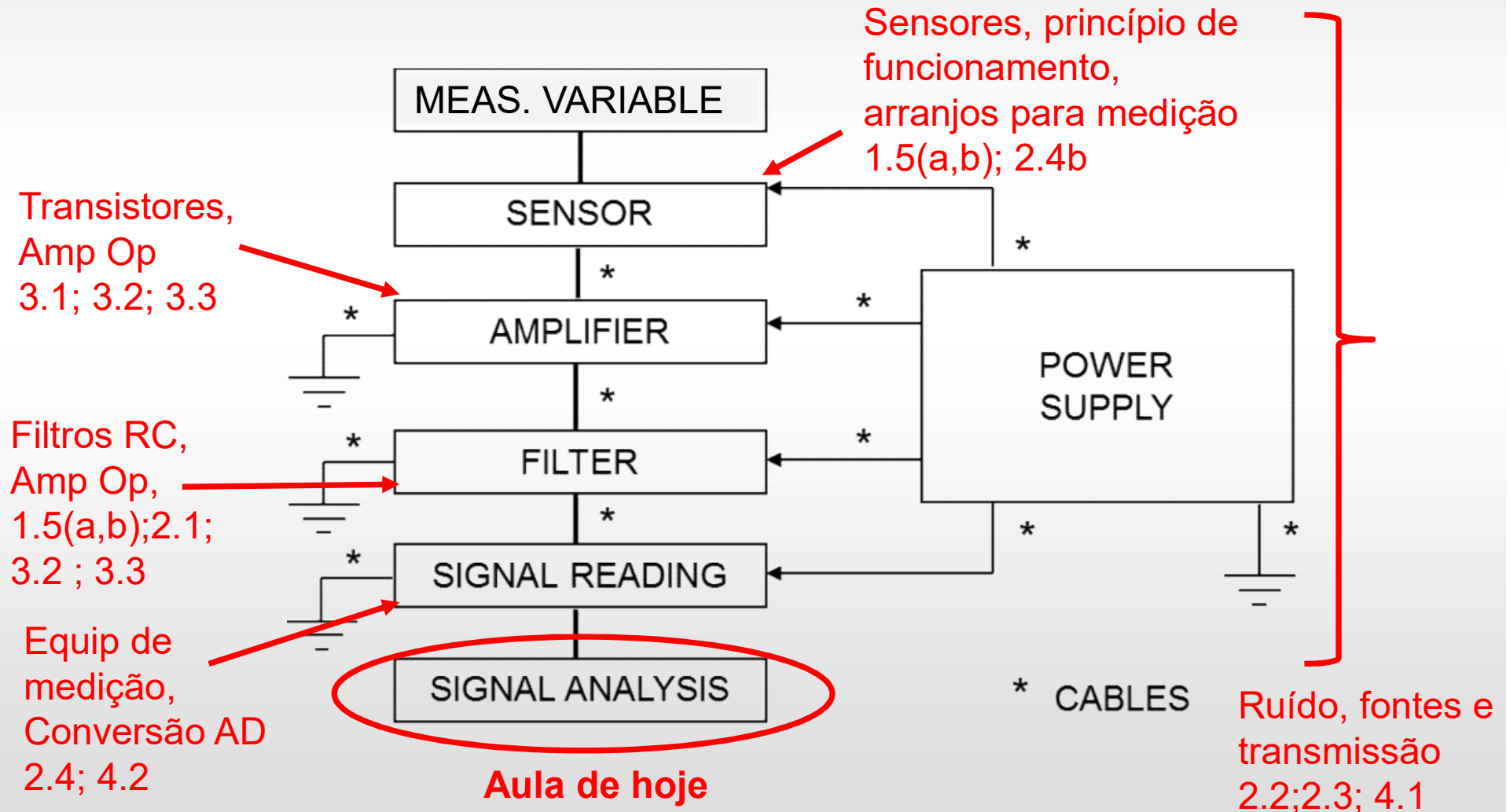


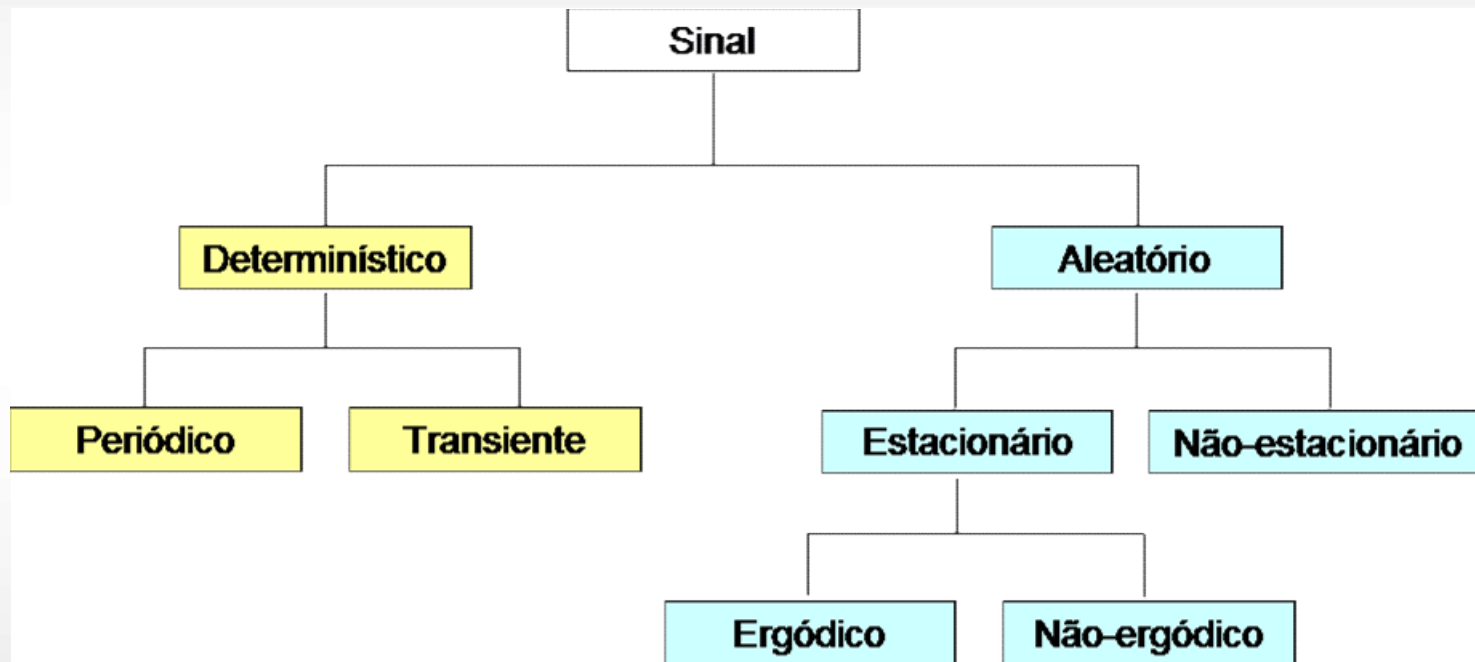
## Diagrama de processo de medição



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Tipos de sinal:



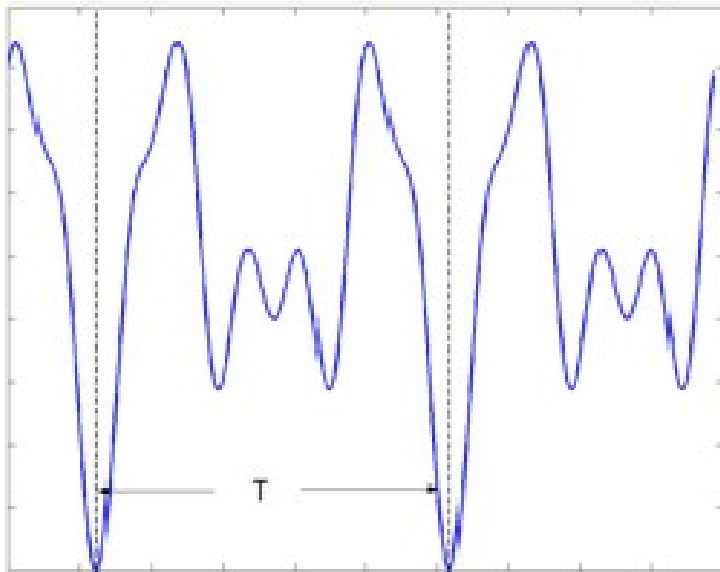
# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

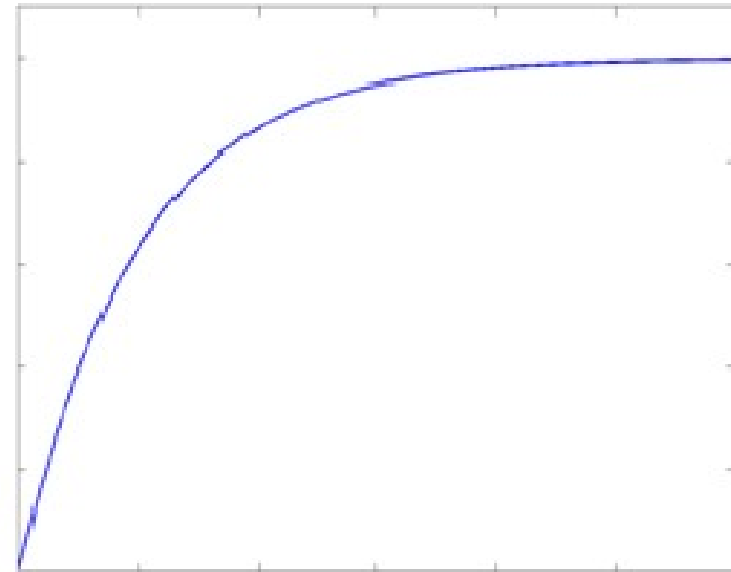
## ➤ Tipos de sinal:

➤ Determinístico: Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração.

Periódico



Transiente



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Tipos de sinal:

➤ Determinístico: *Sinais determinísticos são aqueles que podem ser perfeitamente reproduzidos caso sejam aplicadas as mesmas condições utilizadas sua geração.*

Periódico. Ex:



Transiente. Ex:



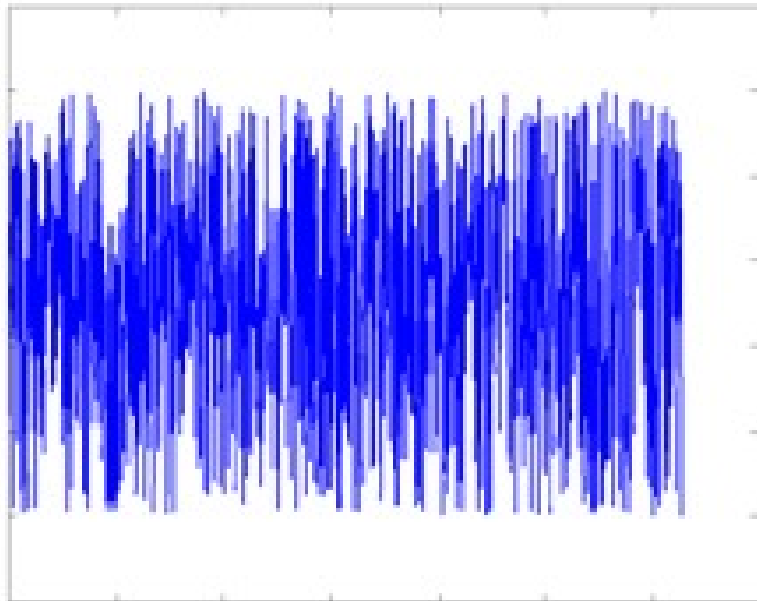
# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

