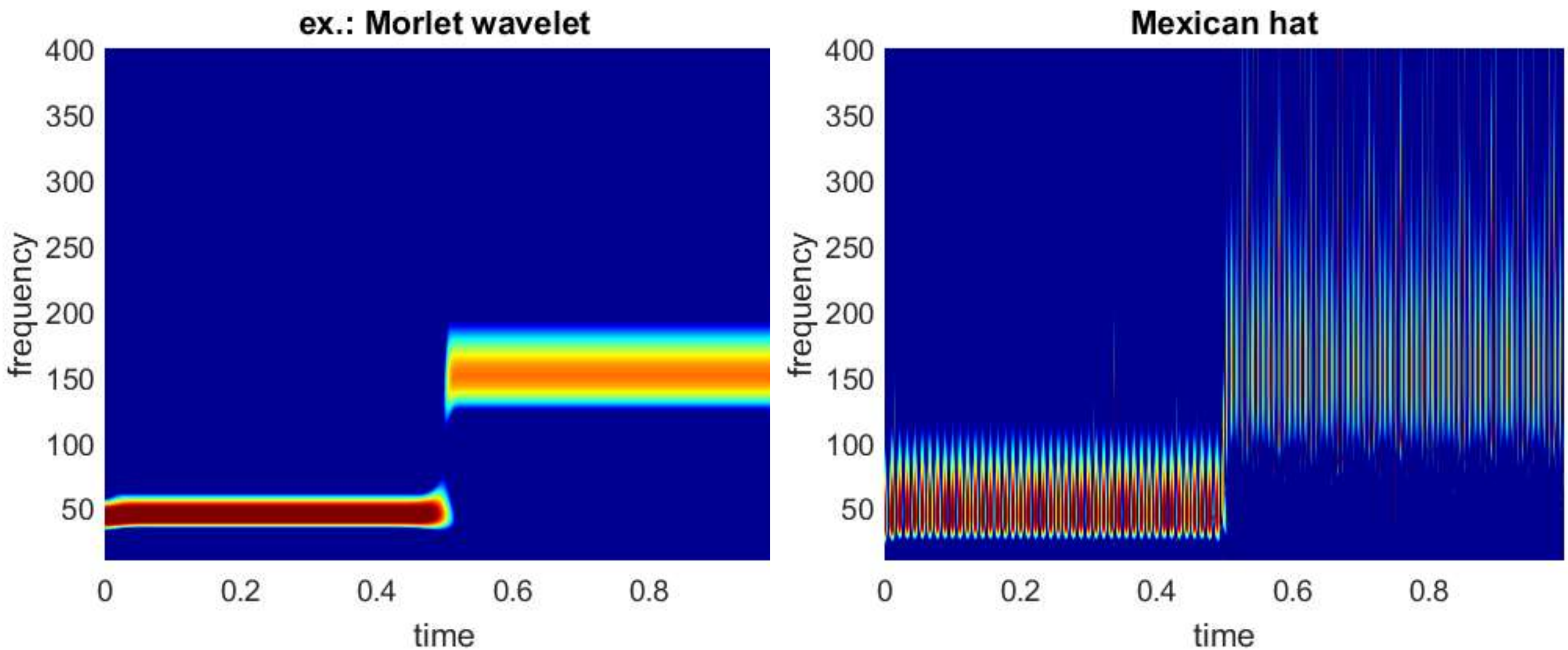
Name	$\psi_0(\eta)$	$\hat{\psi}_0(s\omega)$	*e*-folding time τ_s
Morlet (ω_0 = frequency)	$\pi^{-1/4}e^{i\omega_0\eta}e^{-\eta^2/2}$	$\pi^{-1/4}H(\omega)e^{-(s\omega-\omega_0)^2/2}$	$\sqrt{2}s$
Paul (m = order)	$\frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi(2m)!}}(1-i\eta)^{-(m+1)}$	$\frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)!}}H(\omega)(s\omega)^m e^{-s\omega}$	$s/\sqrt{2}$
DOG (m = derivative)	$\frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}}\frac{d^m}{d\eta^m}\left(e^{-\eta^2/2}\right)$	$\frac{i^m}{\sqrt{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}}(s\omega)^m e^{-(s\omega)^2/2}$	$\sqrt{2}s$

H(ω) = Heaviside step function, H(ω) = 1 if $\omega > 0$, H(ω) = 0 otherwise.
DOG = derivative of a Gaussian; m = 2 is the Marr or Mexican hat wavelet.

