

ENG1027: Instrumentação Eletrônica



1.6) Caracterização Dinâmica

- ⌘ **Características estáticas:** relacionadas **somente** ao valor **steady-state** das leituras dos instrumentos.
- ⌘ **Características dinâmicas:** descrevem o comportamento do instrumento entre o instante em que a **quantidade medida varia** e o instante em que saída do instrumento efetivamente **atinge o *steady state***.

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ **Características dinâmicas:** indiretamente definem algumas **figuras de mérito** dinâmicas:

- transiente
- resposta em frequência
- tempo de resposta
- overshoot

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Relembrando: Sistemas Lineares Invariantes no Tempo



$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Relembrando: Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

➤ Simplificação: excitação constante $q_i(t) = Au(t)$

➤ Neste caso, a equação reduz-se a:

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Relembrando: Instrumentos de **Ordem Zero**:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = 0$$

➤ A equação reduz-se a:

$$a_o q_o = b_o q_i \quad \therefore \quad q_o = \frac{b_o}{a_o} q_i = K q_i$$

➤ **K = sensibilidade estática**

➤ Exemplo: potenciômetro medidor de posição

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Instrumentos de Primeira Ordem:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = 0$$

➤ A equação reduz-se a:

$$a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i$$

➤ Equação diferencial de primeira ordem!

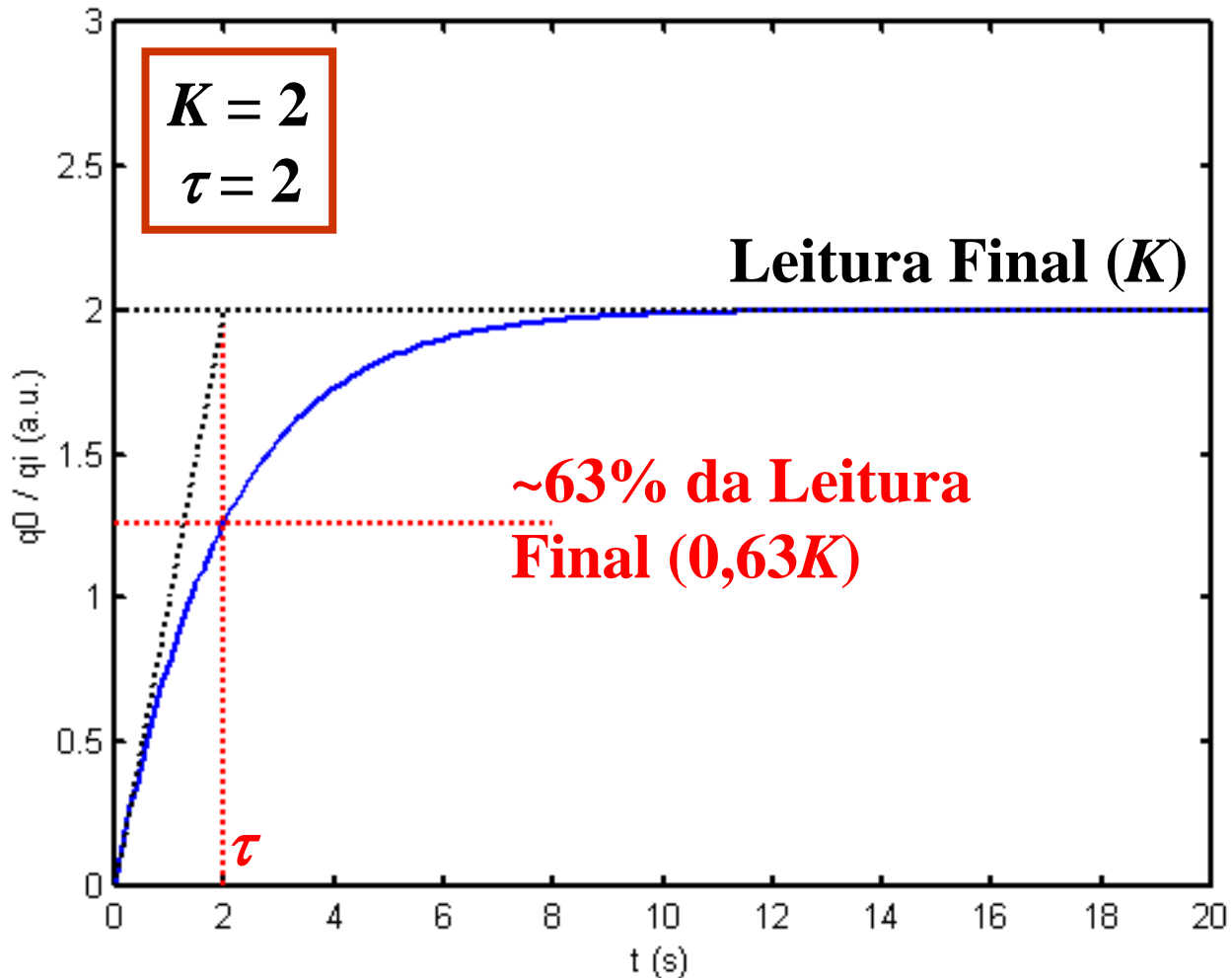
1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Instrumentos de Primeira Ordem:

➤ Solução:
$$q_o(t) = \frac{b_0}{a_0} \left[1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \right] q_i$$

$$q_o(t) = K \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] q_i$$

1.6) Caracterização Dinâmica



1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Instrumentos de Segunda Ordem:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_3 = 0$$

➤ A equação reduz-se a:

$$a_2 \frac{d^2 q_0}{dt^2} + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i$$

➤ Equação diferencial de segunda ordem!

