- Para a medição de sinais dinâmicos, é necessário avaliar como o sensor é capaz de responder a variações da grandeza medida;
- Mesmo no caso de medidas estáticas, o tempo de estabilização das leituras dos sensores é importante para as medições.
- A modelagem matemática é usada para se prever o comportamento dinâmico dos sistemas de medição

SISTEMAS DE ORDEM 0

- Modelo mais básico. Representado pela equação diferencial de ordem 0, do tipo:

$$y = K \cdot f(t)$$

onde K é a sensibilidade e f(t) é o sinal de entrada.

- Sistemas de ordem zero são usados para modelar a resposta de sensores a entradas estáticas (calibração estática).

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Sensores com capacidade acumulativa ou dissipativa não são capazes de responder imediatamente a variações na entrada. Este tipo de sistema pode ser modelado usando uma equação diferencial de primeira ordem, da forma:

$$\tau\dot{y} + y = K \cdot f(t)$$

onde τ é a constante de tempo do sistema e $\dot{y}$ é a derivada de y em relação ao tempo (dy/dt).

- Normalmente, para se analisar a resposta de um sistema a uma variação na entrada aplica-se uma função do tipo degrau ou uma função periódica.

- Aplicando-se uma perturbação do tipo degrau, do tipo f(t)= A, para t>0 e dando uma condição inicial ao sistema $y(t=0)=y_0$, temos que:

$$\tau\dot{y} + y = KA \Rightarrow \dot{y} + \frac{y}{\tau} = \frac{KA}{\tau}$$

Equação linear de 1ª ordem. Permite solução por fatores integrantes

SISTEMAS DE ORDEM 1

$$\tau\dot{y} + y = KA \Rightarrow \dot{y} + \frac{y}{\tau} = \frac{KA}{\tau}$$

Equação linear de 1ª ordem. Permite solução por fatores integrantes.

Para permitir a integração da equação, o fator *μ(t)* deve satisfazer a condição:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)h(t)y = \frac{d}{dt}[\mu(t)y]$$

- Na eq. acima h(t)= *1/τ*
- Resolvendo a equação tem-se $\mu(t)=e^{t/\tau}$.
- Substituindo na eq. do sistema e integrando:
-

$$e^{t/\tau}y = \int \frac{KAe^{t/\tau}}{\tau}dt + C \Rightarrow y = KA + Ce^{-t/\tau}$$

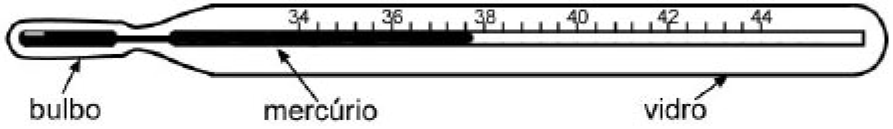
Aplicando-se a condição inicial $y(t=0)=y_0$: $C = y_0 - KA$

- Logo:

$$\boxed{y = KA + (y_0 - KA)e^{-t/\tau}}$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- **Ex.: Termômetro de bulbo**



SISTEMAS DE ORDEM 1

- **Ex.: Termômetro de bulbo**

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}$$

- Armazenamento de energia com a variação de temperatura do bulbo:

$$\frac{dE}{dt} = mc_v \frac{dT}{dt}$$

- Troca de energia com o ambiente:

$$\dot{Q} = hA_B \Delta T = hA_B \left(T_\infty - T\right)$$

- De acordo com a 1ª lei da termodinâmica temos:

$$mc_v \frac{dT}{dt} = hA_B \left(T_\infty - T\right)$$

- Reorganizando temos:

$$\frac{mc_v}{hA_B} \frac{dT}{dt} + T = T_\infty$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- **Ex.: Termômetro de bulbo**
- Definindo o coeficiente de expansão volumétrica como: $\alpha = \left(dV/V\right)/dT$
- Para o caso do termômetro (cilindro), onde L é a leitura do sensor
- $$dV = A_S dL$$
- Substituindo: $A_S dL/V = dT\alpha;\ dL = \alpha V / A_S dT$
- Integrando-se e assumindo L=0 para T=0, tem-se:

$$L = \frac{m\alpha}{\rho A_S} T, \quad \text{onde} \quad V = \frac{m}{\rho}$$

- Substituindo na eq. do termômetro: $\frac{mc_v \rho A_S}{hA_B m\alpha}\frac{dL}{dt} + \frac{\rho A_S}{m\alpha} L = T_\infty$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- **Ex.: Termômetro de bulbo**
- Agrupando os coeficientes, podemos reescrever a eq. como:

$$\frac{mc_v}{hA_B}\frac{dL}{dt}+L=\frac{m\alpha}{\rho A_S}T_\infty; \quad ou$$

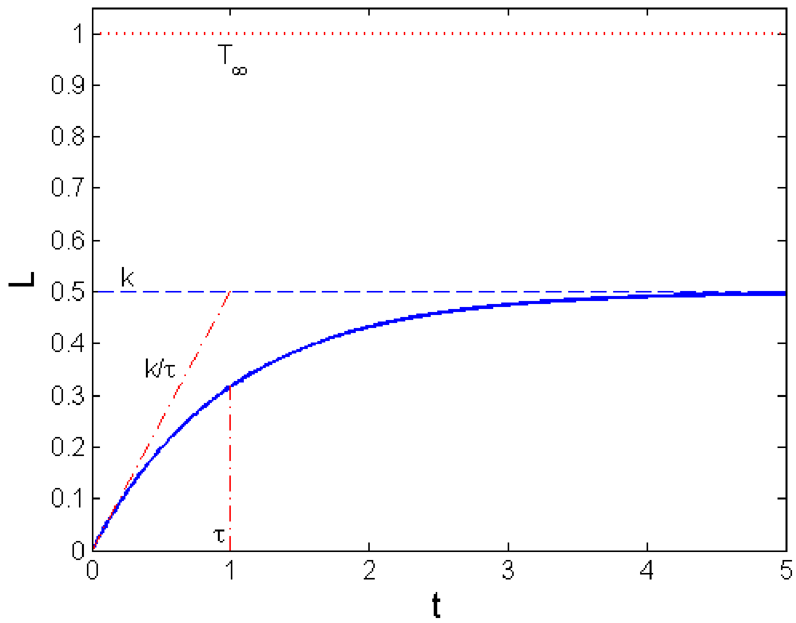
$$\tau\frac{dL}{dt}+L=KT_\infty$$

Similar ao modelo geral de 1ª ordem

- Onde: $\tau=\dfrac{mc_v}{hA_B}; \qquad K=\dfrac{m\alpha}{\rho A_S}$
- Admite a mesma solução geral: $y=K\cdot A+\left(y_0-KA\right)e^{-t/\tau}$
- No caso do termômetro fica: $L=K\cdot T_\infty+\left(L_0-KT_\infty\right)e^{-t/\tau}$

SISTEMAS DE ORDEM 1

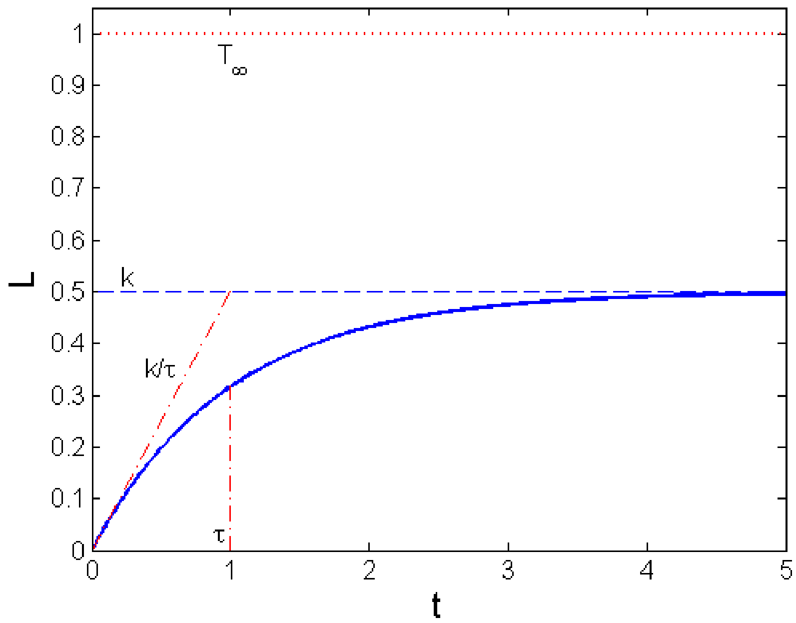
- **Ex.: Termômetro de bulbo** $L = K \cdot T_\infty + \left(L_0 - KT_\infty\right)e^{-t/\tau}$



- Para tempos longos, L se aproxima de K. Portanto, K, é a sensibilidade do instrumento
- A velocidade com que o termômetro responde à entrada depende da tangente inicial da curva de resposta (K/ τ).

