

MEC2007 – Tópicos Especiais em Engenharia Mecânica

Técnicas de Medição Baseadas em Imagens

Velocimetria por Imagem de Partículas (PIV)

Fabio J. W. A. Martins

fabiomartins@puc-rio.com

Departamento de Engenharia Mecânica

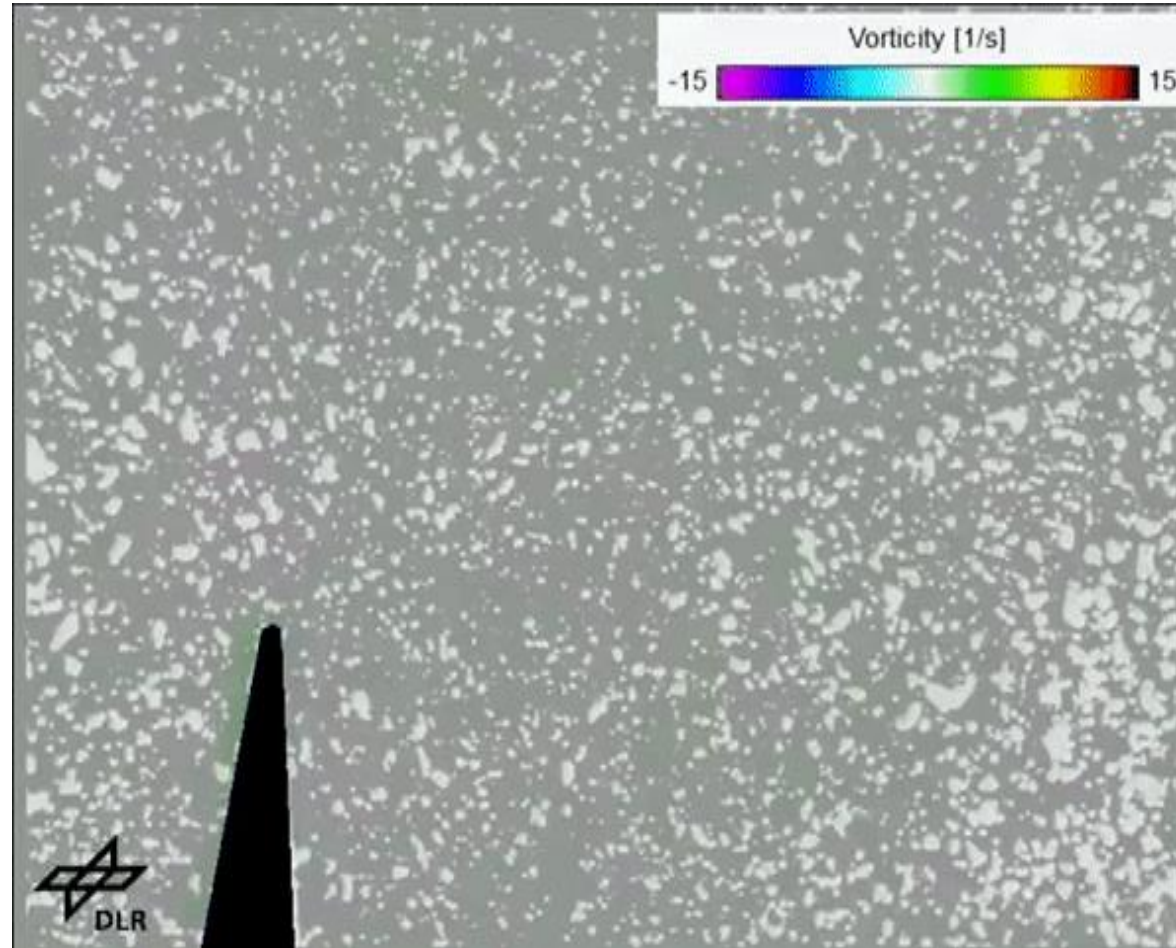


Pontifícia
Universidade
Católica do
Rio de Janeiro

22/09/2025

Experimento de Ludwig Prandtl

Escoamento de separação atrás de uma aresta (1904)



