4. MEDIDAS DINÂMICAS – CONCEITOS BÁSICOS

Muitas vezes os experimentos requerem medidas de grandezas físicas que variam com o tempo. Para a correta medição destas grandezas, é necessário conhecer as propriedades dos sinais a serem medidos, assim como as propriedades dos instrumentos de medição utilizados.

4.1 – Natureza dos Sinais não-Permanentes: os sinais não-permanentes expressam a variação temporal da grandeza de interesse e podem ser classificados em periódicos ou não-periódicos.

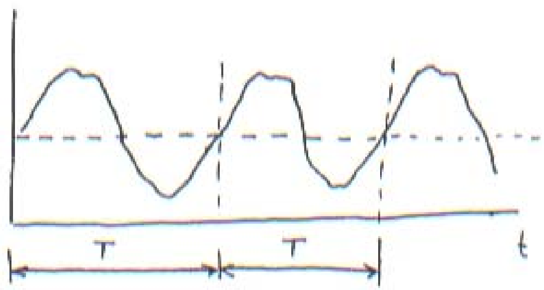

Figura 1: Sinal periódico.

Um caso particular de um sinal periódico é a função harmônica do tipo $S(t) = Asen(2\pi f t)$, onde T é o período e $f = 1/T$ é a freqüência em ciclos por segundo.

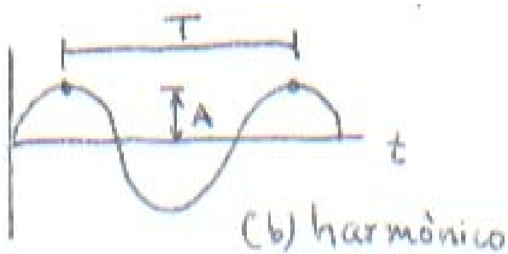

Figura 2: Sinal periódico harmônico

Os sinais podem ser não periódicos, como os dois exemplos mostrados nas figuras abaixo. Na figura 3a o sinal representa, por exemplo, o deslocamento de uma estrutura após receber um impacto. Na figura 3b, o sinal randômico apresentado pode representar, por exemplo, um sinal de velocidade em um escoamento turbulento.

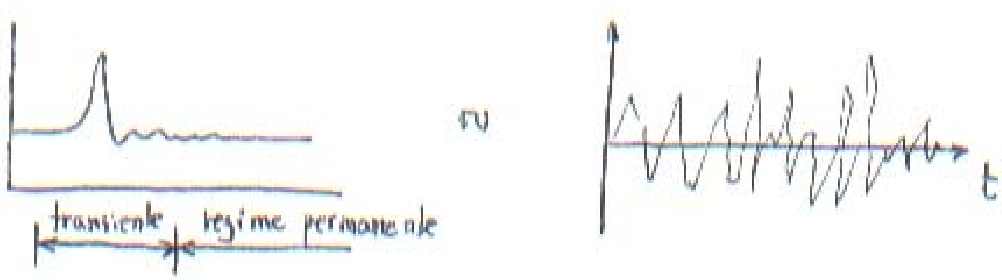

Figura 3: a) sinal não periódico. b) sinal randômico.

Uma das maiores dificuldades na medição de uma grandeza dinâmica é a especificação de um sistema ou instrumento de medição capaz de registrar o sinal adequadamente. Para isso, é necessário um conhecimento do sinal a ser medido.

4.2 – Representação em Séries de Fourier: uma ferramenta poderosa para a análise dos sinais de entrada é a sua representação em soma de funções harmônicas. Pode ser mostrado que um sinal periódico *S(t)* com freqüência circular $\omega = 2\pi/T$, pode ser representado por uma série infinita de senos com freqüências $\omega, 2\omega, 3\omega$, ..., como,

$$S(t) = A_0 + A_1 sen(\omega t + \varphi_1) + A_2 sen(2\omega t + \varphi_2) + A_3 sen(3\omega t + \varphi_3) + ... + A_n sen(n\omega t + \varphi_n)$$

onde A é a amplitude e φ o ângulo de fase. O termo $A_1 sen(\omega t + \varphi_1)$ é o primeiro harmônico pois possui a mesma freqüência do sinal original *S(t)*.