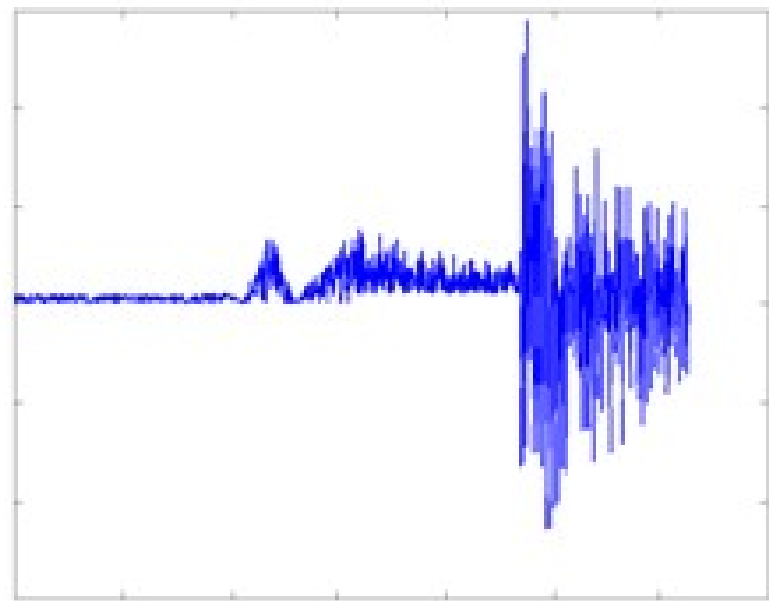
## ➤ Tipos de sinal:

➤ Estocástico (Aleatório): *possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário



Não Estacionário



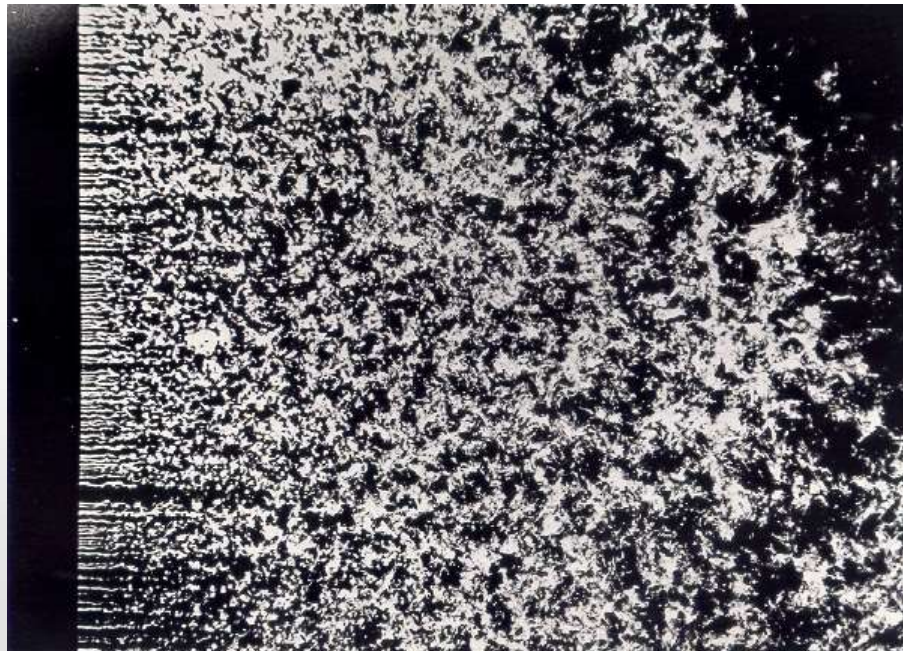
# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

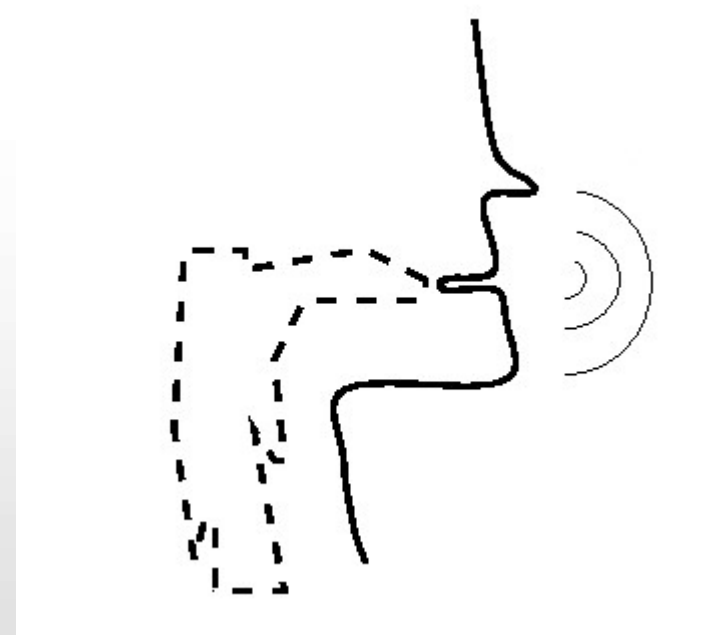
## ➤ Tipos de sinal:

➤ Estocástico (Aleatório): *possuem uma variabilidade que dificulta a predição dos seus valores por funções analíticas e que também não possuem periodicidade aparente*

Estacionário. Ex:



Não Estacionário. Ex:



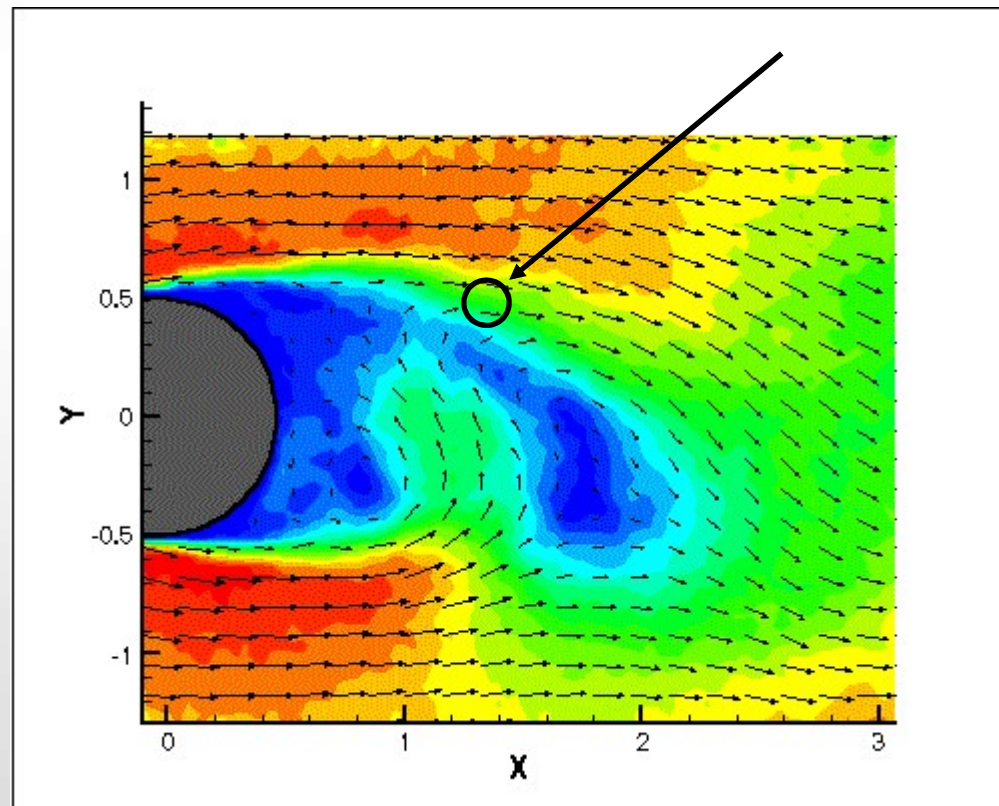
# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Na prática é comum a ocorrência de uma situação combinada onde coexista uma parcela determinística e uma estocástica.

➤ Exemplo: Escoamento na esteira de um cilindro



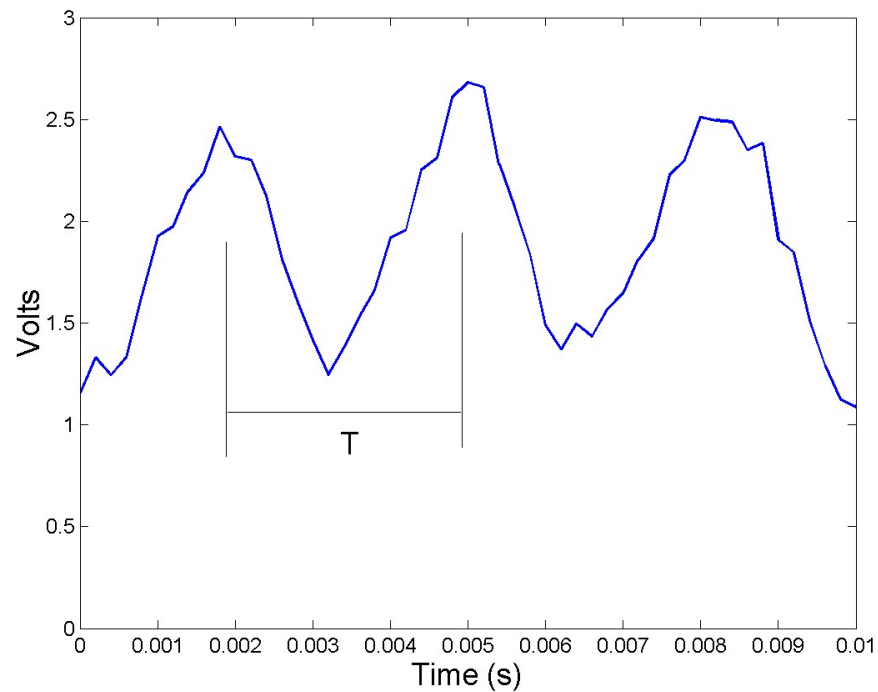
# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Análise de Sinais (introdução):

➤ Exemplo: Série temporal de um ponto na esteira do cilindro.

Dificuldade na definição do período do sinal através da análise no domínio do tempo.





# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \text{sen}(\omega_0 kt)]$$

onde  $T$  é o período fundamental do sinal  $x(t)$ ,  $\omega_0 (=2\pi/T)$  a frequência fundamental,  $k$  o número do harmônico usado na composição do sinal,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \text{sen}(\omega_0 kt)]$$

para  $k=0$  o valor de  $b_k$  é irrelevante pois o  $\text{sen}(\omega_0 kt) = 0$ . Já o valor do cosseno presente na integral de  $a_k$  fica constante e igual a 1. Assim, o coeficiente  $a$  para  $k=0$  pode ser reescrito como,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt, \quad k = 0$$

O termo  $a_0$  refere-se a média da série em um período de tempo  $T$ . Não tem fase pois não depende de valores de *seno* ou *cosseno*

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

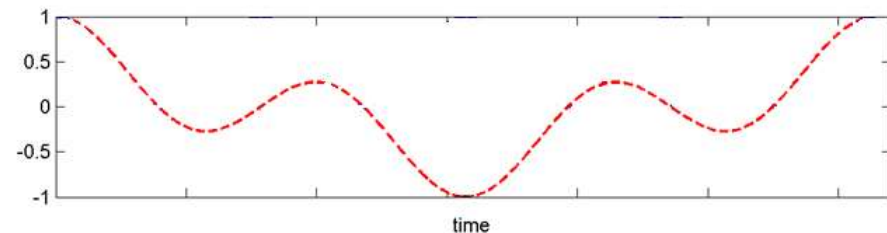
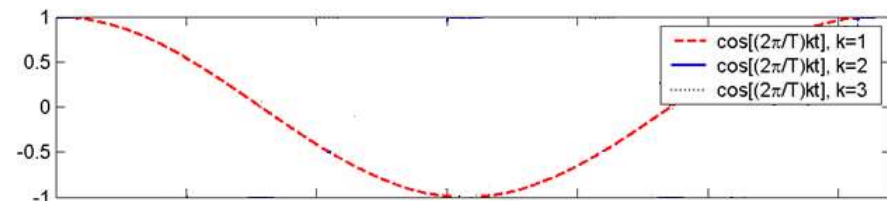
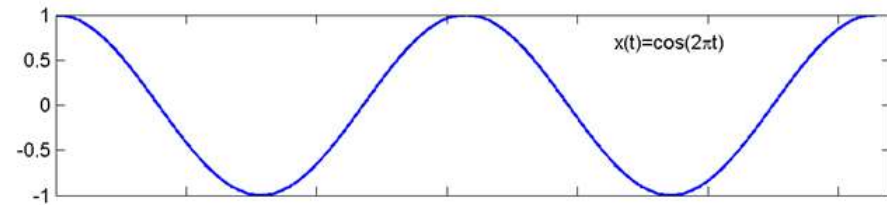
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como funciona?