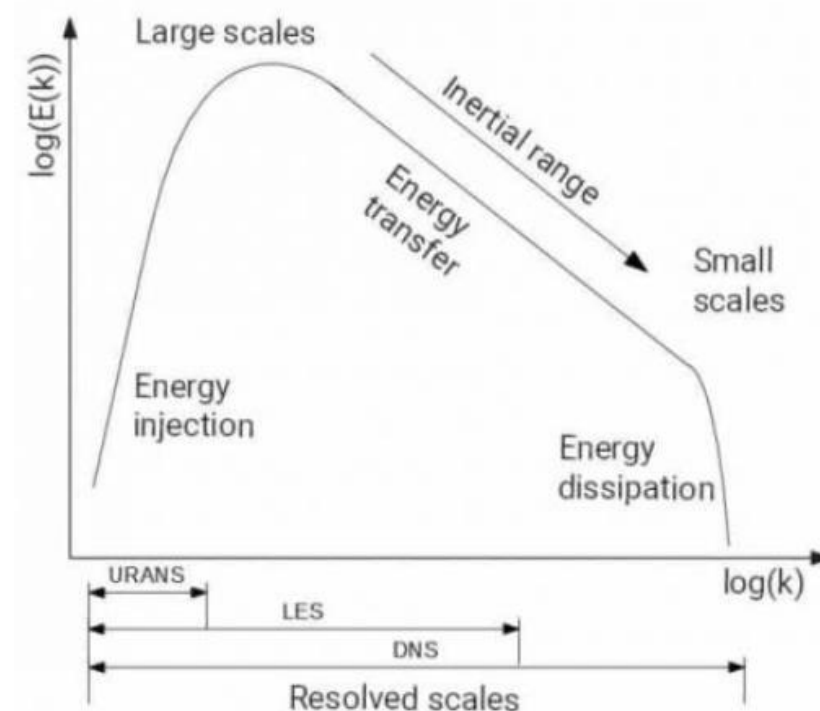
Willert and Kompenhans, 2010

Introdução

- O desenvolvimento da mecânica dos fluidos depende fortemente da visualização qualitativa e medição quantitativa de escoamentos visando o entendimento de fenômenos básicos, desenvolvimento de modelos numéricos, aplicações práticas, controle e otimização
- A medição da velocidade é de suma importância $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$
- A equação de Navier-Stokes (~1850) caracteriza os escoamentos turbulentos

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

- Soluções numéricas:
 - Média de Reynolds: $U = U_m + u'$
 - Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)
 - Large Eddy Simulation (LES)
 - Direct Numerical Simulation (DNS)



Introdução

O que desejamos medir?

- Média temporal da velocidade
- Flutuações turbulentas
- Estatísticas de ordem superior (skewness, kurtosis)
- Tensor gradiente de velocidade
- Vorticidade
- Dissipação de energia cinética turbulenta
- Aceleração
- Fluxos através de superfícies
- Correlações no tempo e espaço
- Estruturas coerentes