A expansão de Fourier também pode ser escrita como,

$$S(t) = a_1 sen\,\omega t + a_2 sen\,2\omega t + ... + a_n sen\,n\omega t + \frac{b_0}{2} + b_1 \cos\omega t + b_2 \cos 2\omega t + ... + b_n \cos n\omega t$$

onde os valores dos coeficientes são obtidos de

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} S(t) sen(n\omega t) dt\,, \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} S(t) \cos(n\omega t) dt$$

Comparando-se as duas formas, vê-se que A_0 e $b_0/2$ representam o valor médio de *S(t)* durante o ciclo. Pode-se mostrar que

$$A_n = (a_n + b_n)^{1/2} \ \text{ e } \ \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Como exemplo, temos a onda quadrada representada na figura abaixo.

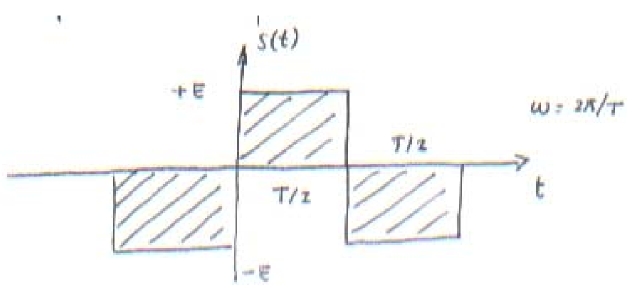

Figura 4: Onda quadrada.

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/\omega} S(t) sen(1\omega t) dt + \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} S(t) sen(1\omega t) dt \right\} = \frac{4\pi}{E}$$

$$a_2 = \frac{\omega}{\pi}\left\{ \int_0^{\pi/\omega} S(t)sen(2\omega t)dt + \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} S(t)sen(2\omega t)dt \right\} = 0$$

$$a_3 = \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{3}\right),\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{5}\right), \text{ etc.}$$

$$b_0 = \frac{\omega}{\pi}\left\{ \int_0^{\pi/\omega} S(t)\cos(0)dt + \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} S(t)\cos(0)dt \right\} = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0, \text{ etc.}$$

a expansão completa fica,

$$S(t) = \frac{4E}{\pi}\left\{ sen\,\omega t + \frac{1}{3}sen3\omega t + \frac{1}{5}sen5\omega t + ... + \frac{1}{n}sen\,n\omega t \right\}, \text{ para } n=1,2,3, ...$$

O espectro de amplitudes pode ser observado na figura abaixo

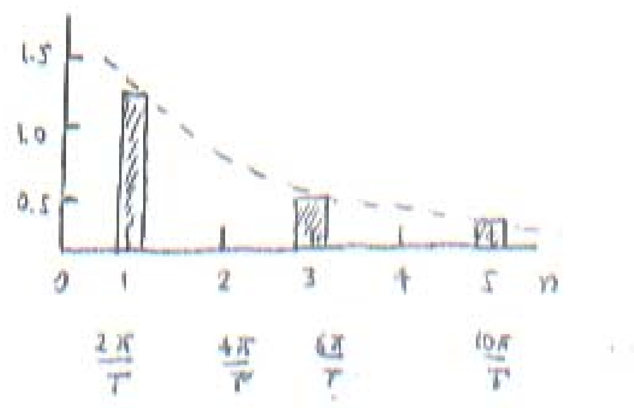

Figura 5: Espectro de amplitudes.

4.3 – Sistema de Primeira Ordem: Vamos agora tentar descrever quantitativamente o instrumento que pretende seguir o sinal dinâmico. Vamos criar um modelo simplificado do instrumento e tentar predizer a saída do instrumento para um sinal de entrada hipotético.

Considere o termômetro de líquido em vidro representado na figura.