Ex: Caso:  $\cos(2\pi t)$

$a_k$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

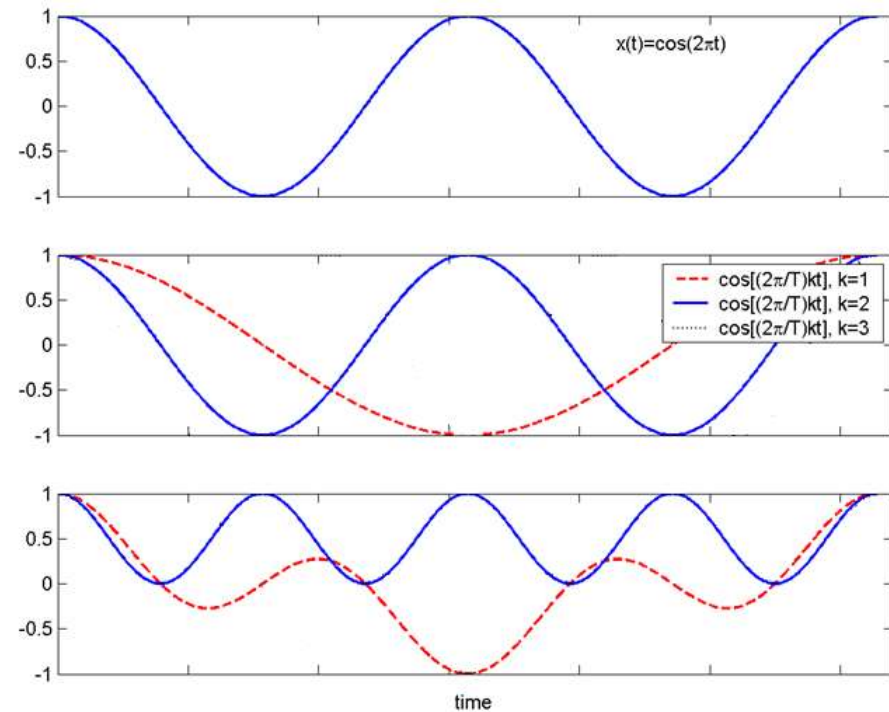
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como funciona?

Ex: Caso:  $\cos(2\pi t)$

$a_k$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

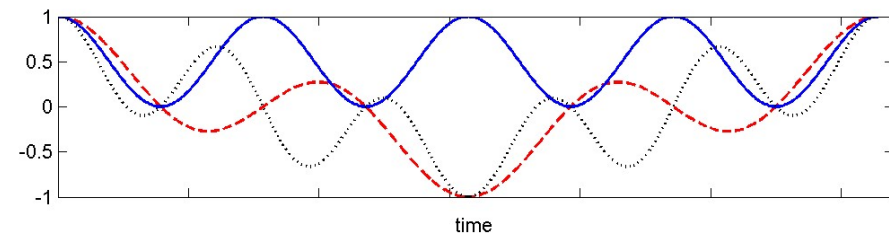
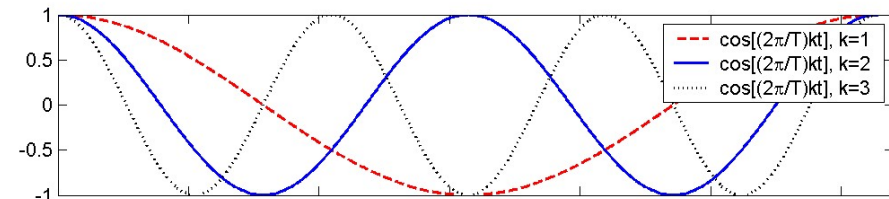
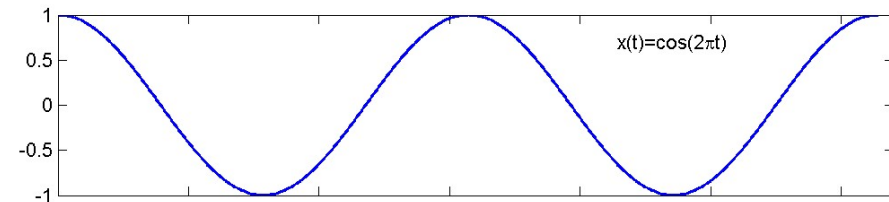
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como funciona?

Ex: Caso:  $\cos(2\pi t)$

$a_k$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

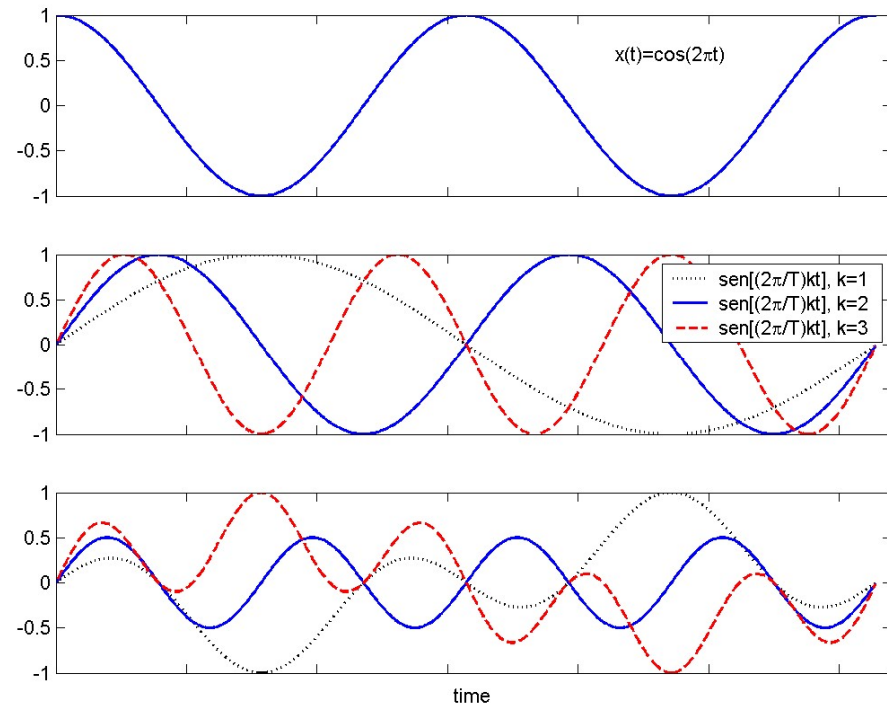
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como funciona?

Ex: Caso:  $\cos(2\pi t)$

$b_k$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como funciona?

Ex:



Visualização da  
representação em  
série de Fourier (gif,  
não funciona no PDF).  
Extraído de Wikimedia  
Commons

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int x(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

➤ Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$
$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

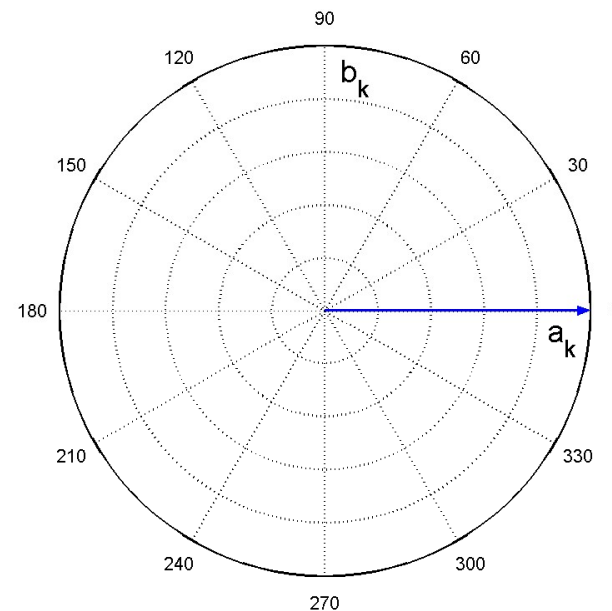
Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$
$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:  
Continuando com  
ex:  $\cos(2\pi t)$

$a_k > 0; b_k = 0;$

logo,  $\phi = 0$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

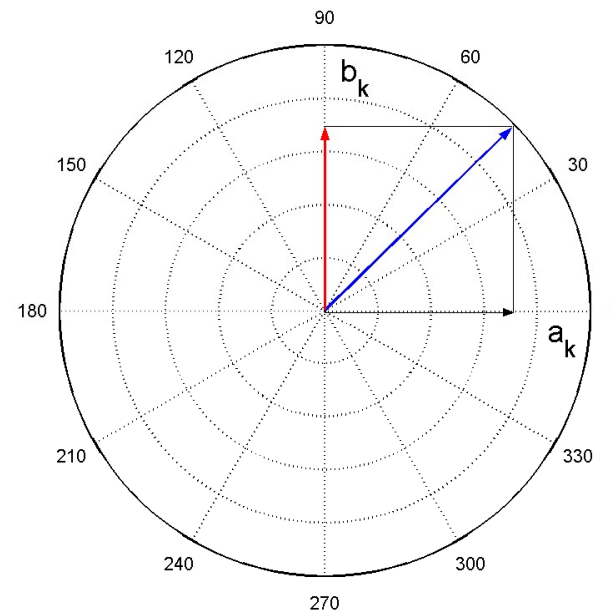
## ➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$
$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:  
Continuando com  
ex:  $\cos(2\pi t + \varphi)$   
com  $\varphi = \pi/4$  ( $45^\circ$ )

$a_k > 0; b_k > 0;$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

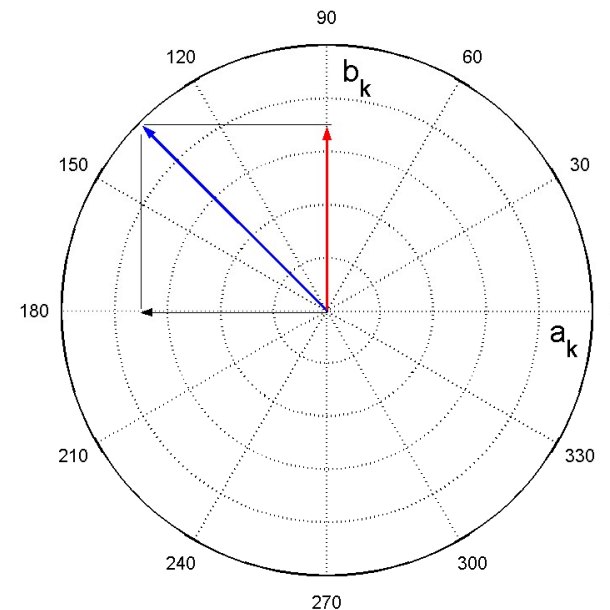
## ➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$
$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:  
Continuando com  
ex:  $\cos(2\pi t + \varphi)$   
com  $\varphi = 3\pi/4$  ( $135^\circ$ )

$a_k < 0$ ;  $b_k > 0$ ;



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

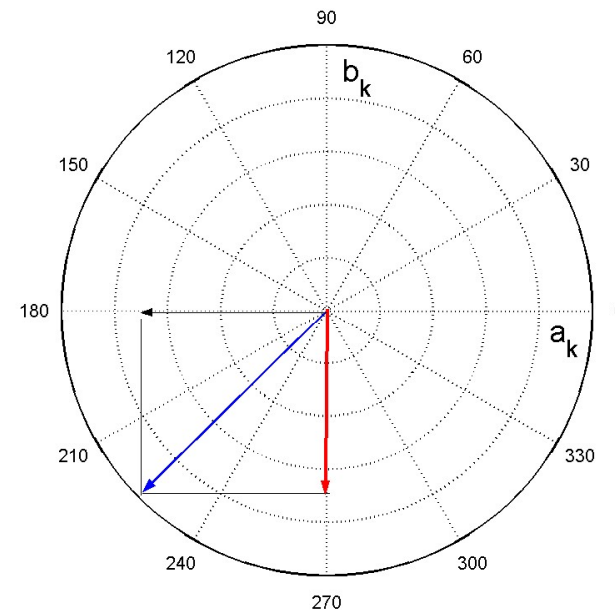
## ➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$
$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:  
Continuando com  
ex:  $\cos(2\pi t + \varphi)$   
com  $\varphi = 5\pi/4$  ( $225^\circ$ )

$a_k < 0$ ;  $b_k < 0$ ;