SISTEMAS DE ORDEM 1

- **Ex.: Termômetro de bulbo** $L = K \cdot T_\infty + (L_0 - KT_\infty)e^{-t/\tau}$



- Como k ∝ 1/A_S, uma diminuição na área do tubo do termômetro causa um aumento da sua sensibilidade.
- Já $\tau \propto 1/A_b$, indicando que uma maior área do bulbo em contato com o meio reduzirá o tempo de resposta do termômetro

SISTEMAS DE ORDEM 1

Avaliando comportamento a partir de uma perturbação do tipo senoidal.

$$\tau\dot{y} + y = KAsen(\omega t) \Rightarrow \dot{y} + \frac{y}{\tau} = \frac{KAsen(\omega t)}{\tau}$$

Equação linear de 1ª ordem. Permite solução por fatores integrantes.

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)h(t)y = \frac{d}{dt}[\mu(t)y]$$

- Na eq. acima h(t)= *1/τ.* Resolvendo a equação tem-se $\mu(t)=e^{t/\tau}$.
- Substituindo na eq. do sistema:
-

$$e^{t/\tau}y = \int \frac{KAsen(\omega t)e^{t/\tau}}{\tau}dt + C \Rightarrow y = \frac{KA}{\tau e^{t/\tau}}\int sen(\omega t)e^{t/\tau}dt + Ce^{-t/\tau}$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Usando a integração por partes:

$$I = uv - \int v du$$

- Onde:

$$u = sen(\omega t); \qquad dv = e^{t/\tau} dt$$

$$du = \omega \cos(\omega t); \quad v = \tau e^{t/\tau}$$

- Obtêm-se na 1ª iteração:

-

$$I = \tau sen(\omega t) e^{t/\tau} - \int \tau\omega \cos(\omega t) e^{t/\tau} dt$$

- Na 2ª iteração:

$$J = \tau^2 \omega \cos(\omega t) e^{t/\tau} + \tau^2 \omega^2 \int sen(\omega t) e^{t/\tau} dt = \tau^2 \omega sen(\omega t) e^{t/\tau} + \tau^2 \omega^2 I$$

- Assim:

$$I\left(1 + \tau^2 \omega^2\right) = \tau sen(\omega t) e^{t/\tau} - \tau^2 \omega \cos(\omega t) e^{t/\tau}$$

SISTEMAS DE ORDEM 1

- Substituindo I na equação da perturbação:
- $$L = \frac{KA}{1+\tau^2\omega^2}\left[sen(\omega t) - \tau\omega\cos(\omega t)\right] + Ce^{-t/\tau}$$
- Rearranjando usando a relação:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\left[sen(\omega t) - \tau\omega\cos(\omega t)\right] = sen\left(\omega t - \tan^{-1}(\omega\tau)\right)$$

- E substituindo na equação da perturbação, temos:

$$\boxed{L = \frac{KA}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\left[sen\left(\omega t - \tan^{-1}(\tau\omega)\right)\right] + Ce^{-t/\tau}}$$

- O 1º termo do lado direito da equação se refere a solução periódica em regime permanente.
- Já o termo que contém a constante C depende das condições iniciais do problema. Esse termo se refere a parte transiente da solução

SISTEMAS DE ORDEM 1

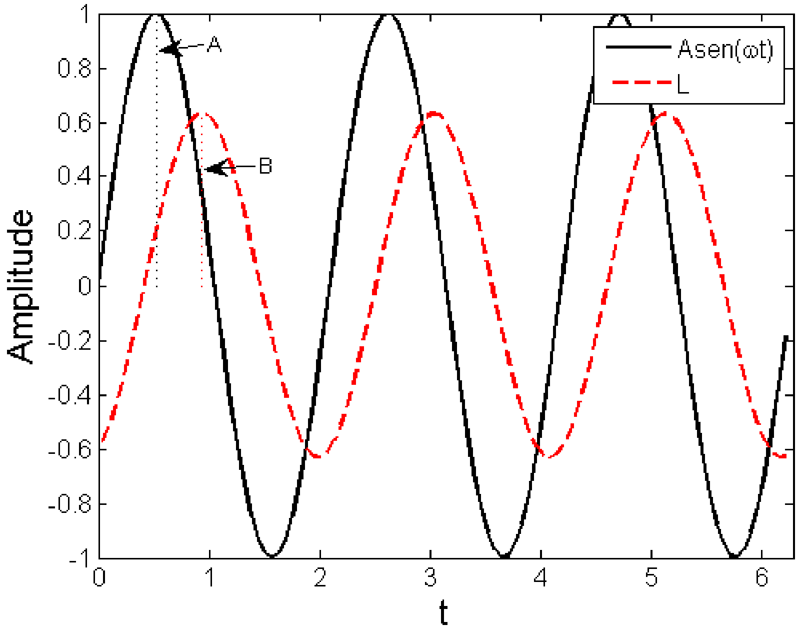
- Para facilitar a análise vamos analisar o sistema em regime permanente e reescrever a eq. em função de um termo de amplitude e outro de fase:

$$L = B(\tau\omega)[sen(\omega t + \phi(\omega\tau))]$$

- Onde:

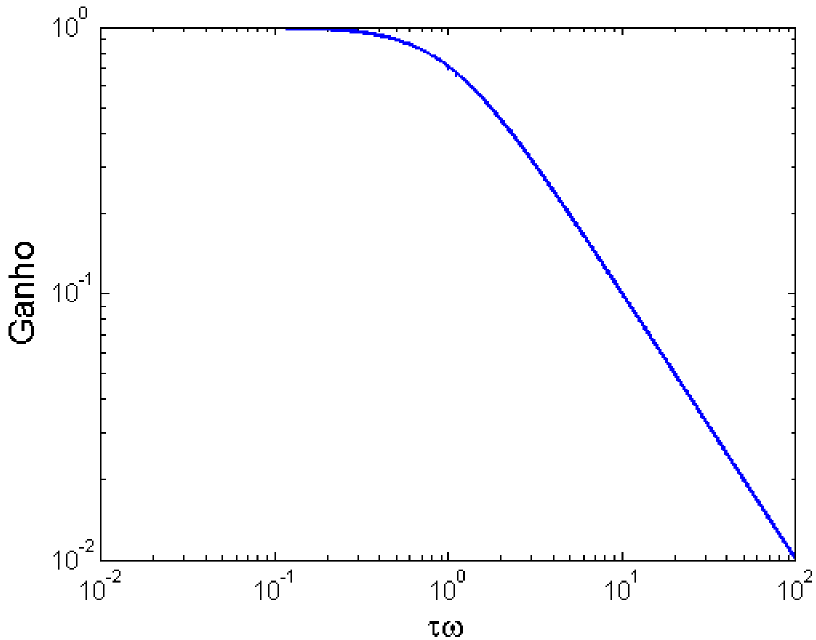
$$B(\tau\omega) = \frac{KA}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \qquad \phi(\tau\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

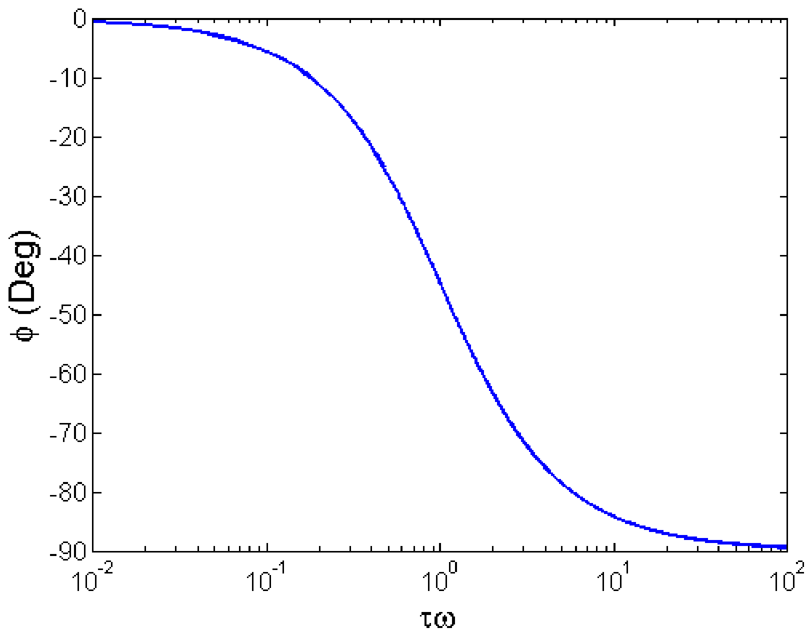
- Analisando a leitura do instrumento em relação a perturbação periódica



SISTEMAS DE ORDEM 1

- Analisando a variação do ganho G=B/KA e o atraso de fase com a freqüência





- Um instrumento ideal deveria ter Ganho=1 e atraso de fase nulo. Isso só ocorre para baixas freqüências. Logo, o instrumento só é adequado para utilização em frequências onde a resposta é próxima da ideal (Ganho > -3dB ou 0.707 vezes o valor original)