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Instrumentos de Segunda Ordem:

➤ Maioria dos dispositivos/sistemas de medição

➤ K = sensibilidade estática (ganho)

➤ ω_0 = frequência natural

➤ ε = fator de amortecimento

$$K = \frac{b_0}{a_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{a_1}{\sqrt{a_0 a_2}}$$

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Instrumentos de Segunda Ordem:

➤ Solução: $q_o(t) = K \left[1 - c_0 e^{p_0 t} - c_1 e^{p_1 t} \right] q_i, p_0 \neq p_1$

$$q_o(t) = K \left[1 - c_0 e^{p_0 t} - c_1 t e^{p_1 t} \right] q_i, p_0 = p_1$$

$$p_0 = -\omega_0 \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)$$

$$p_1 = -\omega_0 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)$$

1.6) Caracterização Dinâmica

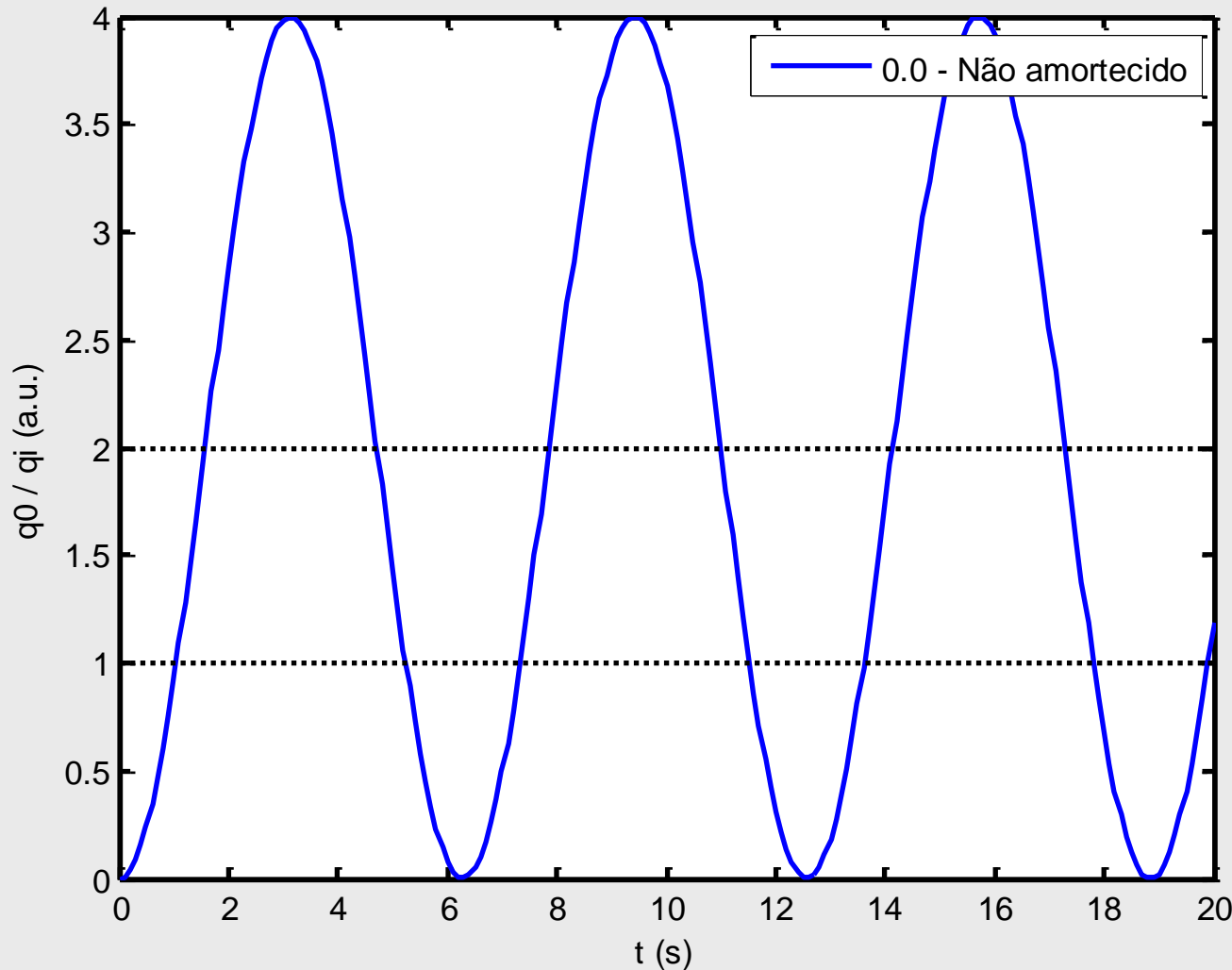
⌘ Instrumentos de Segunda Ordem:

➤ Caso 1: $\varepsilon = 0$

$$p_0 = -\omega_0(0 - \sqrt{0-1}) = i\omega_0$$
$$p_1 = -\omega_0(0 + \sqrt{0-1}) = -i\omega_0$$

$$q_o(t) = K \left[1 - c_0 e^{i\omega_0 t} - c_1 e^{-i\omega_0 t} \right] q_i$$

1.6) Caracterização Dinâmica



$$K = 2$$
$$\omega_0 = 1$$

Leitura
Final (K)

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Instrumentos de Segunda Ordem:

➤ Caso 2: $0 < \varepsilon < 1$

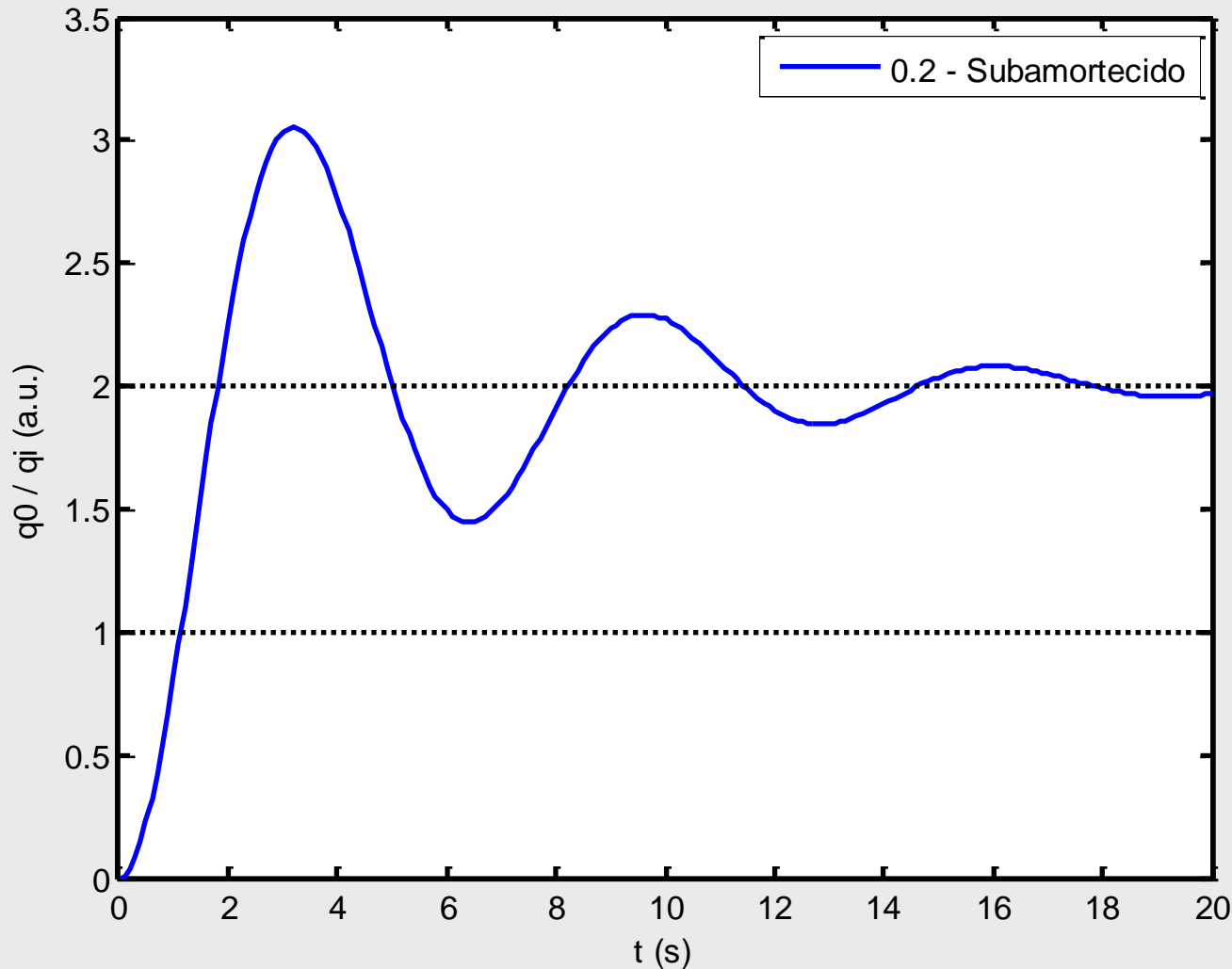
$$\begin{aligned} p_0 &= -\omega_0 \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon - 1} \right) = -\omega_0 (a - ib) \\ p_1 &= -\omega_0 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon - 1} \right) = -\omega_0 (a + ib) \end{aligned}$$

$$q_o(t) = K \left[1 - c_0 e^{-\varpi_0 at} e^{i\varpi_0 bt} - c_1 e^{-\varpi_0 at} e^{-i\varpi_0 bt} \right] q_i$$



$$q_o(t) = K \left[1 - e^{-\varpi_0 at} \left(c_0 e^{i\varpi_0 bt} + c_1 e^{-i\varpi_0 bt} \right) \right] q_i$$

1.6) Caracterização Dinâmica



$$K = 2$$

$$\omega_0 = 1$$

Leitura
Final (K)

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Instrumentos de Segunda Ordem:

➤ Caso 3: $\varepsilon = 1$

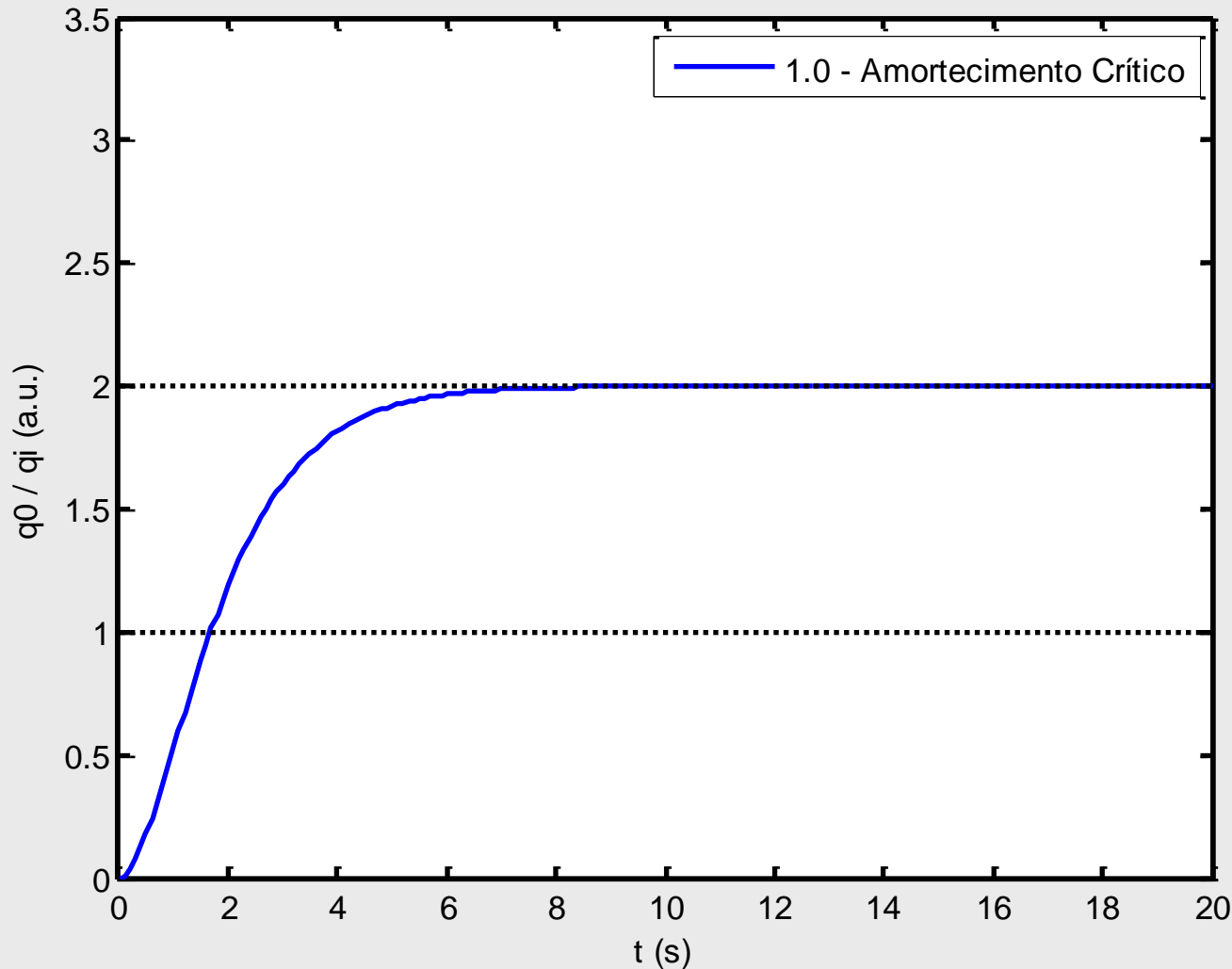
$$p_0 = -\omega_0 \left(1 - \sqrt{1-1}\right) = -\omega_0$$
$$p_1 = -\omega_0 \left(1 + \sqrt{1-1}\right) = -\omega_0 = p_0$$

$$q_o(t) = K \left[1 - c_0 e^{-\omega_0 t} - c_1 t e^{-\omega_0 t} \right] q_i$$



$$q_o(t) = K \left[1 - e^{-\omega_0 t} (c_0 - c_1 t) \right] q_i$$

1.6) Caracterização Dinâmica



$$K = 2$$
$$\omega_0 = 1$$

Leitura
Final (K)

1.6) Caracterização Dinâmica

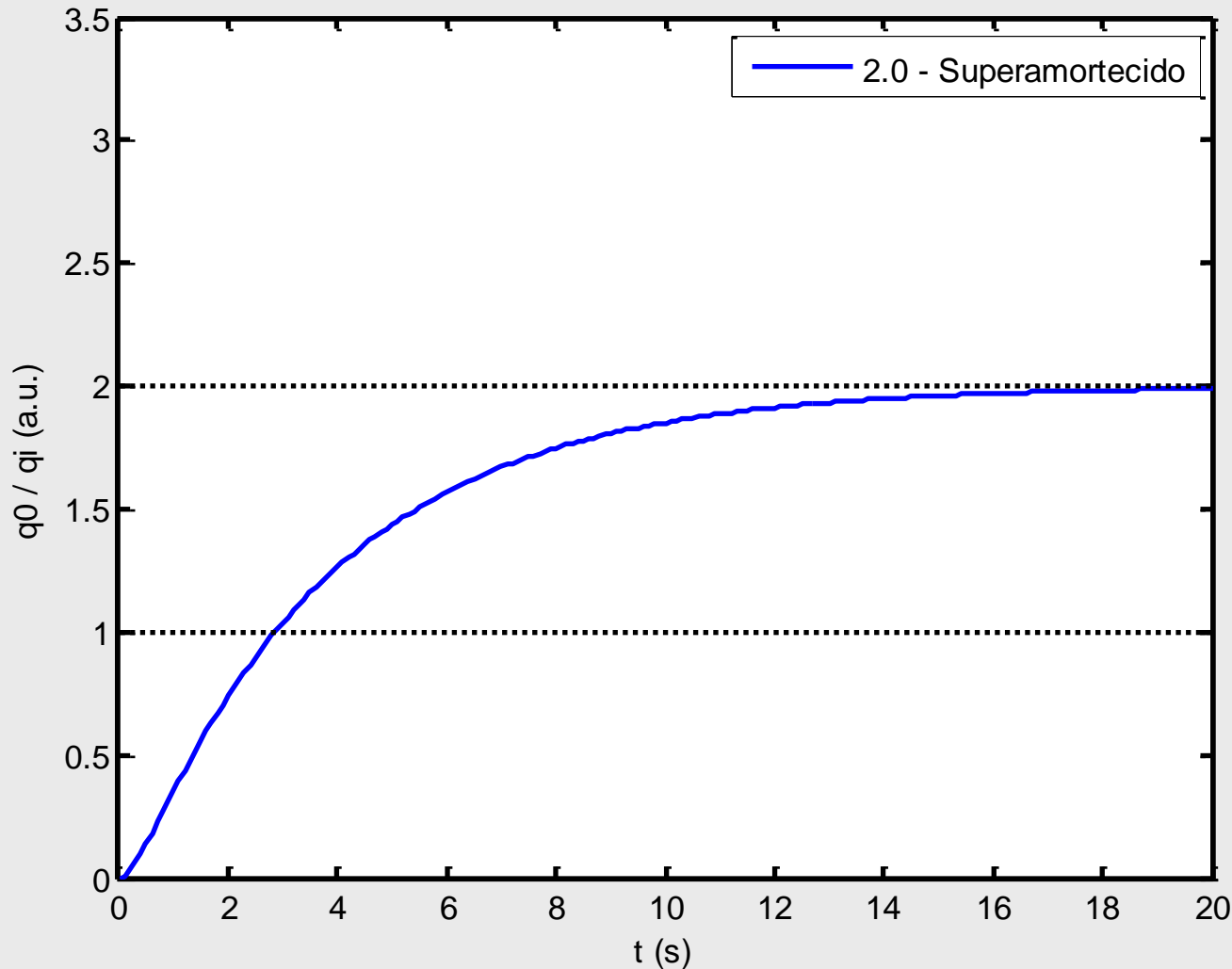
⌘ Instrumentos de Segunda Ordem:

➤ Caso 4: $\varepsilon > 1$

$$p_0 = -\omega_0 \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon - 1} \right) = -\omega_0 a$$
$$p_1 = -\omega_0 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon - 1} \right) = -\omega_0 b$$

$$q_o(t) = K \left[1 - c_0 e^{-\varpi_0 a t} - c_1 e^{-\varpi_0 b t} \right] q_i$$

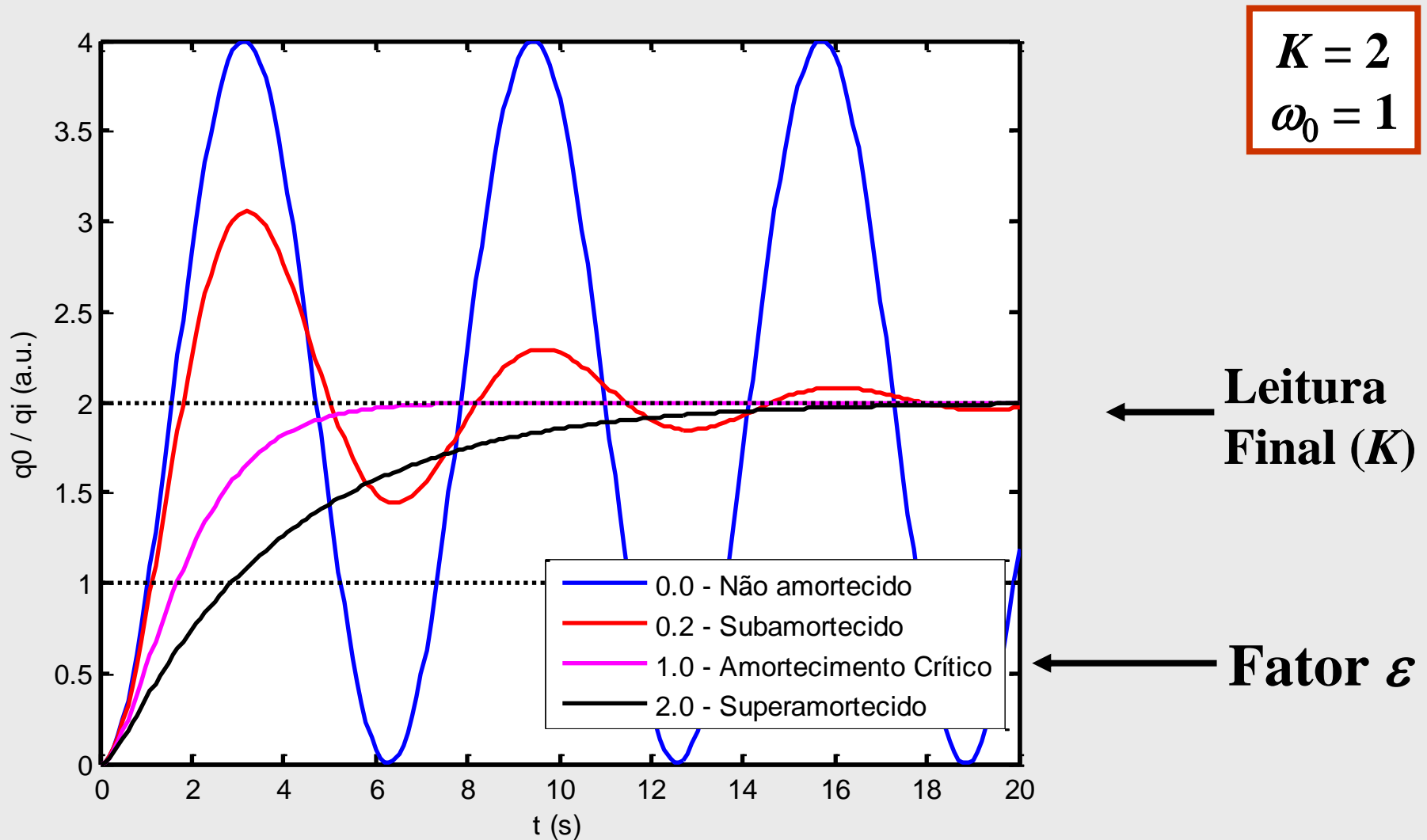
1.6) Caracterização Dinâmica



$$K = 2$$
$$\omega_0 = 1$$

← Leitura Final (K)