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \mu)^k}{n}$$

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

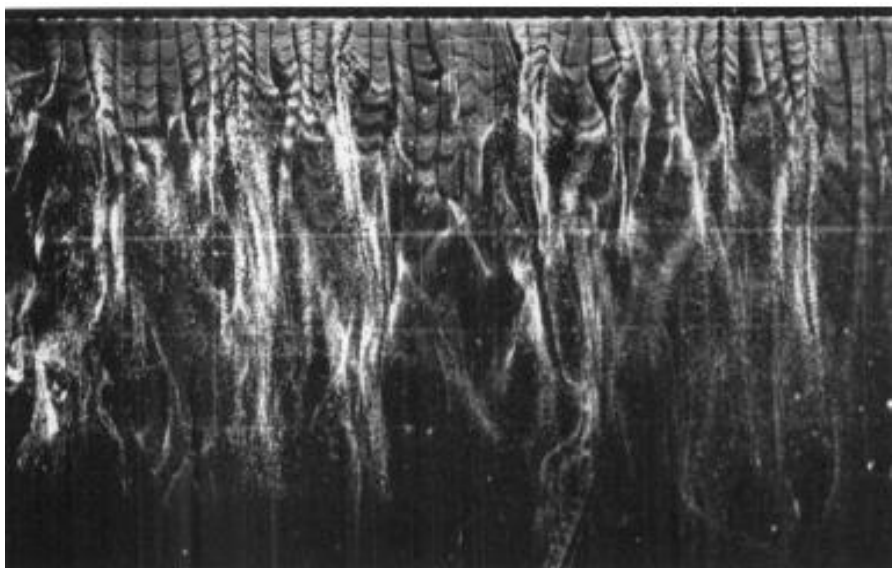
$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \hat{e}_x + \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] \hat{e}_y + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \hat{e}_z$$

$$\varepsilon_k = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Introdução

Estruturas coerentes: regiões do escoamento turbulento onde as propriedades do fluido (ex. velocidade, vorticidade, pressão ou temperatura) apresentam um comportamento organizado e correlacionado no espaço e no tempo

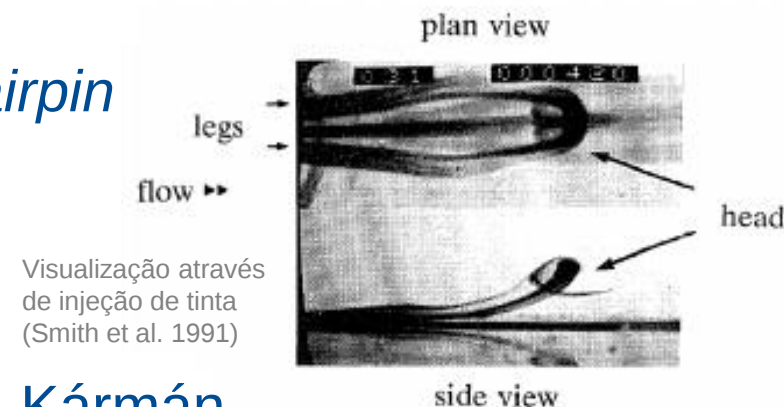
- Streaks de alta e baixa velocidade



Visualização através de bolhas de hidrogênio (Kline et al. 1967)

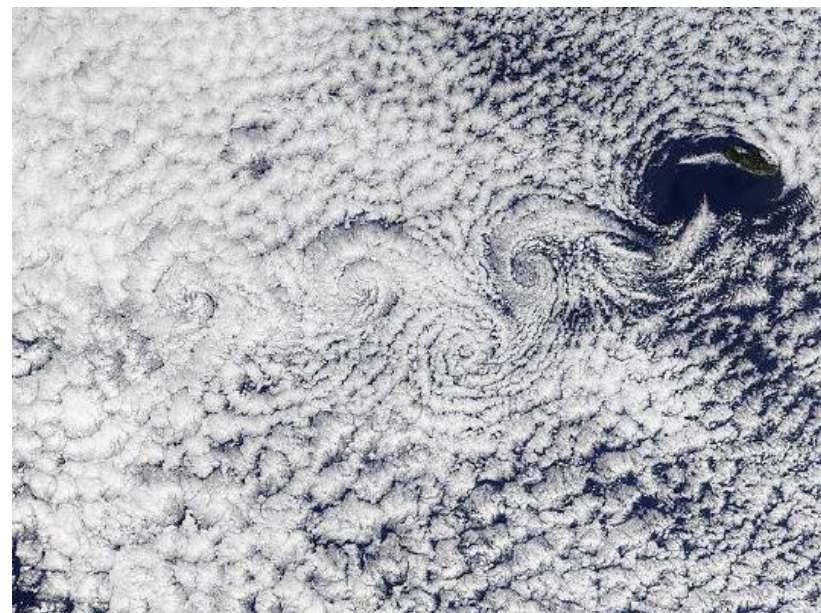
- Ejeções ($u' < 0$ & $v' > 0$)
- Sweeps ($u' > 0$ & $v' < 0$)