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Sensores com capacidade acumulativa/dissipativa e inércia também não são capazes de responder imediatamente a variações na entrada. Este tipo de sistema pode ser modelado usando uma equação diferencial de 2ª. ordem, da forma:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t)$$

onde os coeficientes *a0,a1,a2* são parâmetros físicos usados para descrever o sistema. Para facilitar o entendimento do problema, a eq. é reescrita na forma:

$$\frac{1}{{\omega_n}^2}\ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{y} + y = K \cdot f(t)$$

Onde:

$\omega_n = \sqrt{a_0 / a_2}$; frequência natural do sistema

$\zeta = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$; razão de amortecimento do sistema

SISTEMAS DE ORDEM 2

- A solução da EDO não homogênea é dada pela princípio da superposição→ solução da EDO homogênea + solução particular

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

- A solução da EDO homogênea fica:

$$\frac{1}{\omega_n^{\ 2}}\ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{y} + y = 0$$

- A eq. possui coeficientes constantes. Assim a eq. característica fica:

$$\frac{1}{\omega_n^{\ 2}}\lambda^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}\lambda + 1 = 0$$

- A solução dessa eq. fica: $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

- Dependendo do valor de ζ, três formas de solução são possíveis:

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Dependendo do valor de ζ, três formas de solução são possíveis:
  - p/ ζ >1 (sistema superamortecido):

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

  - p/ ζ =1 (sistema criticamente amortecido)
  -

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$$

  - p/ 0 < ζ <1 (sistema subamortecido). Nesse caso as raízes contém parte real e imaginária $\lambda = \lambda_{real} + i\lambda_{imag}$, e a solução geral é da forma:

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_{real} t} \cos(\lambda_{imag} t) + C_2 e^{\lambda_{real} t} sen(\lambda_{imag} t)$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Resolvendo p/ o caso 0< ζ <1 (sistema subamortecido):
  - Solução particular: $y_P(t) = KA; \quad \dot{y}_P(t) = 0; \quad \ddot{y}_P(t) = 0;$
  - Logo y(t) fica (particular +homogênea):
  - $$\boxed{y(t) = KA + C_1 e^{\lambda_{real} t} \cos(\lambda_{imag} t) + C_2 e^{\lambda_{real} t} sen(\lambda_{imag} t)}$$
  - Assumindo as seguintes condições iniciais

$$(1)\; y(t=0) = 0; \quad (2)\; \dot{y}(t=0) = 0;$$

  - Substituindo (1) na eq. de y(t)

$$0 = KA + C_1 e^{\lambda_{real} 0} \cos(\lambda_{imag} 0) + C_2 e^{\lambda_{real} 0} sen(\lambda_{imag} 0)$$

$$C_1 = -KA$$

  - Substituindo (2) e C_1

$$C_2 = \frac{KA\lambda_{real}}{\lambda_{imag}}$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Resolvendo p/ o caso 0< ζ <1 (sistema subamortecido):

  - Logo y(t) fica:

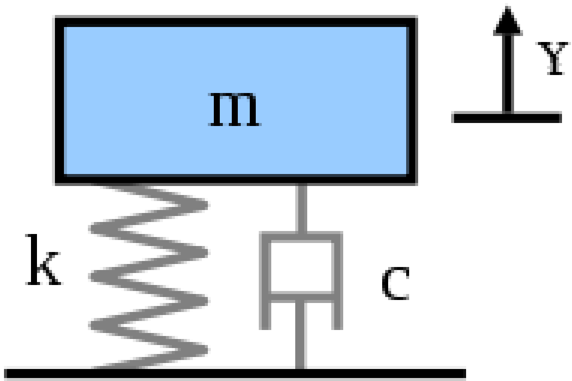
$$y(t) = KA - KAe^{\lambda_{real}t}\cos(\lambda_{imag}t) - \frac{KA\lambda_{real}}{\lambda_{imag}}e^{\lambda_{real}t}sen(\lambda_{imag}t)$$

  - como $\lambda_{real} = -\zeta\omega_n; \qquad \lambda_{imag} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\boxed{y(t) = KA - KAe^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right]}$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- **Ex.: Acelerômetro**