1.6) Caracterização Dinâmica



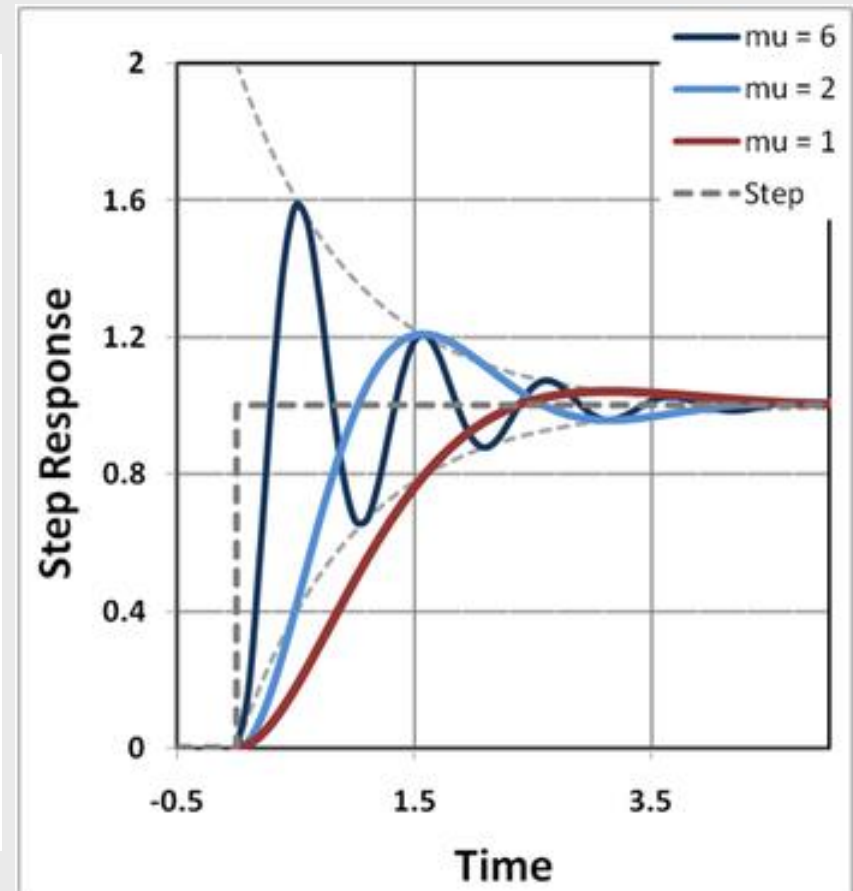
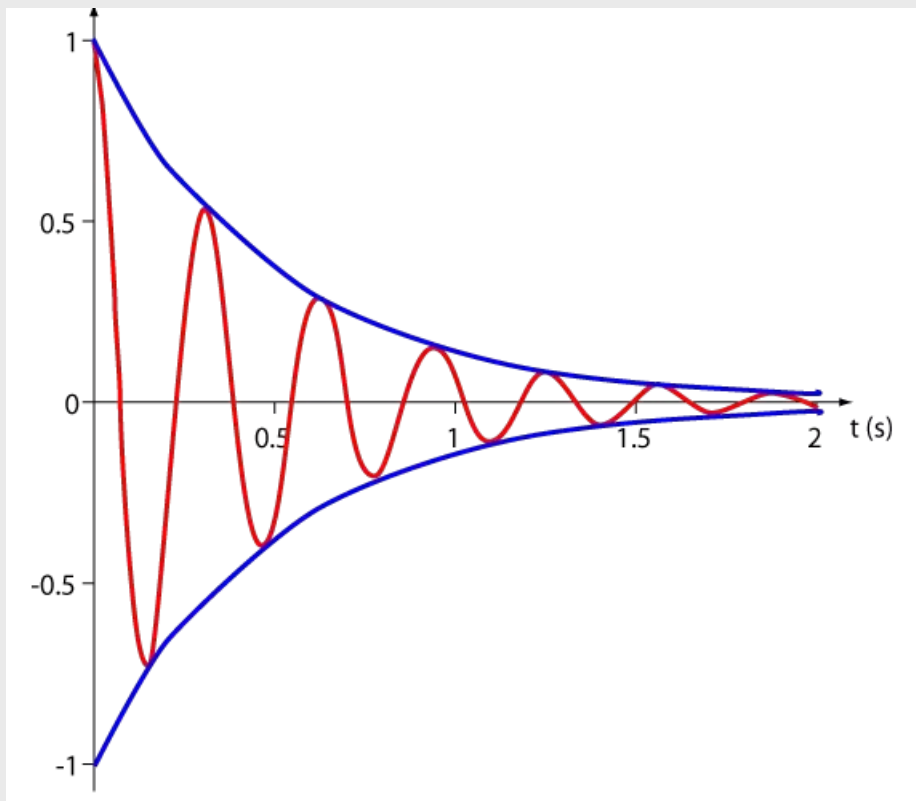
1.6) Caracterização Dinâmica



- ⌘ Tipicamente, a resposta de sensors é obtida por 3 formas:
- ⌘ Resposta ao impulso ou degrau
- ⌘ Varredura de frequências
- ⌘ Perturbação estocástica (ruído rosa – em uma faixa de frequências)