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

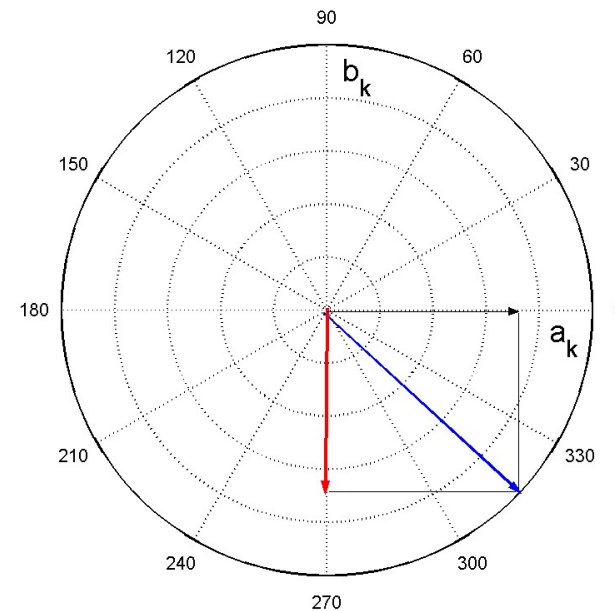
## ➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

Amplitude e Fase do sinal

$$A(\omega_0 k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$
$$\phi(\omega_0 k) = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Análise da Fase:  
Continuando com  
ex:  $\cos(2\pi t + \varphi)$   
com  $\varphi = 7\pi/4$  ( $315^\circ$ )

$a_k > 0; b_k < 0;$



# Aula de Processamento de Sinais

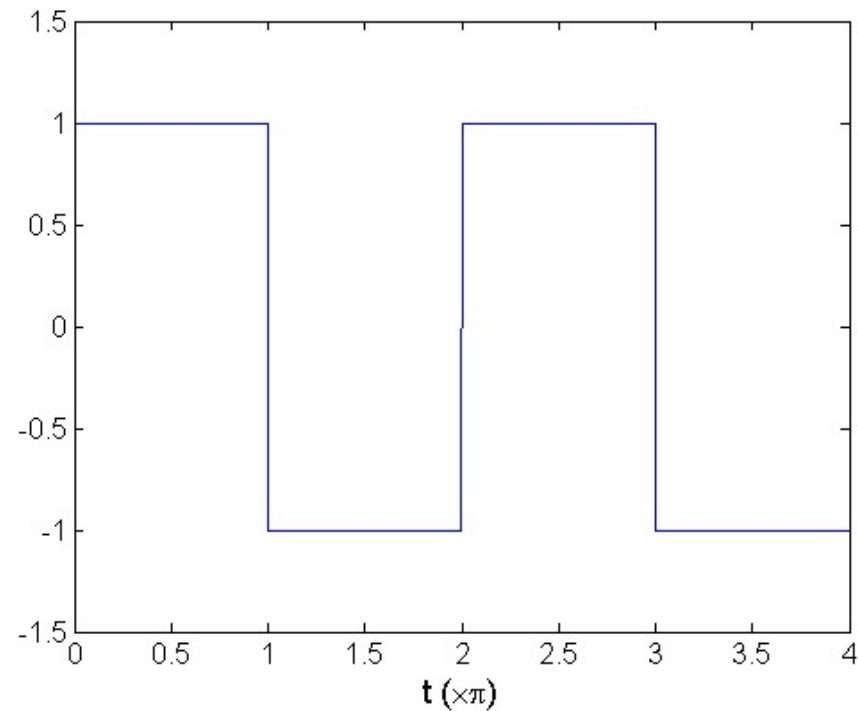
I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo)

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

onde sign é o sinal da função  $\text{sen}(t)$  e que assume -1 para valores negativos de  $\text{seno}(t)$  e +1 para positivos.



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo)

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

;

Calculando-se os termos da série de Fourier dessa função, temos:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int x(t) dt = \int_0^{\pi} 1 dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int x(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{k\pi} \left[ 1 \cdot \text{sen}(kt) \Big|_0^{\pi} + (-1) \text{sen}(kt) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = 0, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo)

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

;

Calculando-se os termos da série de Fourier dessa função, temos:

$$b_k = \frac{2}{T} \int x(t) \text{sen}(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} 1 \cdot \text{sen}(kt) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \cdot \text{sen}(kt) dt \right]$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{k} \cos(kt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \cos(kt) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & \text{para } k \text{ impar} \\ 0, & \text{para } k \text{ par} \end{cases}$$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

;

Com os coeficientes  $a_k = a_0 = 0$

$$b_k = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & \text{para } k \text{ impar} \\ 0, & \text{para } k \text{ par} \end{cases}$$

A série de Fourier dessa função fica:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t) + \frac{4}{7\pi} \text{sen}(7t) + \dots$$

# Aula de Processamento de Sinais

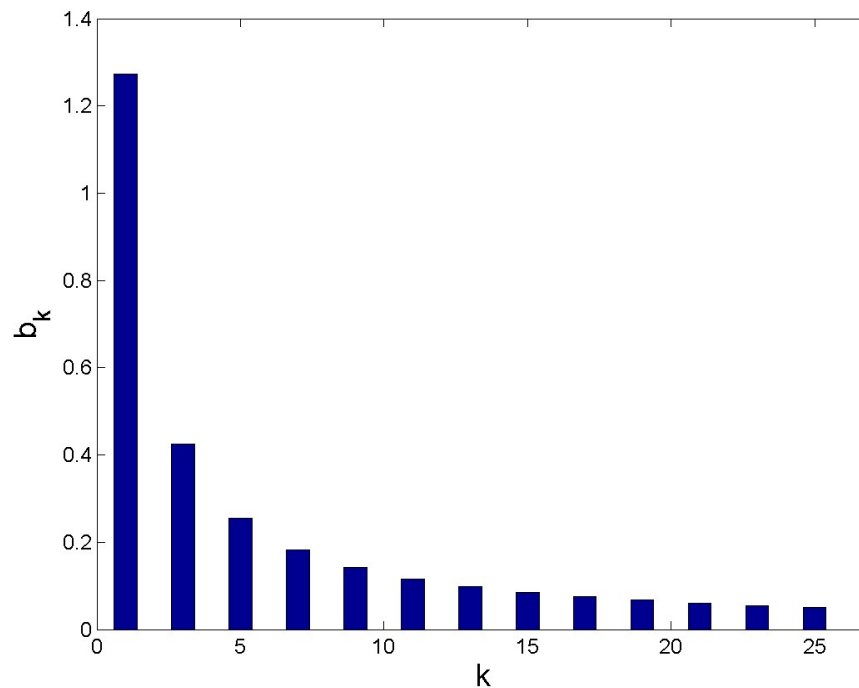
I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

Representação espectral (no domínio das frequências) da série



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

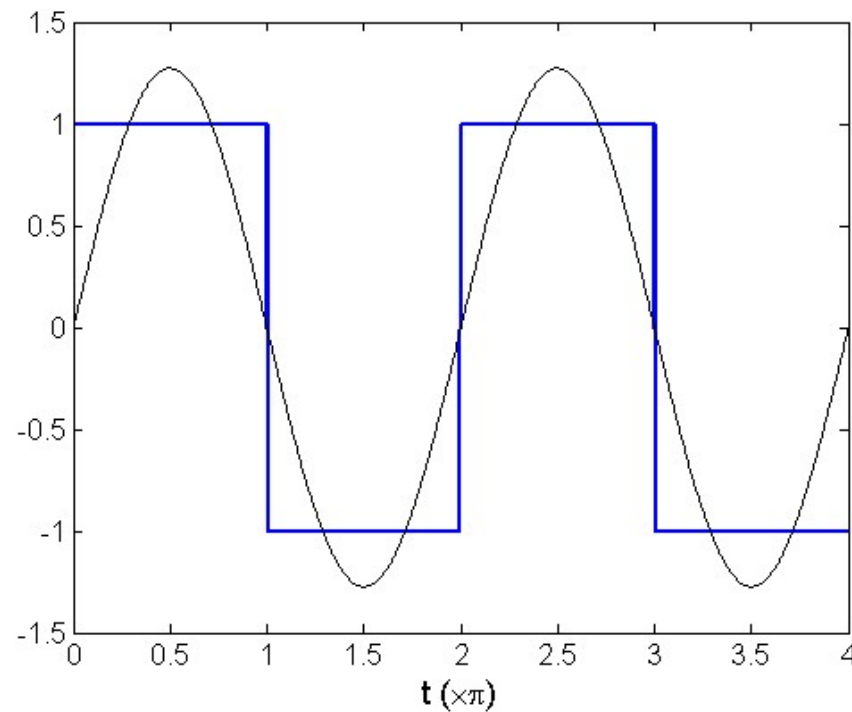
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

k=1



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

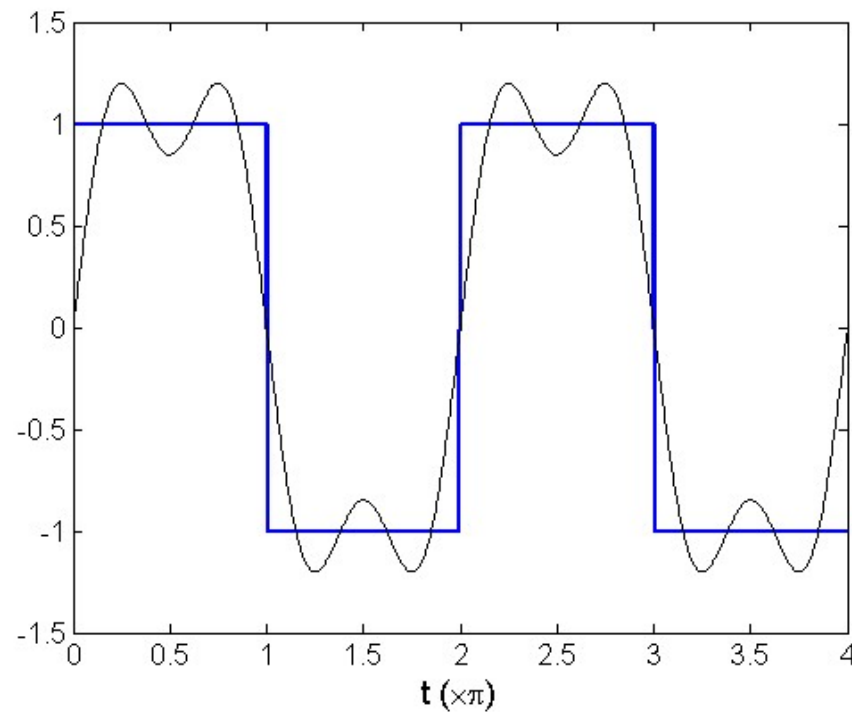
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

$k=1,3$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

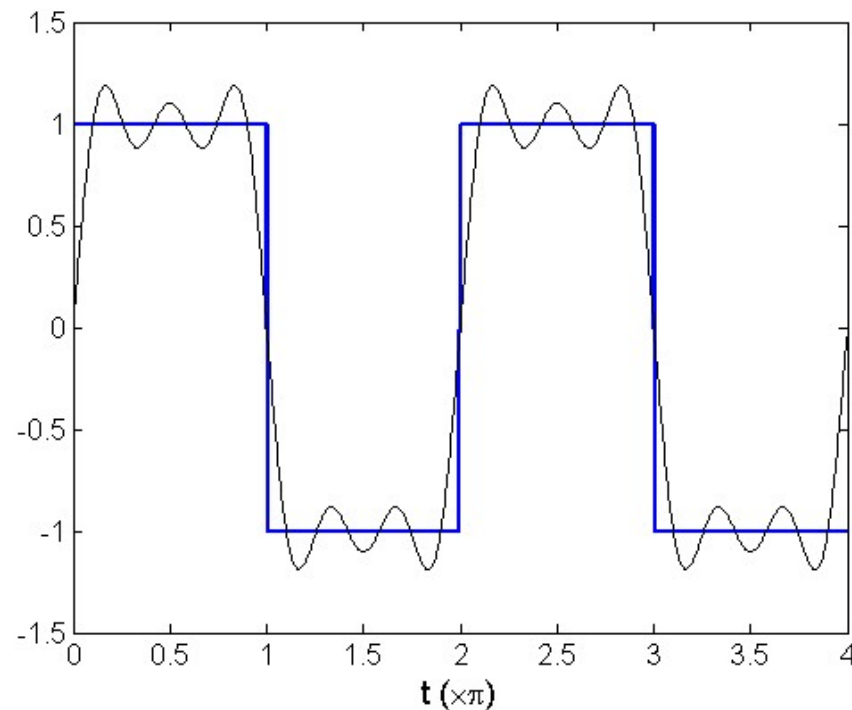
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