- Equação do sistema:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

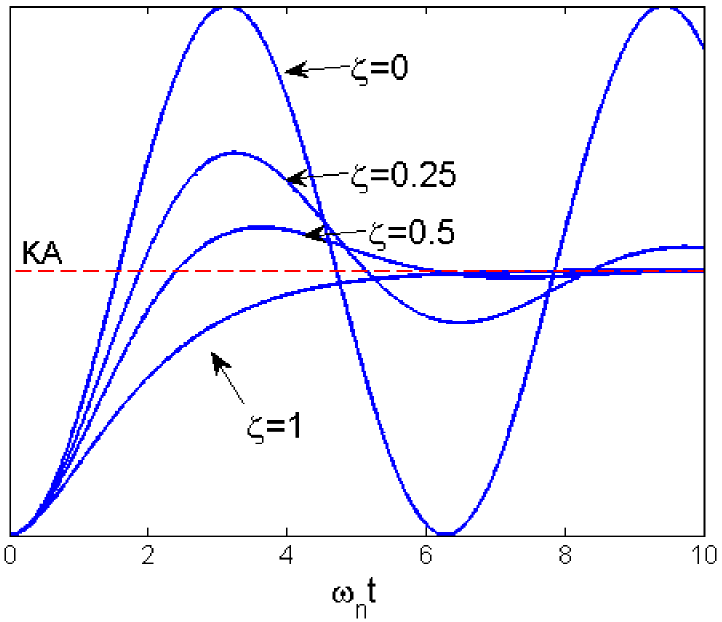
- onde

Eq. idêntica ao caso geral!

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Resposta a perturbação degrau 0< ζ <1 (sistema subamortecido):



- à medida que ζ diminui a resposta tende a oscilar antes de convergir para o resultado. Quando ζ=0 não há convergência.
- O período de oscilação é o inverso de λ_{imag}, que é a freqüência natural amortecida do instrumento.

SISTEMAS DE ORDEM 2

Avaliando comportamento a partir de uma perturbação do tipo senoidal.

$$\frac{1}{\omega_n^{\;2}}\ddot{y}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{y}+y=K\cdot Asen(\omega t)$$

Solução é dada pela eq. homogênea + solução particular.

$$y(t)=y_H+y_P$$

- Depois de algum esforço a obtém-se a solução particular da equação na forma:
-

$$y_P=\frac{KAsen\left[\omega t+\tan^{-1}\left(-\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)\right]}{\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]^2\right\}^{1/2}}$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Para facilitar a análise vamos avaliar o sistema em regime permanente e reescrever a eq. em função de um termo de amplitude e outro de fase:

$$y_P = B(\omega)\left[sen(\omega t + \phi(\omega))\right]$$

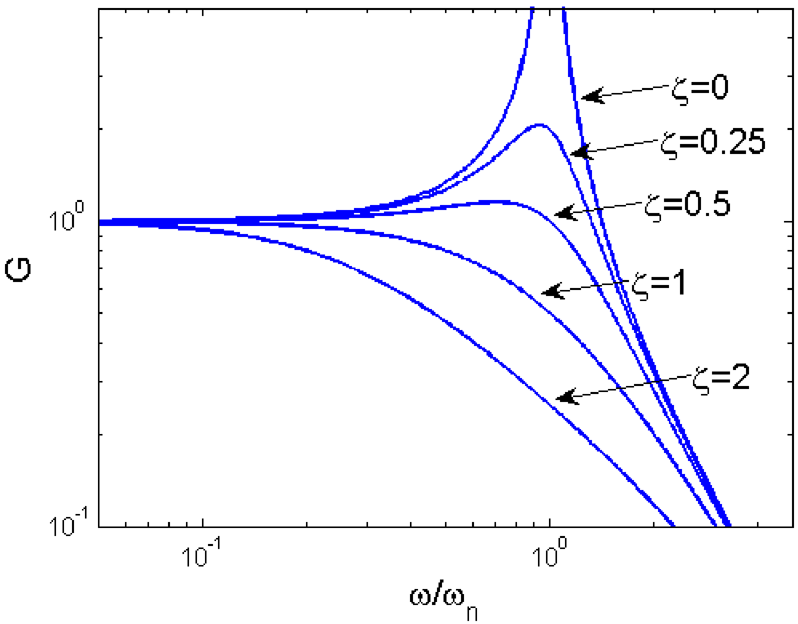
- Onde:

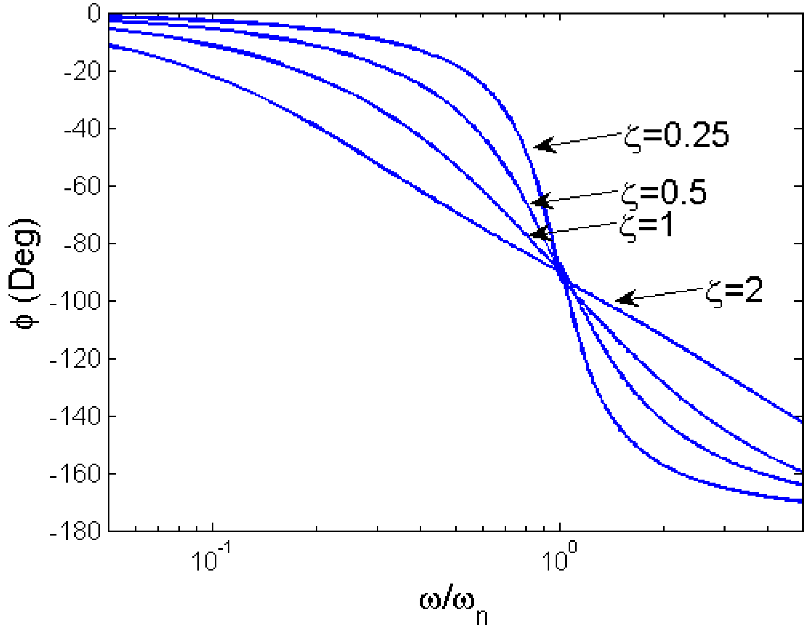
$$B(\omega) = \frac{KA}{\left\{\left[1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\omega/\omega_n\right]^2\right\}^{1/2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)$$

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Analisando a variação do ganho G=B/KA e o atraso de fase com a freqüência

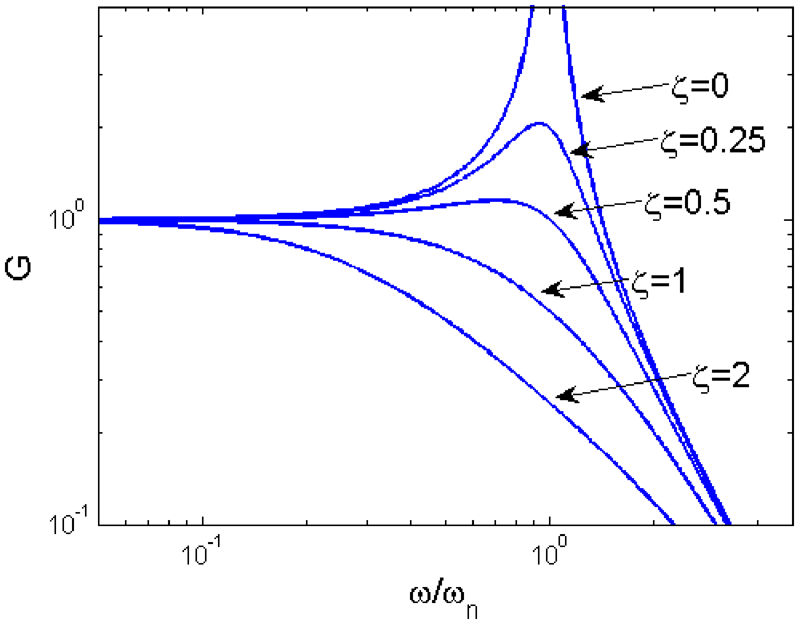


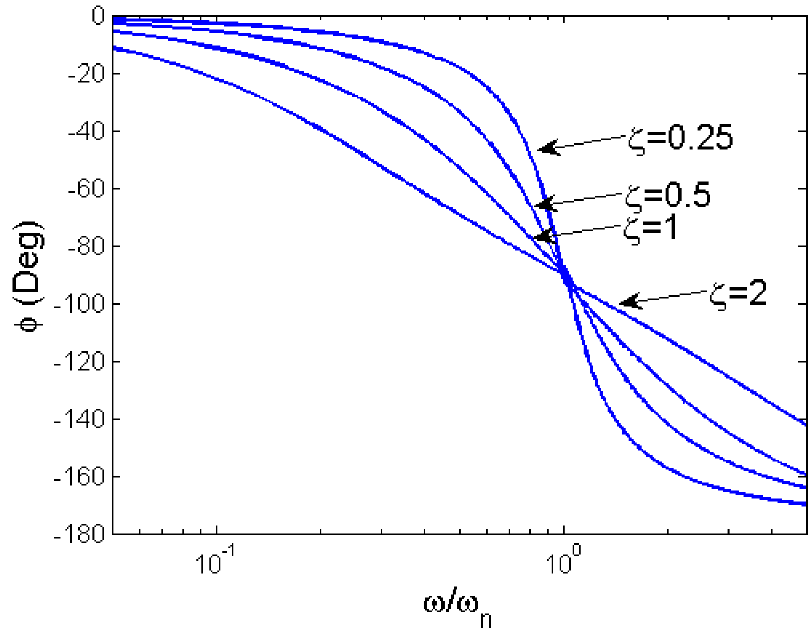


- Somente para frequências de entrada bem baixas ($\omega << \omega_n$), G ≈ 1 e $\varphi \approx 0$ (instrumento ideal).
- Para frequências muito altas ($\omega >> \omega_n$) M tende a zero.