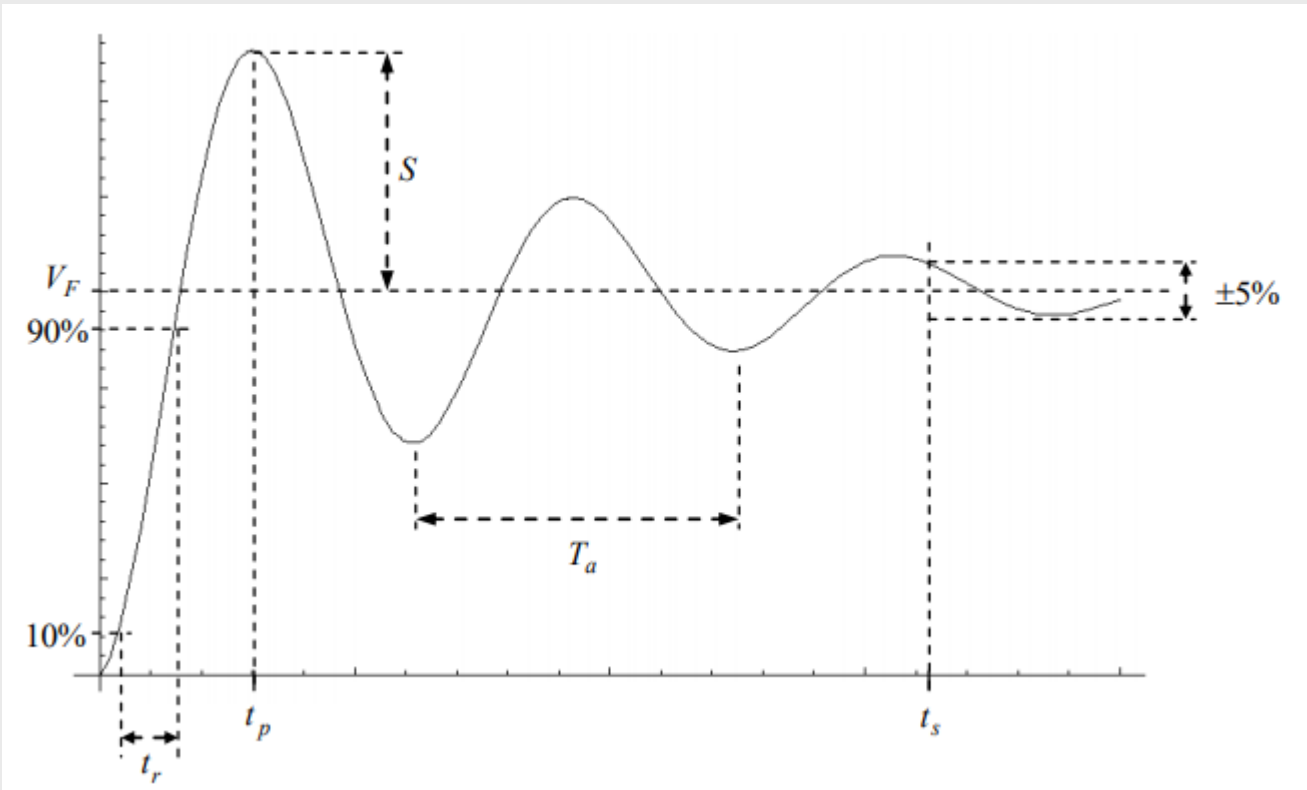
1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Resposta ao impulso ou degrau



1.6) Caracterização Dinâmica

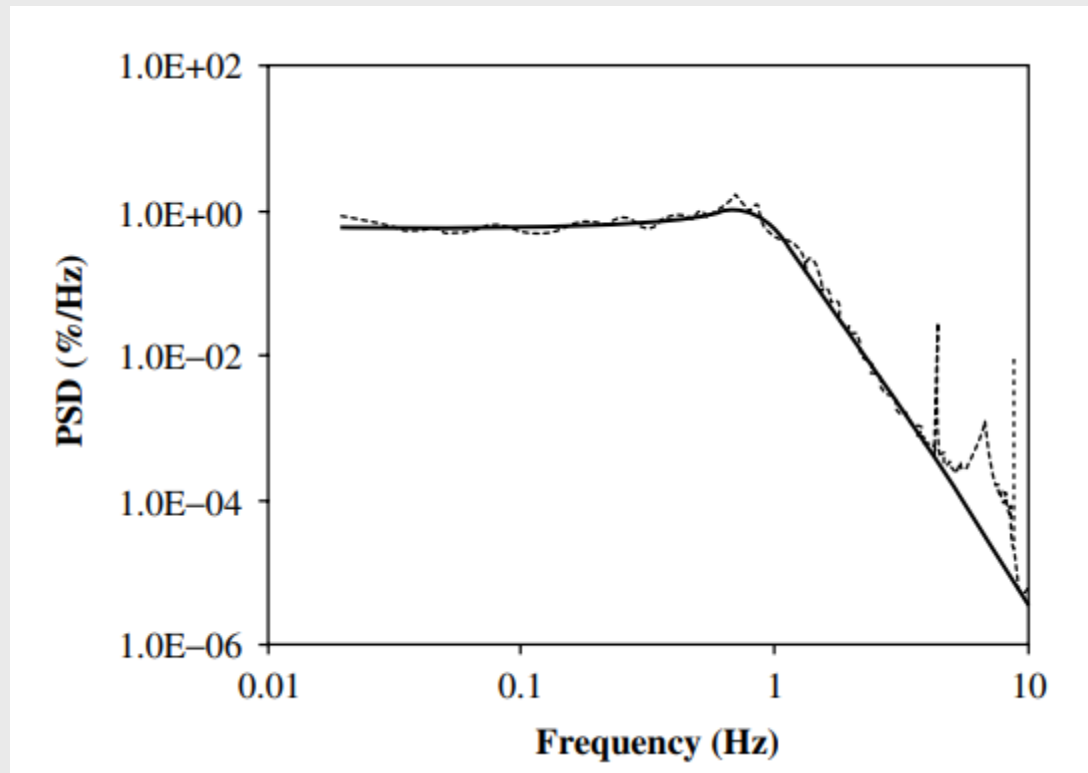
⌘ Resposta ao impulso ou degrau



- Overshoot
- Tempo de estabilização (variação $< 5\%$)
- Frequência natural amortecida ($1/T_a$)