$k=1,3,5$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

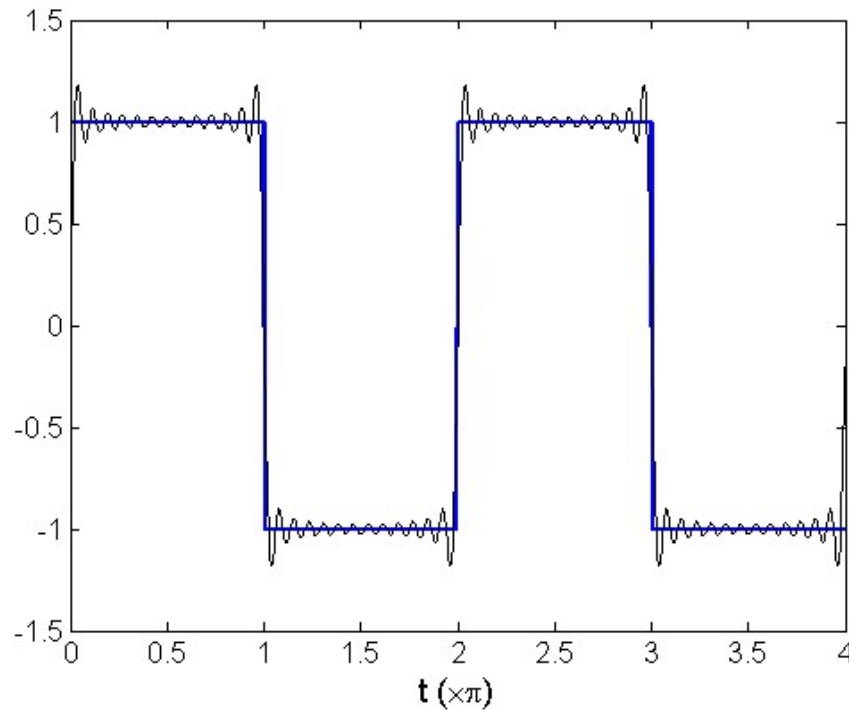
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

$k=1,3,5..25$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

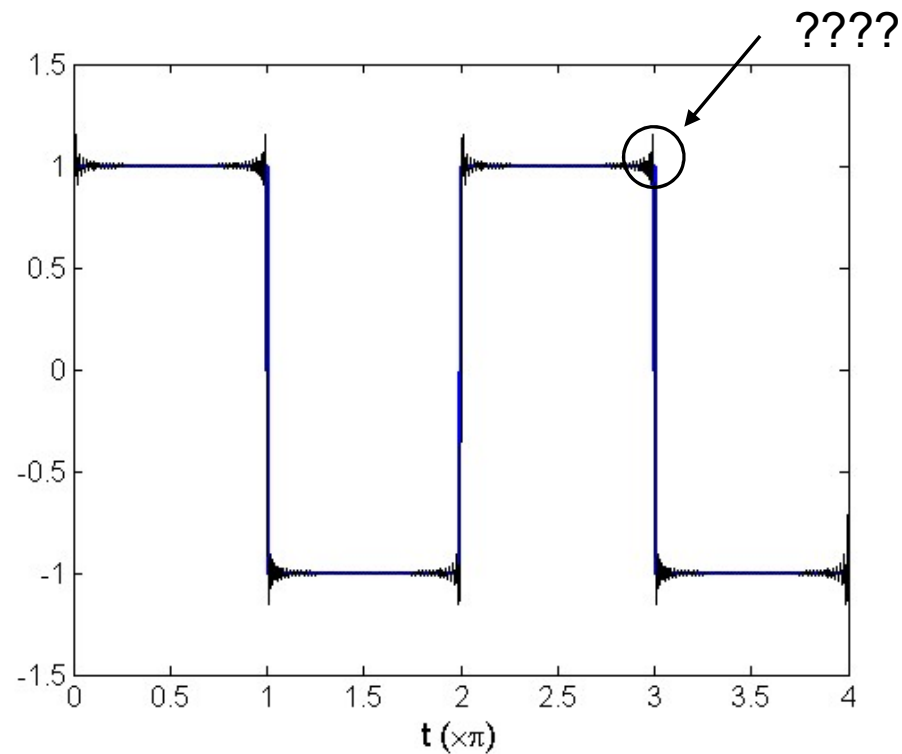
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

$k=1, \dots, 99$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

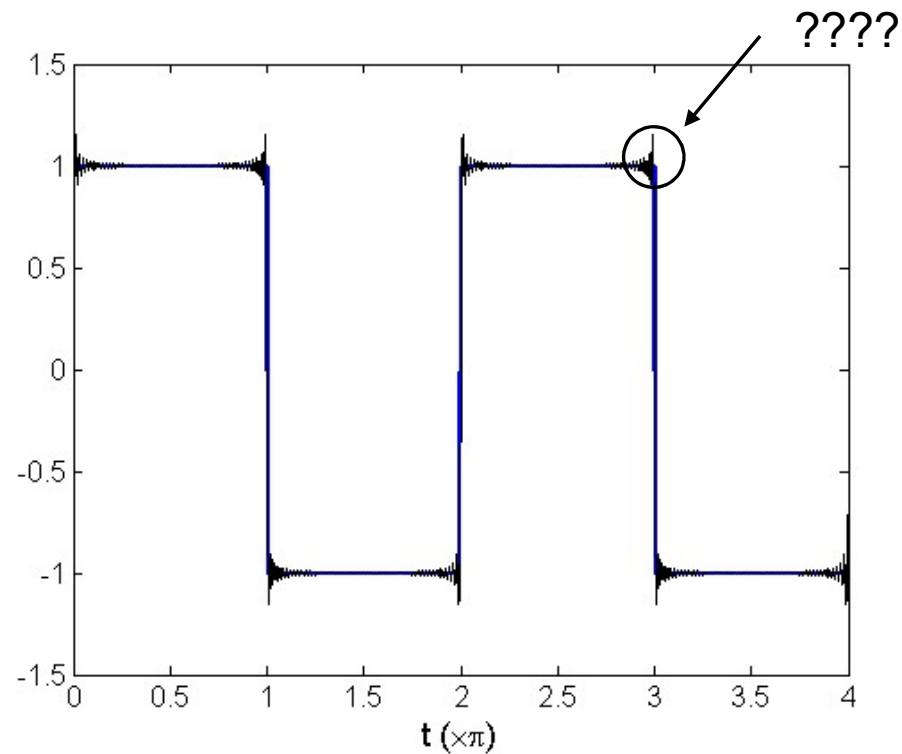
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

**Exemplo)**

➤ Onda quadrada:  $x(t) = \text{sign}[\text{sen}(t)]$

Representação temporal da série truncada a um número finito de modos.

$k=1, \dots, 99$





# Aula de Processamento de Sinais

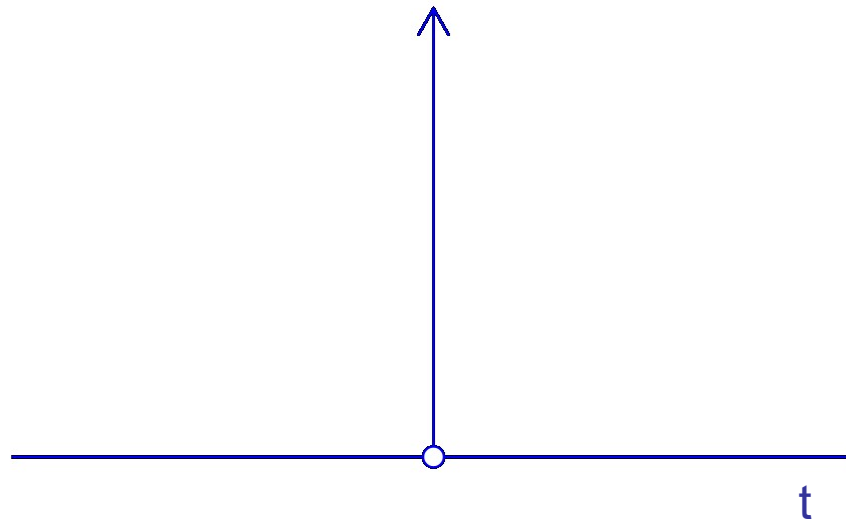
I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo 2)

➤ Delta de Dirac  $\delta(t)$ :

Função pulso.



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo 2)

➤ Delta de Dirac  $\delta(t)$ :

Antes de calcular a série de Fourier é necessário relembrar algumas propriedades fundamentais da função delta de Dirac.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$$
$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-\tau) f(t) dt = f(\tau)$$

E também definir um período para a função:  $-\pi < t < \pi$  .

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo 2)

➤ Delta de Dirac  $\delta(t-\tau)$ : com  $\tau=0$

Os coeficientes da serie de Fourier dessa função são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) dt = \frac{1}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \cos(k \cdot 0) = \frac{1}{\pi}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \text{sen}(kt) dt = \frac{1}{\pi} \text{sen}(k \cdot 0) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

# Aula de Processamento de Sinais

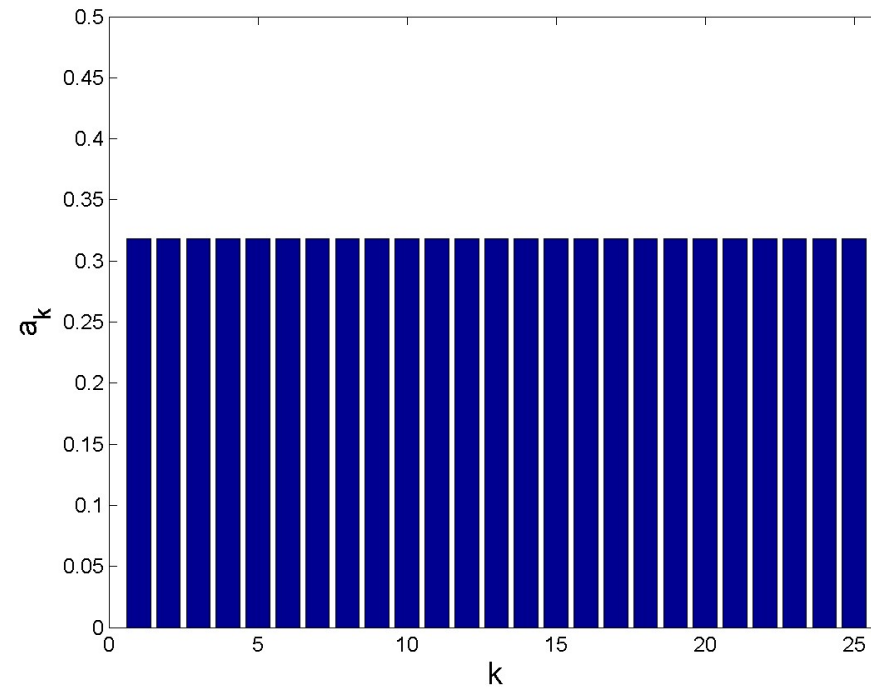
I.B De Paula

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo 2)

➤ Delta de Dirac:

Representação espectral da série



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

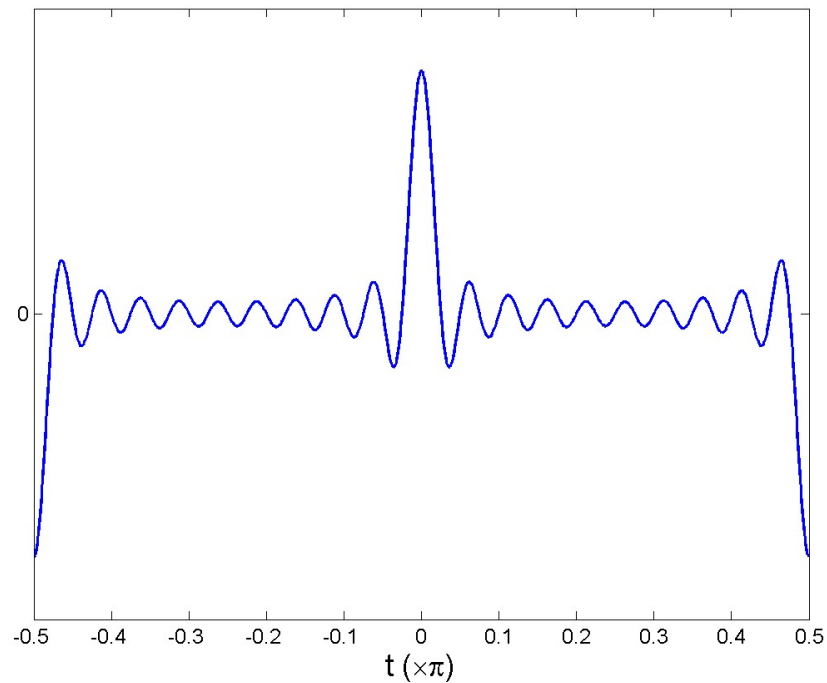
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo 2)