- Vórtices tipo *hairpin*



Visualização através de injeção de tinta (Smith et al. 1991)

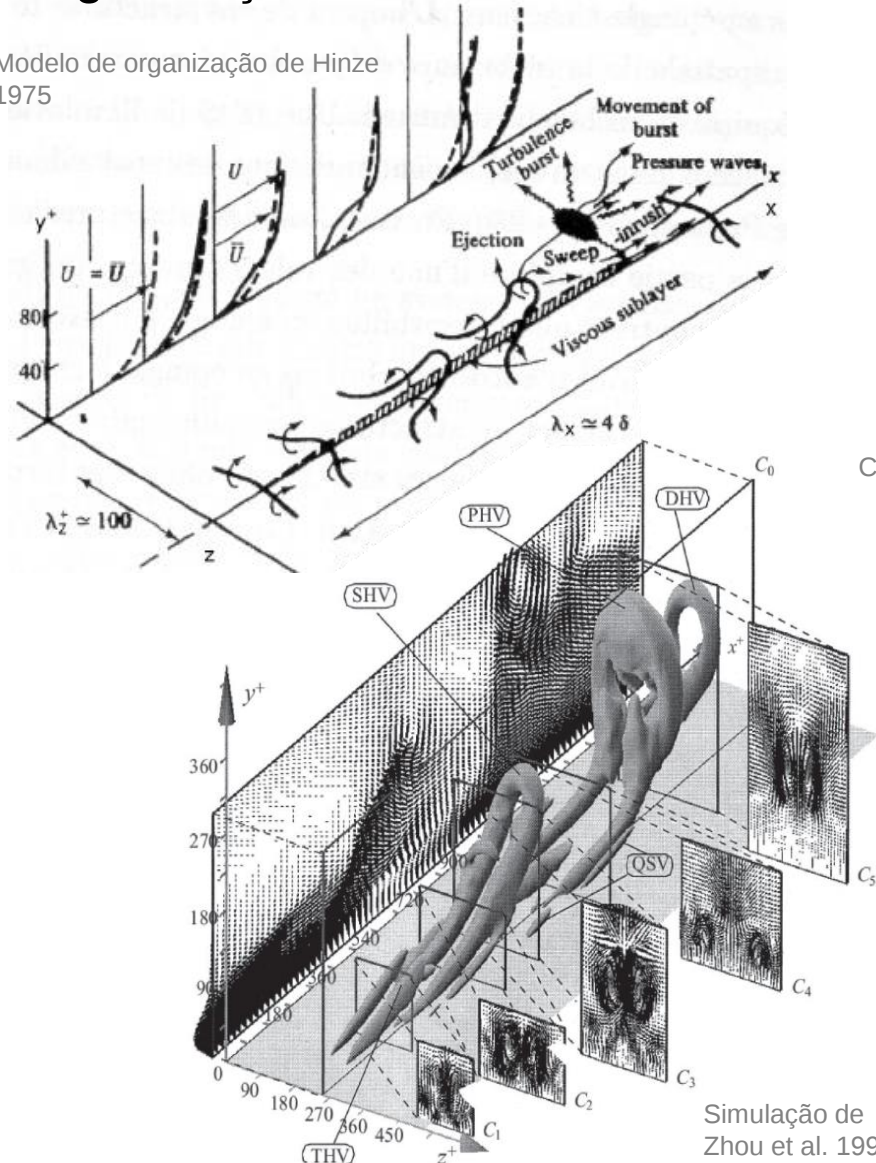
- Vórtices de von Kármán



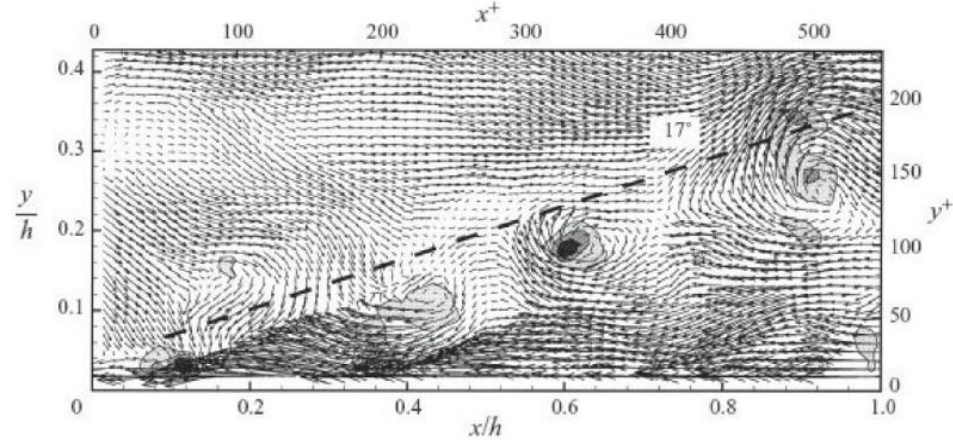
Visualização do escoamento de nuvens em Ilha da Madera pelo satélite Terra-MODIS (NASA 2002)