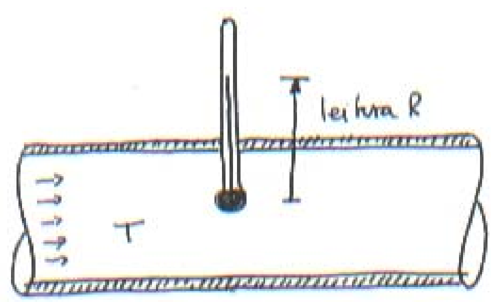

Figura 6: Modelo para instrumento de primeira ordem: termômetro.

Em regime permanente a temperatura do fluido e a leitura são constantes. Quando a temperatura do fluido é aumentada provoca a troca de calor para o fluido no interior do bulbo que se expande alterando a leitura da coluna de líquido. Desprezando-se as trocas de calor por condução e radiação, podemos escrever que o calor trocado por convecção entre o gás e o termômetro é,

$$q = hA_b(T - T_m)$$

onde, A_b é a área do bulbo, T_m a temperatura do fluido termométrico no bulbo e h é o coeficiente de troca de calor convectivo. A primeira lei da termodinâmica fornece,

$$mc\frac{dT_m}{dt} = hA_b(T - T_m) \qquad (1)$$

definindo-se o coeficiente de expansão volumétrica do fluido como $\alpha = \dfrac{dV/V}{dT_m}$. Este coeficiente representa a variação relativa de volume por unidade de variação de temperatura. Mas,

$dV = A_s dR$, onde A_s é a área transversal do tubo do termômetro. Então,

$$\frac{V\alpha}{A_s}dT_m = dR$$

Integrando-se a equação acima, assumindo que $R=0$ para $T=0$, tem-se,

$$R = \frac{m\alpha}{\rho A_s}T_m \quad , \quad \text{onde } V = \frac{m}{\rho} \qquad (2)$$

substituindo-se (2) em (1),

$$\frac{mc\rho A_s}{m\alpha}\frac{dR}{dt} = hA_bT - \frac{h A_b \rho A_s}{m\alpha}R$$

ou,

$$\tau\frac{dR}{dt} + R = kT \,, \qquad \text{com} \quad \tau = \frac{mc}{h A_b} \quad \text{e} \quad k = \frac{m\alpha}{\rho A_s}$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem que fornece R para qualquer variação de T com o tempo. Se aplicarmos um degrau unitário de temperatura em $t=0$, temos, para $R=0$ em $t=0$, a seguinte solução,

$$R = k\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

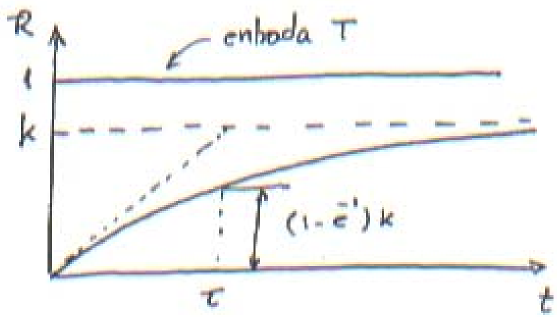

Figura 7: Resposta do termômetro a degrau unitário de temperatura.

Note na figura que representa a solução da equação diferencial para resposta do termômetro que:

- para tempos longos, *R* se aproxima de *k*. Portanto, *k*, é a sensibilidade do instrumento (leitura por entrada unitária)
- a velocidade com que o termômetro responde à entrada depende da tangente inicial da curva de resposta. Então,

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=0} = \frac{k}{\tau}$$

Vemos que τ é inversamente proporcional à velocidade de resposta, τ é a constante de tempo do instrumento e representa o tempo necessário para que a leitura do termômetro atinja a fração $\left(1-e^{-1}\right)$ de sua leitura final.

A sensibilidade *k* e a constante de tempo τ caracterizam o instrumento de primeira ordem. O projeto do termômetro pode ser melhorado alterando-se alguns parâmetros físicos, como por exemplo:

$k \propto \frac{1}{A_s}$, o que mostra que uma diminuição na área do tubo do termômetro aumenta sua sensibilidade. Também, $\tau \propto \frac{1}{A_b}$, indicando que uma maior área do bulbo melhorará a resposta do termômetro.