Extraído de Torrence and Compo, Bulletin Am. Met. Soc. 1998

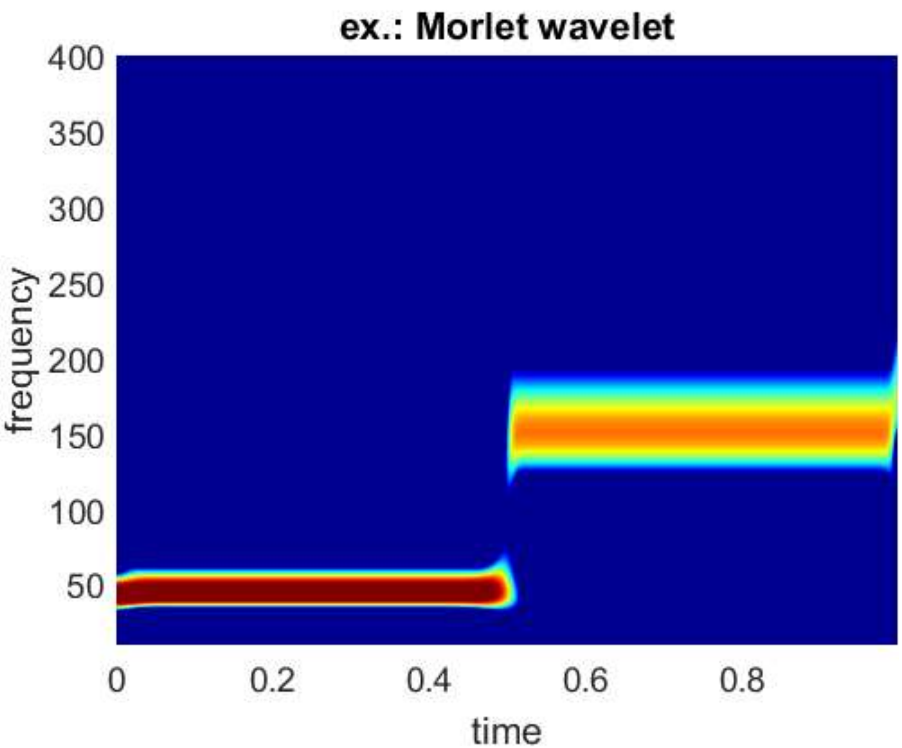
Funções de enjanelamento

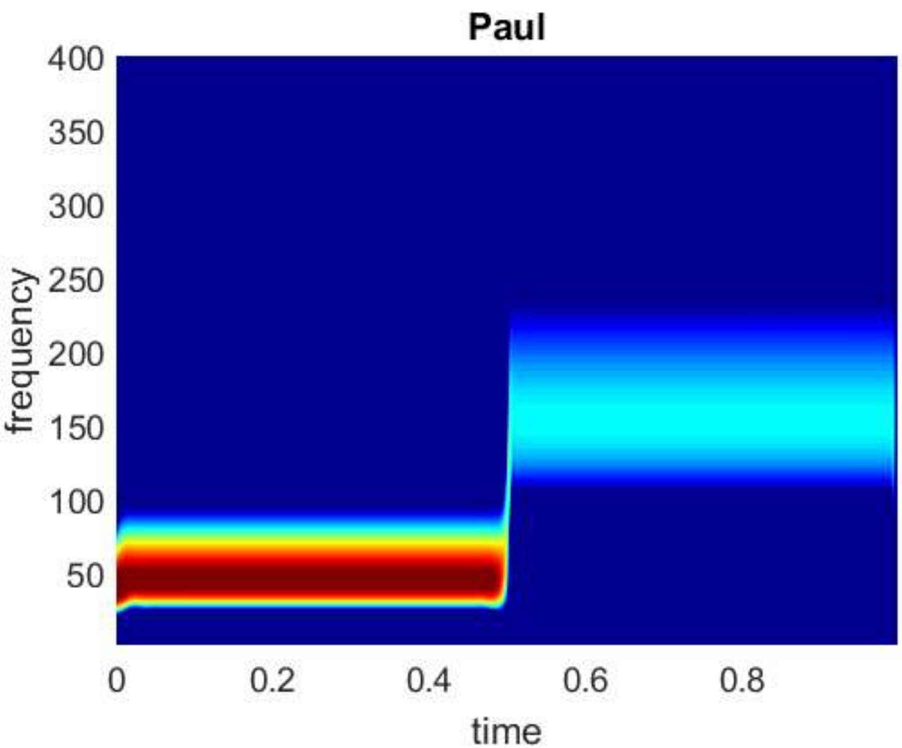
- Existem inúmeras funções wavelets, cada uma características que podem ser importantes para diferentes aplicações.



Funções de enjanelamento

- Existem inúmeras funções wavelets, cada uma características que podem ser importantes para diferentes aplicações.





2th order

Aplicações

- Existem inúmeras funções wavelets, cada uma características que podem ser importantes para diferentes aplicações.

- Dentre as aplicações desse tipo de transformação, destacam-se (incluindo-se a transformada discreta, que não foi abordada nessa aula):

  - Processamento de sinais e compressão (transformada discreta). JPEG, Video Streaming, etc
  - Visão computacional e biometria
  - Comunicação
  - Biotecnologia, facilita o reconhecimento de mudanças de padrões

Aplicações

- Medicina - análise de sinais de EEG, ECG, EMG e processamento de imagens de ressonância magnética e raio-X
- Análise de dados sísmicos
- Mercado financeiro
- Controle e instrumentação
- Cálculo
- Dinâmica de escoamentos e turbulência
- Astronomia
- Etc... (*On Applications of Wavelets in Engineering and Technology, 2015)*

Aplicações

- Observa-se que as aplicações da técnica são inúmeras.
- As vantagens na compactação de dados não são observadas na análise da transformada contínua, mas ficam evidentes na transformação discreta.

Exercícios

- Revisão sobre aplicação de wavelets no tema de estudo de cada aluno
- Análise wavelet de um sinal do tipo chirp (parâmetros de análise e de geração ficam a cargo de cada aluno).