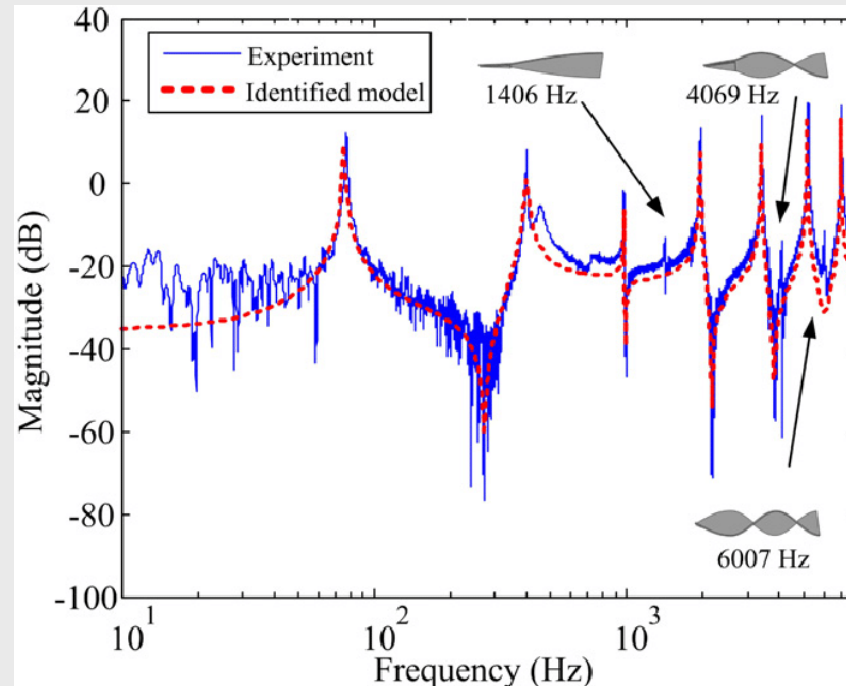
1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Varredura de frequências



1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Perturbação estocástica (ruído rosa – em uma faixa de frequências)



1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Exercício em sala:

- balão meteorológico com instrumentos para medição de altitude e temperatura
- inicialmente ancorado no solo, com medições em *steady state*
- altímetro: ordem zero
- termômetro: primeira ordem, $\tau = 15\text{s}$
- temperatura do solo: $T_0 = 10^\circ\text{C}$

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Exercício em sala :

- temperatura à altitude x : $T_x = T_0 - 0,01 x$
- velocidade de subida = 5 m/s

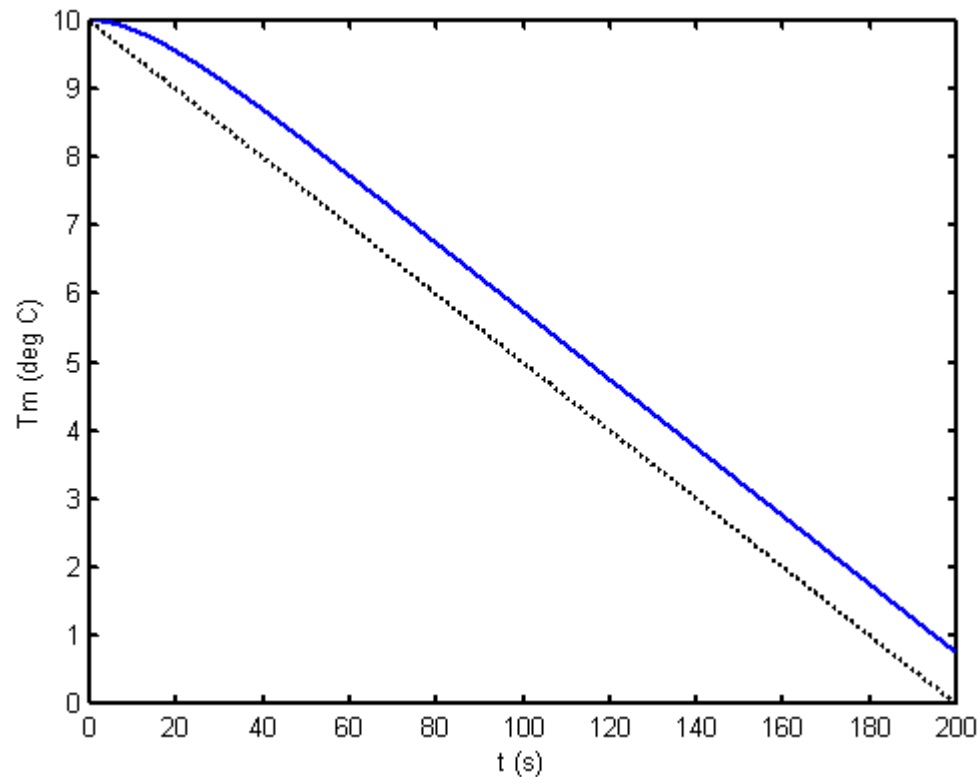
- (a) Encontrar a função de variação de indicação da temperatura com o tempo.
- (b) Expressar a relação de diferença entre valor real e indicado com o tempo
- (c) Para $t \rightarrow \infty$, qual a diferença de temperatura?

1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Exercício em sala :

➤ Solução: $T_m(x) = 10 - 0,75e^{-\frac{t}{15}} - 0,05(t - 15)$

(a)



1.6) Caracterização Dinâmica

⌘ Exercício em sala :

➤ Solução: $t \rightarrow \infty \therefore T_m(x) = 10 - 0,05t + 0,75$

(b) e (c)