Outras formas de funções de entrada podem ser usadas para caracterizar a resposta do instrumento (ver *Measurments Systems,* Doebelin). Por exemplo, a resposta à rampa é caracterizada como mostrada na figura,

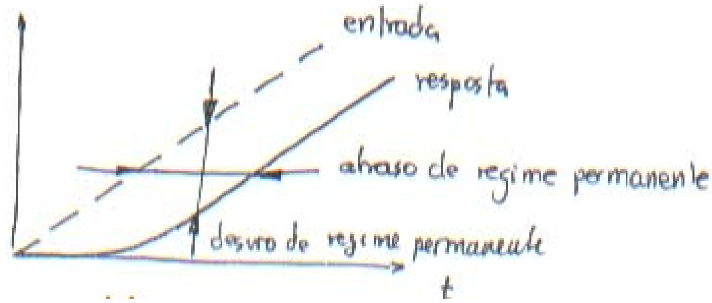

Figura 8: Resposta do termômetro à rampa de temperatura.

4.4 – Sistema de Segunda Ordem: Vamos considerar o exemplo de um galvanômetro elementar.

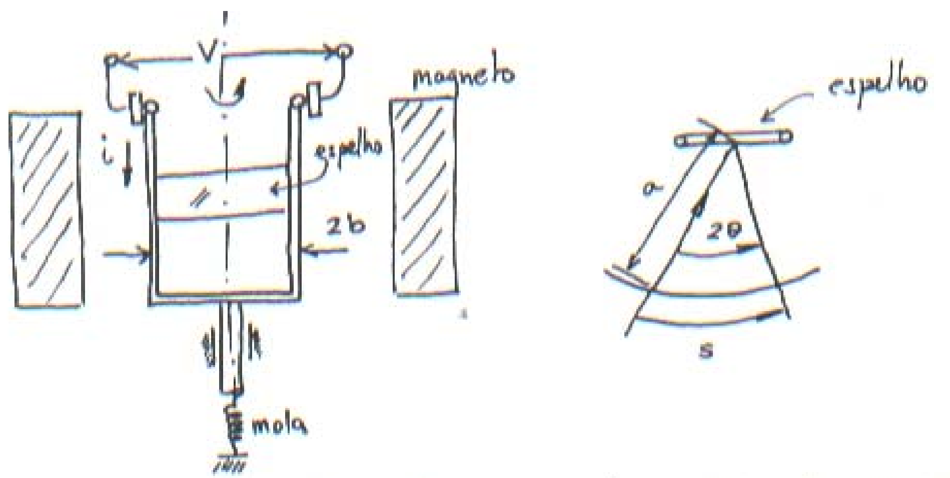

Figura 9: Modelo para instrumento de segunda ordem: galvanômetro

Desejamos usar o galvanômetro para medir *V(t)*. O equacionamento do problema baseia-se no fato que a corrente *i* na bobina, na presença da densidade de fluxo magnético *B*, produz uma força em cada braço igual a:

$$F = \frac{1}{2} BLi$$

onde L é o comprimento do fio da bobina. Para pequenos deslocamentos angulares o torque na bobina é dado por:

$Torque = 2Fb$. Então,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = 2Fb - k\theta ,$$

onde *k* é a constante de mola e *J* é o momento polar de inércia.

Como a bobina se move dentro do campo, uma voltagem V_b induzida vai surgir. Da lei de *Faraday*,

$$V_b = BLb\frac{d\theta}{dt}$$

Ainda, *V-V*$_b$*=Ri* ¸ sendo *R* a resistência elétrica da bobina (indutância e capacitâncias desprezadas).