➤ Delta de Dirac:

Representação da série truncada a um número finito de modos

$k=1\dots 10$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

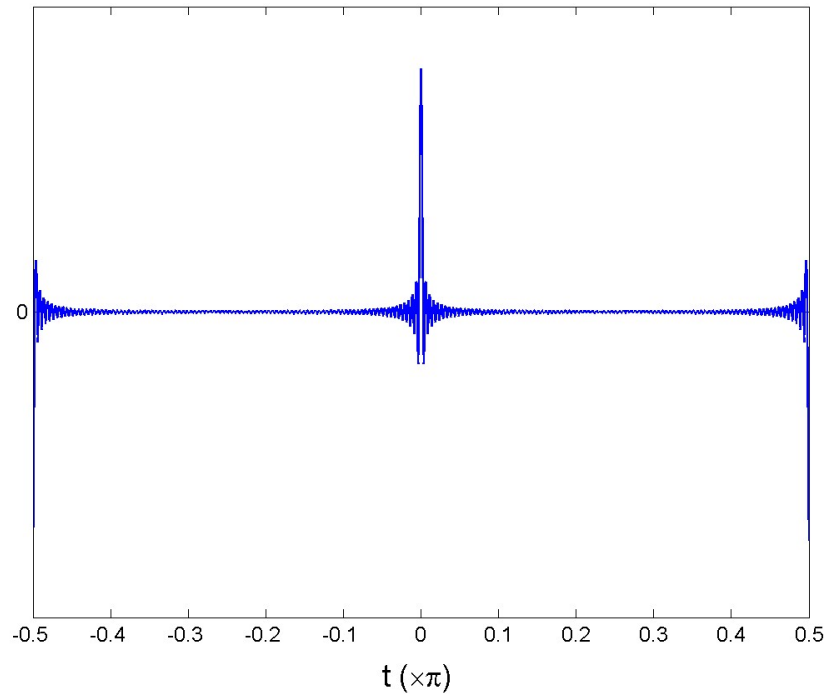
➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo 2)

➤ Delta de Dirac:

Representação da série truncada a um número finito de modos

$k=1\dots 100$



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

➤ Representação de sinais em séries de Fourier:

## Exemplo 2)

➤ Delta de Dirac:

➤ *Com base na representação da função delta de Dirac, nota-se que um evento localizado no tempo distribui energia para todos os modos no domínio da frequência;*

➤ *Regiões onde existe descontinuidade no tempo necessitam de um grande número de termos para uma representação razoável da série temporal.*

➤ *Esse efeito devido ao truncamento da série a um número finito de modos é conhecido como **efeito de Gibbs***

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

## ➤ Introdução a Transformada de Fourier (FT):

A representação de sinais através da série de Fourier é limitada, pois a série só pode ser calculada para sinais periódicos e de período conhecido.

Para criar um método mais robusto que pudesse ser aplicado a quase todos os tipos de sinais Fourier desenvolveu uma transformada baseada no mesmo princípio de representação em series de senos e cossenos

A transformada de Fourier permite que sinais que ocorrem sem periodicidade também tenham uma representação no domínio das frequências.



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Introdução a Transformada de Fourier (FT):

Relembrando a formulação da representação em freqüências da série de Fourier :

$$F(\omega_0 k) = \begin{cases} a_k & , \text{ termo cosseno} \\ b_k & , \text{ termo seno} \end{cases}$$

utilizando a notação exponencial:  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t)$

$$F(\omega_0 k) = \begin{cases} c_{kREAL} & , \text{ relacionado ao termo cosseno} \\ c_{kIMAG} & , \text{ relacionado ao termo seno} \end{cases}$$

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Introdução a Transformada de Fourier (FT):

A série pode ser reescrita como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\omega_0 kt}$$

Com os coeficientes  $c_k$  dados por:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-i\omega_0 kt} dt$$

Para um domínio de  $[-\infty; +\infty]$ , o período  $T$  tende a  $\infty$  enquanto que a frequência fundamental ( $\omega_0$ ) tende para 0. Assim as componentes  $c_k$ 's formam um contínuo.

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

## ➤ Transformada de Fourier (FT):

O somatório da série de  $c_k$ 's se converte em uma integral, obtendo-se assim a transformada de Fourier.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

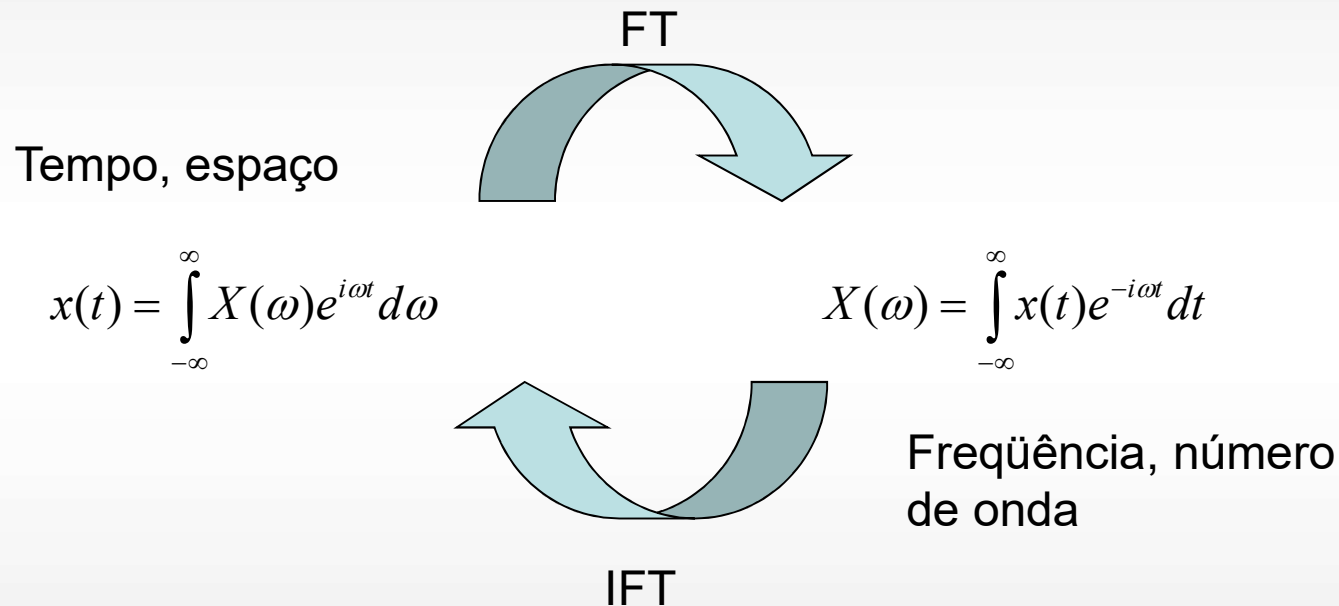
onde  $X(\omega)$  é o sinal  $x(t)$  no domínio da freqüência. A operação inversa para transformar o sinal  $X(\omega)$  do domínio para o tempo é dada pela transformada inversa (IFT)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada de Fourier (FT):



A transformada permite que o mesmo sinal possua representação tanto no tempo quanto na frequência.

Ao longo dos anos essa provou ser uma das ferramentas de análise de dados mais utilizadas nos mais diversos campos de estudo.

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada de Fourier (FT):

Tempo, espaço

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt \iff \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)^2 d\omega$$

Frequência, número  
de onda

De acordo com o teorema de Rayleigh a potência dos sinais é a mesma não importando o domínio (muito útil para sinais).

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

## ➤ Transformada de Fourier (FT):

Diferença em relação a série:

Na série de Fourier o intervalo de amostragem no tempo ( $\Delta t$ ) tende a zero o que resulta em infinitos modos harmônicos no domínio da frequência.

Na transformada de Fourier o período de amostragem tende a infinito, de modo que a resolução no domínio da frequência ( $\Delta \omega$ ) tende a 0.

Isso implica que a transformada é uma função contínua no domínio da frequência.

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Transformada Discreta de Fourier (DFT):

Para o uso da transformada no processamento digital de sinais é necessário a utilização da transformada discreta de Fourier (DFT).

Para restringir os limites de integração da transformada a um número finito de pontos, assume-se que o sinal amostrado seja periódico e de período igual ao período de amostragem.

Isso equivale a dizer que, para a transformada discreta a série temporal de dados se repete periodicamente, em um intervalo de tempo igual a  $N \cdot \Delta t$ , até um tempo infinito.

A versão da transformada para pontos discretos é dada em termos de somatório de pontos:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i \frac{j2\pi k}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1$$

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i \frac{j2\pi k}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1$$

Transformada Inversa (IDFT):

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{j2\pi k}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1$$

Para cada frequência correspondente a  $k$  um somatório deve ser computado.

Isso resulta em  $N^2$  operações, o que torna o processo caro do ponto de vista computacional.



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

## ➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Para reduzir o número de operações e aumentar a eficiência no cálculo da transformada foram criados algoritmos chamados de transformadas rápidas de Fourier (Fast Fourier Transform- FFT).

Nesses métodos o número de operações realizadas para o cálculo da transformada é reduzido para  $O(N \log(N))$  operações.

Ex: Para uma série de 1024 dados:

$$N^2 = 1048576;$$

$$N \log(N) \sim 3083!!!$$

Esses métodos são extremamente úteis mesmo com o atual aumento da capacidade de processamento dos computadores

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

## ➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Os coeficientes da FFT permitem que a amplitude e a fase do sinal sejam obtidos para cada modo  $k$  de maneira análoga à série de Fourier

$$A_k = \sqrt{\text{real}(X_k^2) + \text{imag}(X_k^2)};$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{\text{imag}(X_k)}{\text{real}(X_k)}\right).$$

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

## ➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Os limites de integração da FFT são finitos, conseqüentemente a resolução no domínio das frequências fica limitada ao período de amostragem do sinal

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T} = \frac{f}{N}$$

A frequência de cada modo  $k$  da FFT é dada por:

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{kf}{N}$$

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

## ➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

A discretização dos dados no tempo também acarretam limitação na FFT.

A relação entre intervalo de amostragem e a frequência máxima do espectro é dada pela teoria de amostragem de Shannon-Nyquist.

A frequência máxima que pode ser resolvida é igual a metade da frequência de amostragem  $f_s$ , onde  $f_s = 1/\Delta t$ .