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Analisando a variação do ganho G=B/KA e o atraso de fase com a freqüência

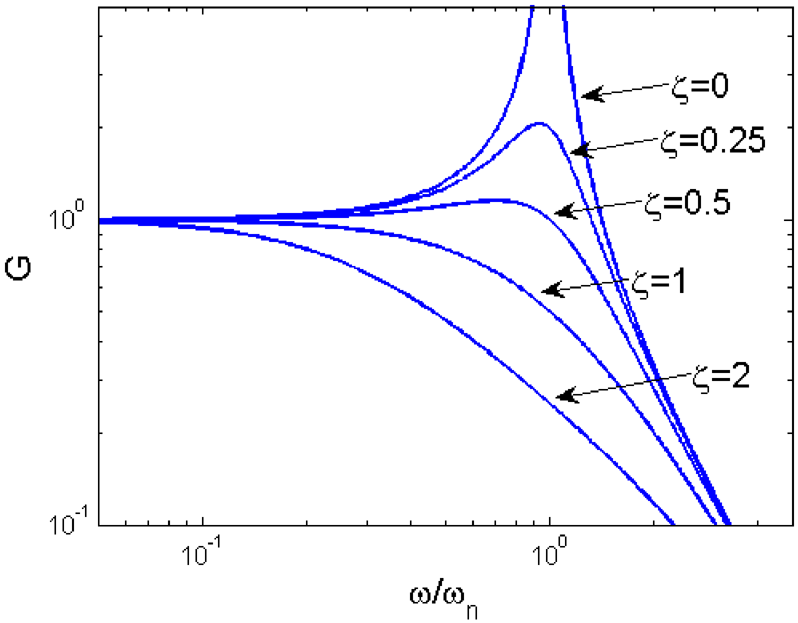


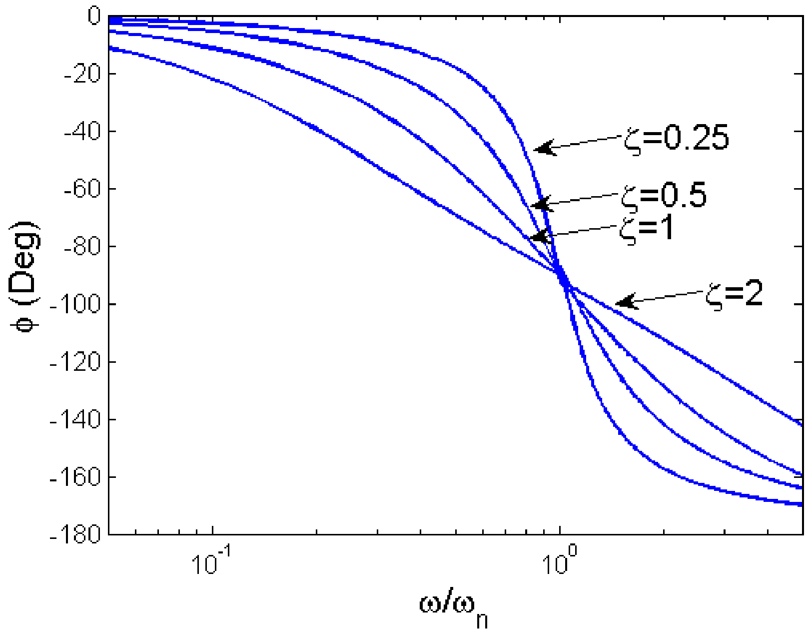


- Para uma resposta adequada o fator de amortecimento deve ficar próximo (um pouco acima) de 0,5. Na figura vê-se que isto fornece uma resposta de amplitude razoavelmente constante na faixa $0 > \omega > \omega_n$.

SISTEMAS DE ORDEM 2

- Analisando a variação do ganho G=B/KA e o atraso de fase com a freqüência





- A frequência natural do instrumento ω_n deve ser pelo menos de 5 a 10 vezes maior que a maior componente de frequência do sinal de entrada.