Finalmente, da geometria do instrumento: *S=2aθ.* Combinando todas as equações, tem-se,

$$\frac{d^2S}{dt^2}+\left[\frac{b^2L^2B^2}{RJ}\right]\frac{dS}{dt}+\left[\frac{k}{J}\right]S=\left[\frac{2abLB}{RJ}\right]V$$

definindo os seguintes parâmetros,

$$K=\frac{2abLB}{kR}\,,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{J}}\quad \text{e}\quad \xi=\frac{b^2L^2B^2}{2R\sqrt{kJ}}$$

A equação fica então,

$$\frac{d^2S}{dt^2}+(2\xi\omega_n)\frac{dS}{dt}+\left(\omega_n^2\right)S=\left(\omega_n^2\,K\right)V$$

Podemos entender o significado físico destes parâmetros aplicando entradas conhecidas *V*, e observando a saída *S.* Por exemplo, para um degrau unitário, *V=1 volt,* aplicado em *t=0,* a leitura *S* é a solução da equação acima (utilizando *S=0* em *t=0* e *dS/dt=0* em *t=0*),

$$S=K\left[1-e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t-sen^{-1}\xi\right)\right]\text{, para } 0<\xi<1$$

A figura a seguir apresenta esta solução de forma esquemática.

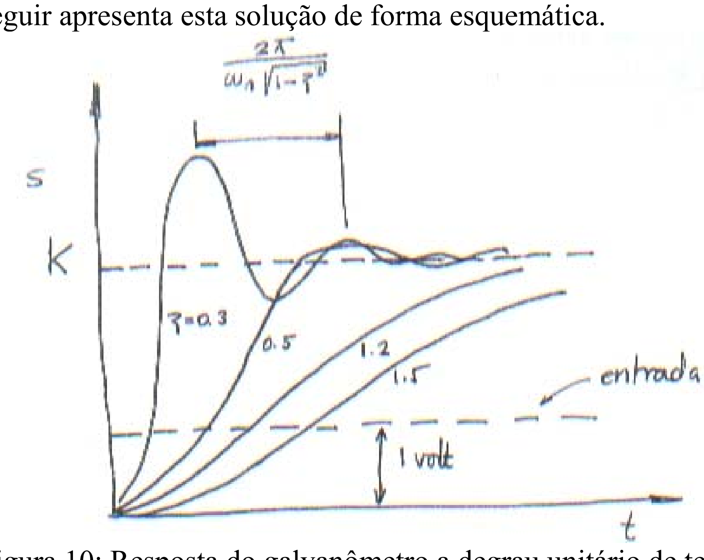

Figura 10: Resposta do galvanômetro a degrau unitário de tensão

Pode-se observar que:

- para todas as curvas, a leitura *S* se aproxima de *K*. Então *K* é a sensibilidade do instrumento (resposta por unidade de entrada).
- à medida que ξ diminui a resposta tende a oscilar antes de convergir para o resultado. No limite quando ξ tende a zero, $S = K(1 - \cos \omega_n t)$. O período de oscilação depende de ω_n, a freqüência natural do instrumento.
- altos valores de ξ tornam o instrumento lento. ξ é o fator de amortecimento. $\xi=1$ é o amortecimento crítico (fronteira entre oscilação e comportamento exponencial)

Quando $\xi \geq 1$ temos super-amortecimento. Quando $\xi < 1$ temos sub-amortecimento. Analisando os parâmetros vemos, por exemplo, que aumentando-se a constante de mola k, reduz-se a sensitividade, aumenta-se a freqüência natural e diminui-se o amortecimento.

4.5 Resposta de Freqüência

A resposta de freqüência de um instrumento é um dado importante sobre seu desempenho. Para analisá-la vamos aplicar um sinal senoidal ao instrumento e analisar sua resposta.

Depois do sinal agir sobre o instrumento por um período longo de tempo, a resposta ficará periódica também, apresentando a mesma freqüência de entrada, porém com diferente amplitude e diferente fase. Caso o instrumento possa ser descrito por equação diferencial linear (instrumento linear) a forma da onda será a mesma do sinal de entrada.