Organização das estruturas coerentes em escoamento turbulento de camada limite

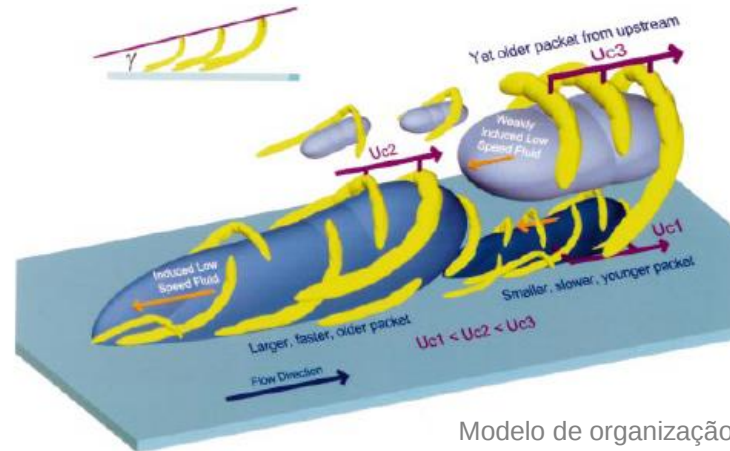
Modelo de organização de Hinze 1975



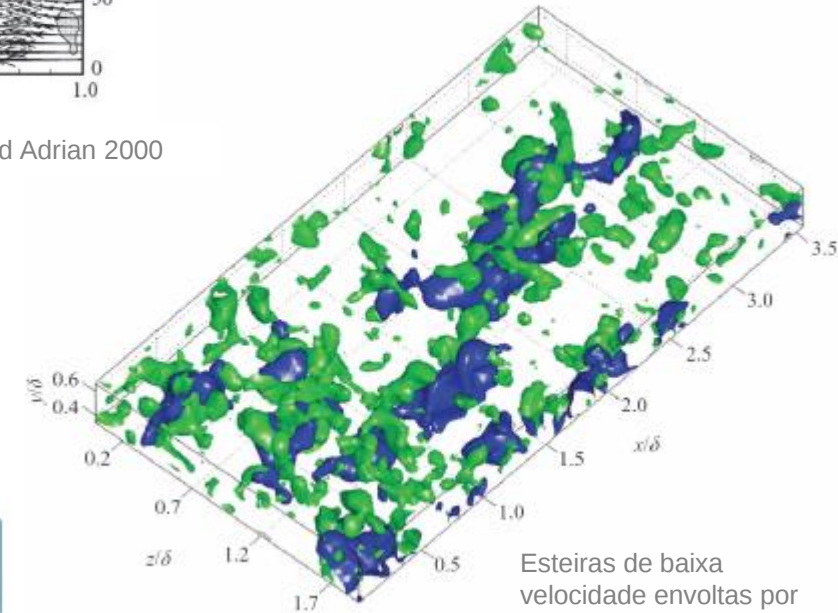
Simulação de Zhou et al. 1999