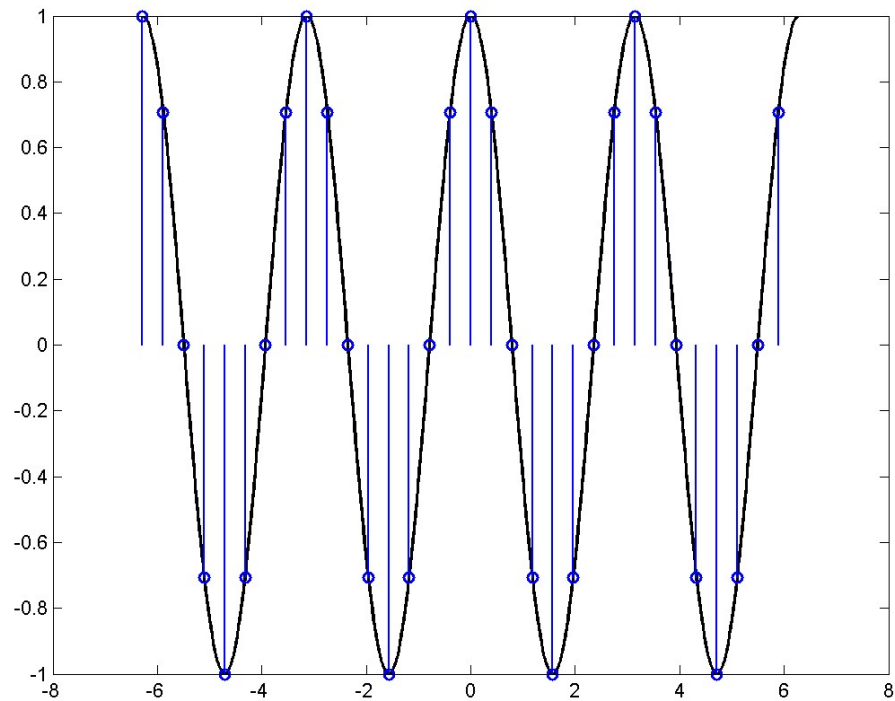
Essa frequência limite é chamada de frequência de **Nyquist**.  
(Demonstração detalhada na aula de laboratório)

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Frequência de **Nyquist**. (Demonstrado na aula passada)

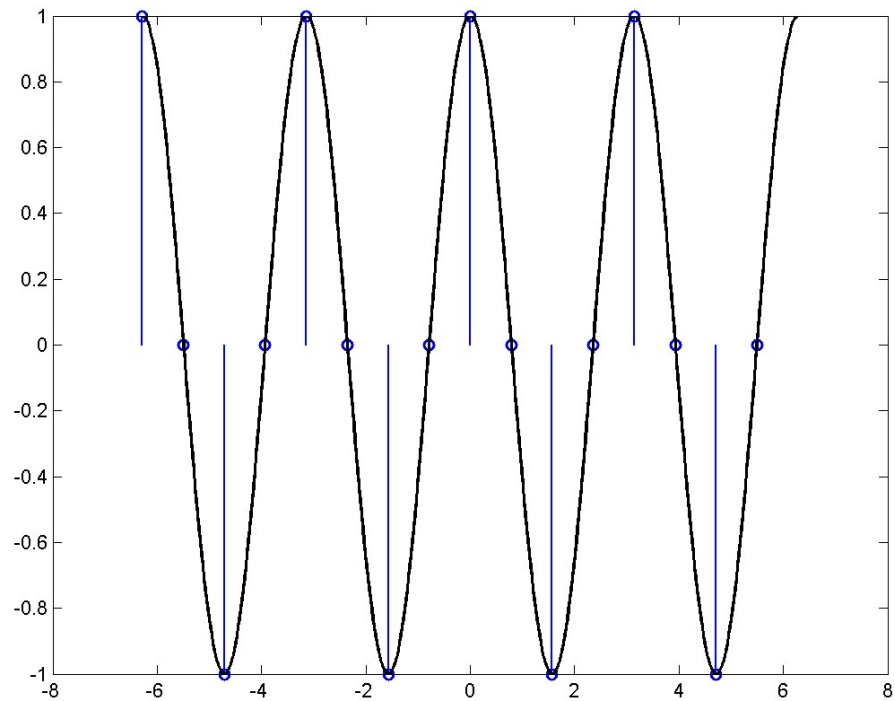


# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Frequência de **Nyquist**. (Demonstrado na aula passada)

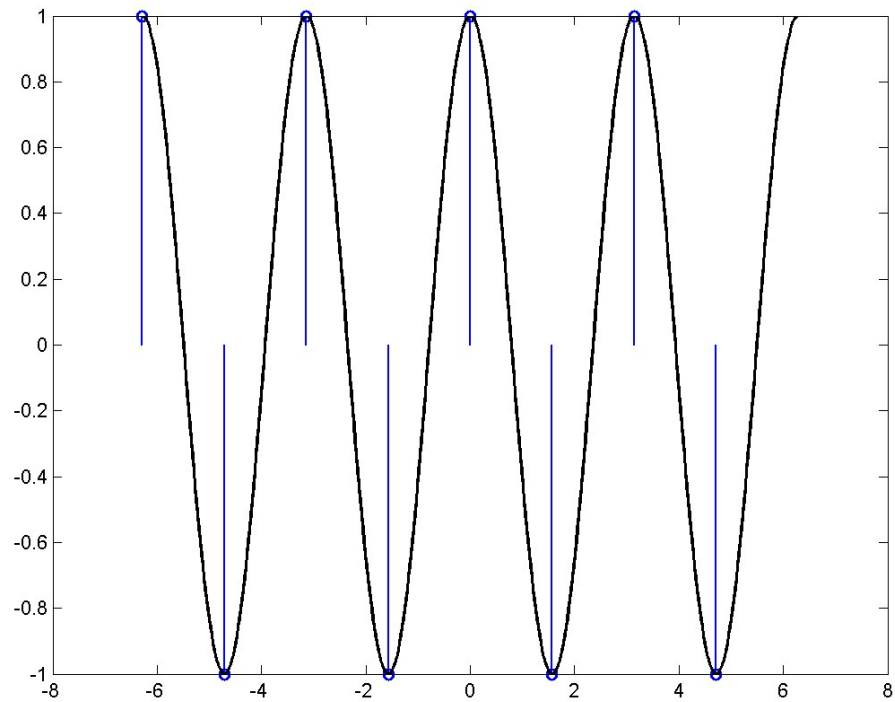


# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Frequência de **Nyquist**. (Demonstrado na aula passada)

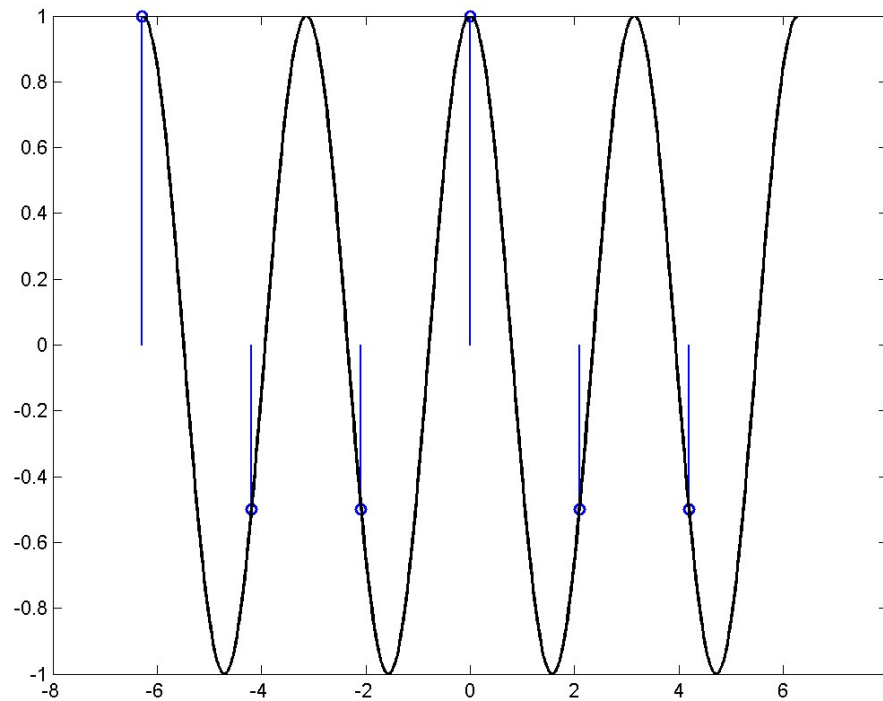


# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Frequência de **Nyquist**. (Demonstrado na aula passada)



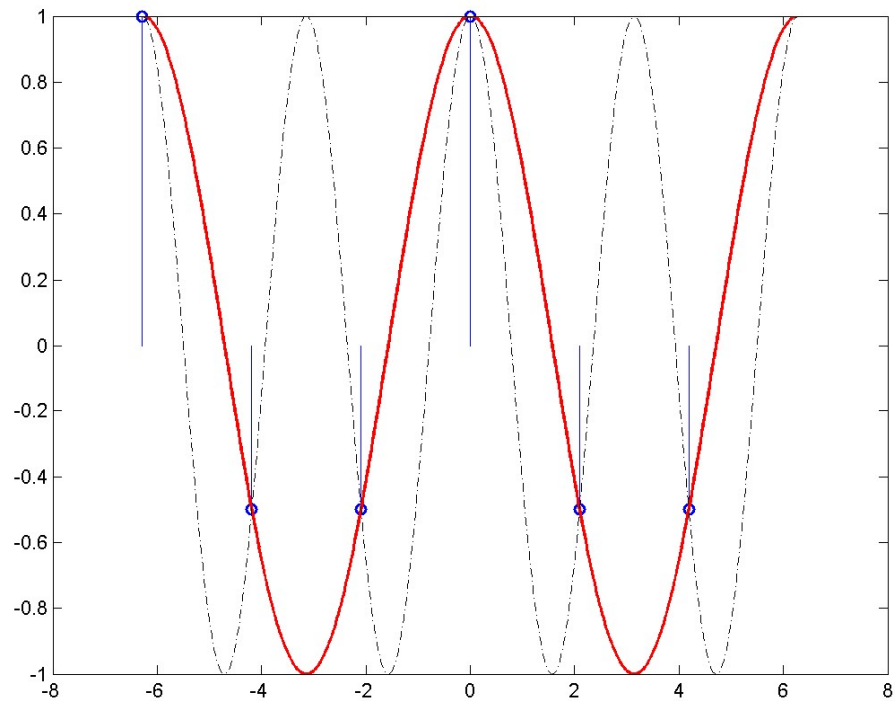


# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Frequência de **Nyquist**. (Demonstrado na aula passada)



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

---

## ➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

Algoritmos e funções para o cálculo da transformada rápida de Fourier encontram-se disponíveis em várias bibliotecas para diferentes linguagens de programação.

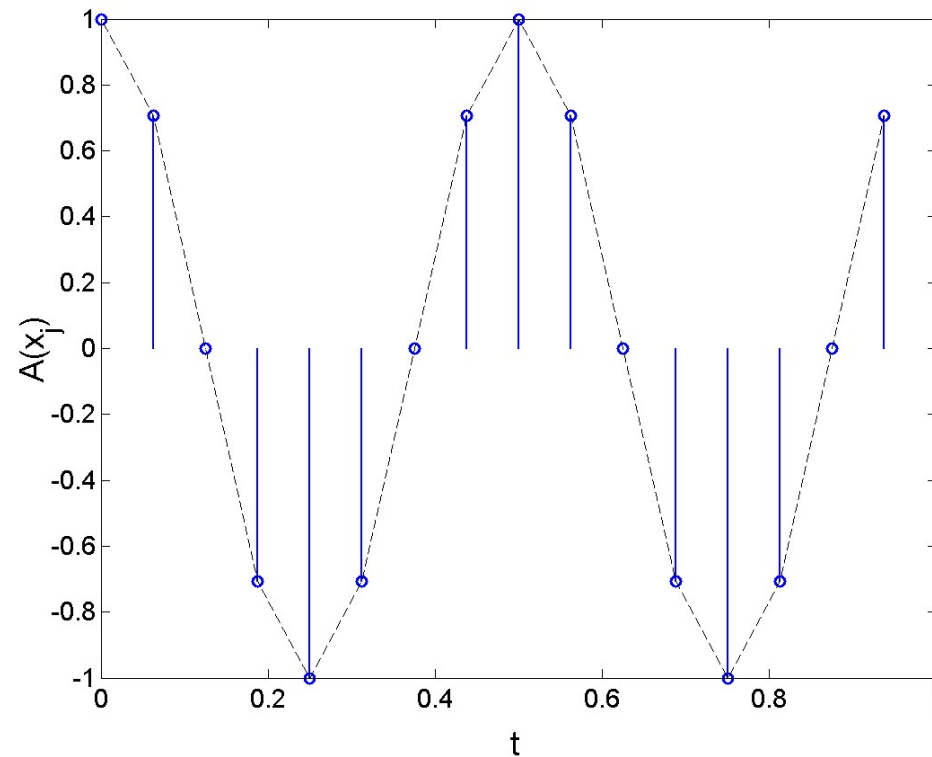
Uma compilação dessas rotinas pode ser encontrada no endereço <http://www.nr.com/> (numerical recipes).