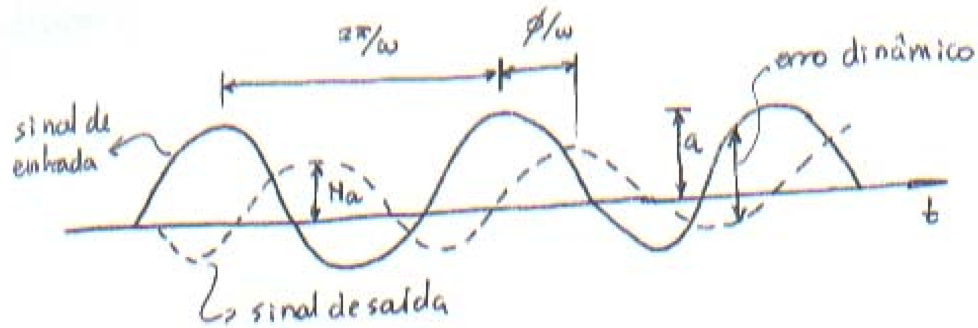

Figura 11: Sinais de entrada e saída senoidais.

O sinal de entrada pode ser descrito como,

$$a \, sen \, \omega t \qquad (1)$$

enquanto a saída é descrita como

$$Ma \, sen(\omega t - \phi) \qquad (2)$$

onde ω é a freqüência circular de entrada, *a* a amplitude entrada e ϕ é o ângulo de fase. Precisamos determinar *M* e ϕ para termos uma descrição da saída para um sinal de entrada com a e ω conhecidos.Pode-se mostrar que M e ϕ dependem somente de ω para instrumentos lineares (e não dependem de a).

Podemos determinar o *quão bem* um instrumento segue a entrada senoidal conhecendo como M e ϕ variam com a freqüência de entrada ω. Isto pode ser feito experimentalmente ou analiticamente, caso conheçamos a equação diferencial que rege o comportamento do instrumento. Estes dados de razão de amplitudes e ângulos de fase são a *resposta de freqüência do instrumento*.

4.6 Resposta de Freqüência – Sistema de Primeira Ordem

Voltando-se ao modelo do termômetro de líquido em vidro cuja equação diferencial é

$$\tau \frac{dR}{dt} + R = kT$$

fazendo-se $T = a\,sen\,\omega t$ e resolvendo-se a equação temos,

$$R = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\,a\,sen\left(\omega t - \tan^{-1}\omega t\right)$$

Comparando-se a equação acima com a equação (2), verificamos que

$$M = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \qquad \text{e} \qquad \phi = \tan^{-1}\omega\tau$$

A figura abaixo mostra a dependência de M e ϕ com a freqüência.

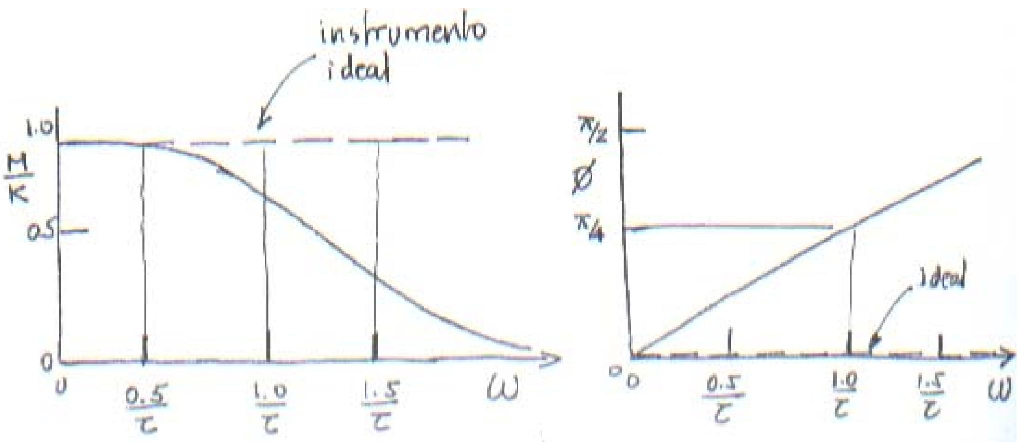

Figura 12: Variação de M e ϕ com a freqüência para instrumento de primeira ordem.