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

➤ **Exemplo 3)**  $\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t))$  com  $t=[0,1]$  e com  $N=16$

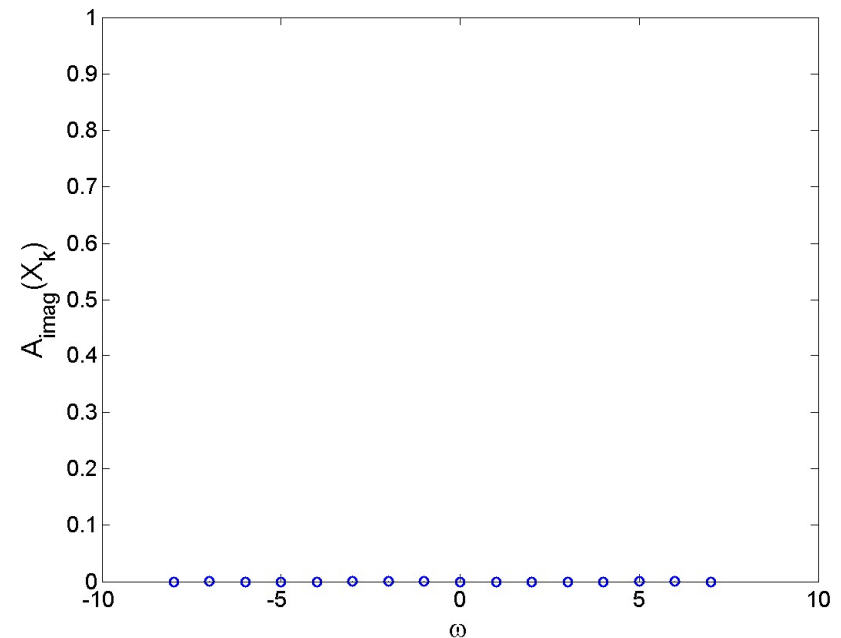
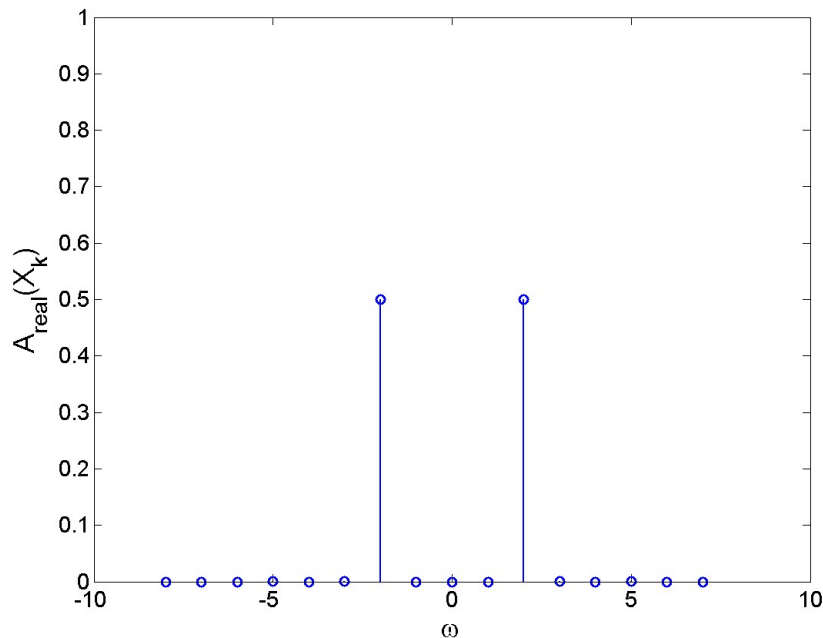


# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

**Exemplo 3)**  $\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t))$  com  $t=[0,1]$  e com  $N=16$



Frequências positivas e negativas!?! FFT assume periódico de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

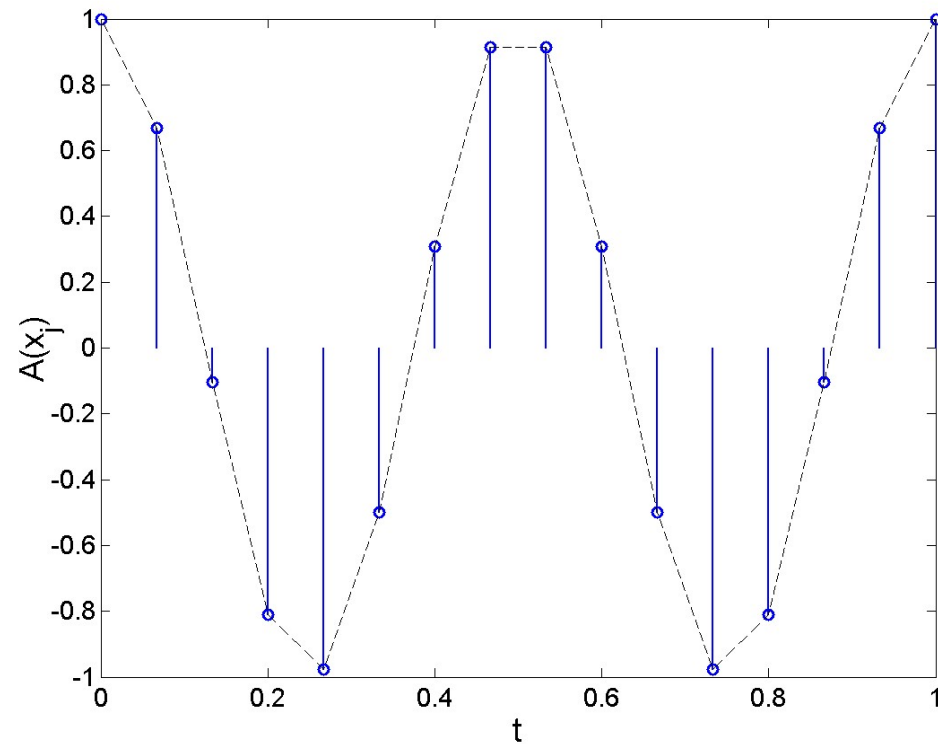
A transformada inclui também os valores do conjugado complexo dos coeficientes  $X_k$ , de modo que para uma série de dados real  $X_k = -i \cdot X_{-k}$ .

# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

➤ **Exemplo 3)**  $\cos(2 * \pi * (2*t))$  com  $t=[0,1]$  e com  $N=16$

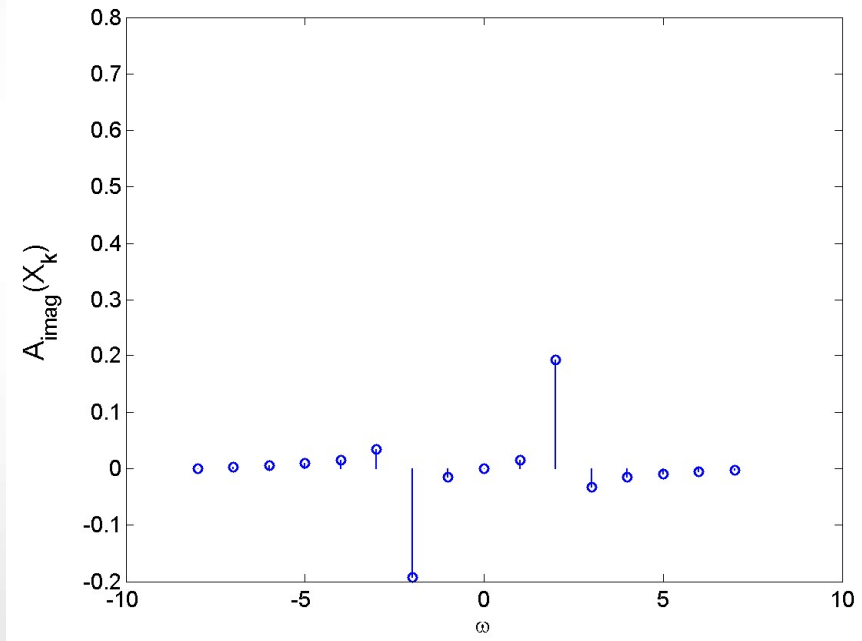
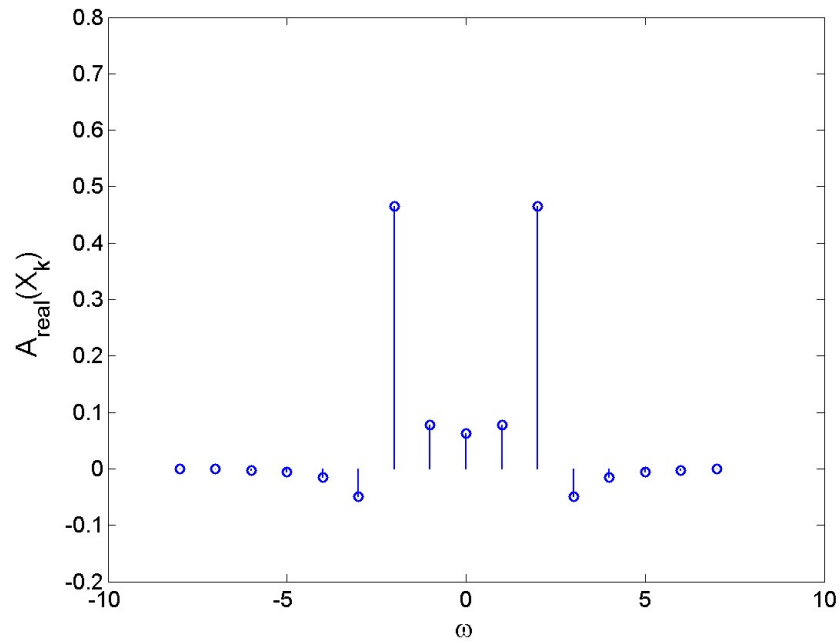


# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

**Exemplo 3)**  $\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t))$  com  $t=[0,1]$  e com  $N=16$



Espalhamento em vários modos

# Aula de Processamento de Sinais

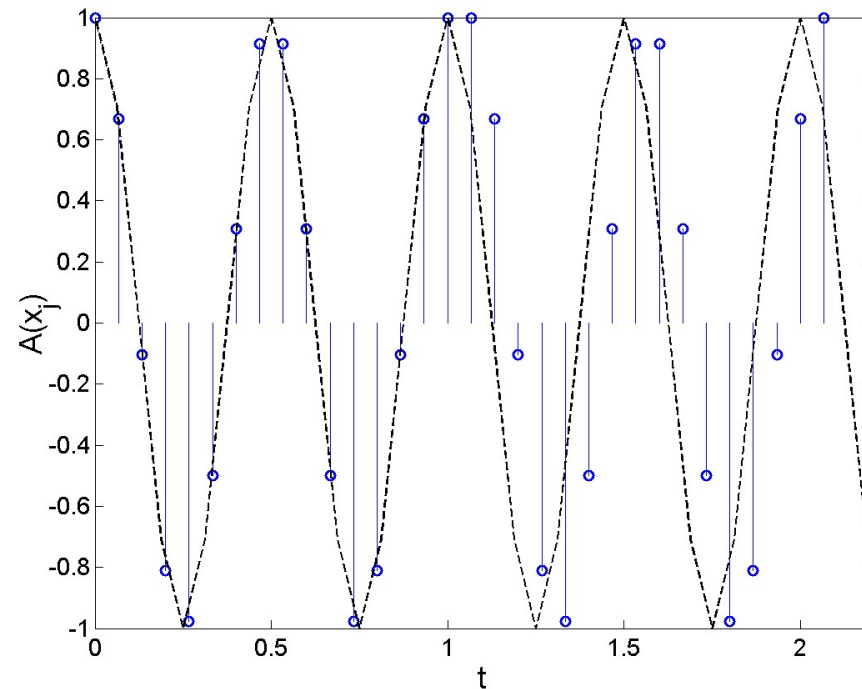
I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

**Exemplo 3)**  $\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t))$  com  $t=[0,1]$  e com  $N=16$

Espalhamento em vários modos ocorre devido a não periodicidade do sinal com relação ao período de amostragem.

Causa descontinuidade e tem efeito semelhante ao observado na série de Fourier



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

**Exemplos de aplicação (somente algumas pois são inúmeras):**

➤ Análise de vibrações;





# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

**Exemplos de aplicação (somente algumas pois são inúmeras):**

➤ Audio (processamento e compactação);



# Aula de Processamento de Sinais

I.B De Paula

➤ Transformada Rápida de Fourier (FFT):

**Exemplos de aplicação (somente algumas pois são inúmeras):**

➤ Solução de equações diferenciais (Ex.: Simulação das Eq. de Navier-Stokes de um jato. Obs: campo acústico em cinza)