Podemos observar na figura que:

- quando ω é pequeno, $\frac{M}{k}$ é próximo de 1 e $\phi \approx 0$. Isto significa que para baixas freqüências de variação da temperatura do fluido, a leitura do termômetro é k vezes a temperatura do fluido e não há atraso ($\phi \approx 0$) entre os dois sinais (k é a calibração estática ou sensitividade).
- quando a freqüência de variação de T é muito alta, M/k tende a zero, significando que a leitura R não responde à flutuação de temperatura. Por exemplo, um termômetro de bulbo colocado na saída de um motor de combustão.
- para o termômetro perfeito, $M/k = 1$ e $\phi = 0$. Vemos que para τ pequeno nos aproximamos destas condições.

4.7 Resposta de Freqüência – Sistema de Segunda Ordem

A resposta de freqüência de um sistema de segunda ordem pode ser obtida impondo-se uma tensão na forma $V = a\, sen\,\omega t$ na equação diferencial que governa o comportamento do sistema de segunda ordem. A solução obtida fica,

$$S = \frac{\omega_n^2 K}{\left[\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\omega\right)^2\right]^{1/2}}\, a\, sen\left[\omega t - \tan^{-1}\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right]$$

Comparando-se com a equação (2). podemos identificar,

$$M = \frac{\omega_n^2 K}{\left[\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\omega\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \text{e} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

As curvas para M/K e ϕ em função de ω são representadas abaixo,

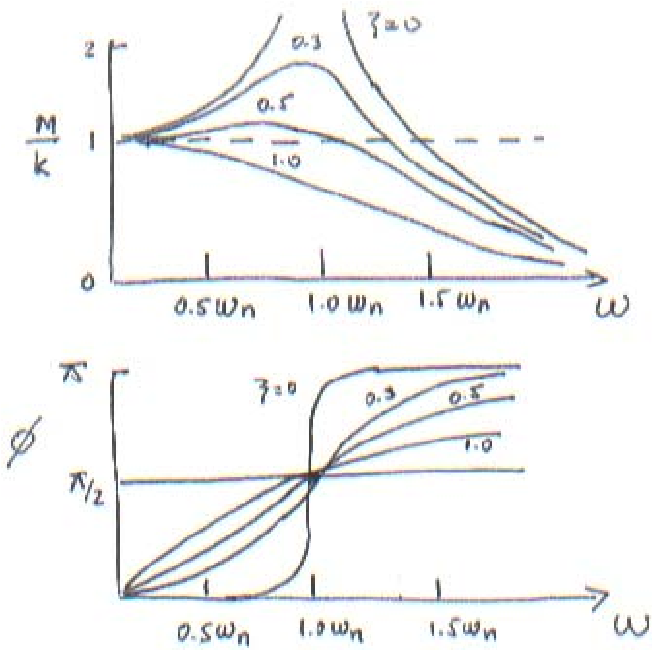

Figura 13: Variação de M e ϕ com a freqüência para instrumento de segunda ordem.

Observando as figuras vemos que:

- para freqüências de entrada bem baixas ($\omega_n << \omega$), $M \approx K$ e $\phi \approx 0$ (instrumento ideal).
- para freqüências muito altas ($\omega >> \omega_n$) M tende a zero.
- nos extremos de ω baixo e alto, ξ não influencia muito.
- quando $\omega \approx \omega_n$, M depende muito de ξ

ξ *e* ω_n são parâmetros importantes no projeto de instrumentos de segunda ordem.

Algumas regras para a escolha de instrumentos:

- o fator de amortecimento deve ficar na faixa $0,5< \xi<0,7$. Na figura vê-se que isto fornece uma resposta de amplitude razoavelmente constante na faixa $0 > \omega > \omega_n$. Ao mesmo tempo, a resposta transiente não tem muito *overshoot*, nem é muito lenta.

- a freqüência natural do instrumento ω_n deve ser pelo menos de 5 a 10 vezes maior que a maior componente de freqüência do sinal de entrada. No instrumento de primeira ordem, $1/\tau$, deve ser pelo menos 5 vezes maior que a mais alta componente de freqüência do sinal de entrada.