Campo de velocidade instantâneo medido por PIV de Christensen and Adrian 2000



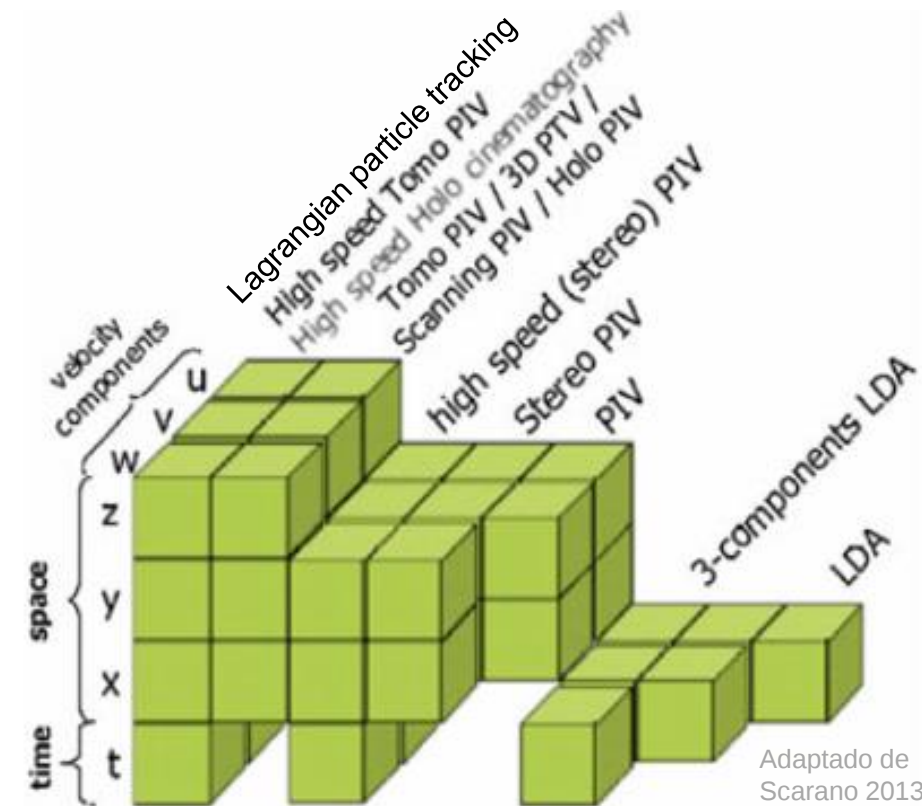
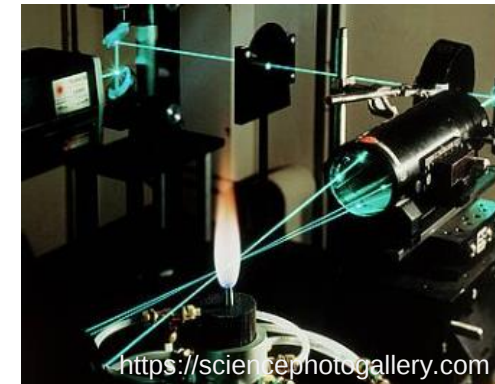
Modelo de organização de Adrian 2000



Esteiras de baixa velocidade envolvidas por vórtices visualizadas através de tomo-PIV por Elsinga et al. 2010

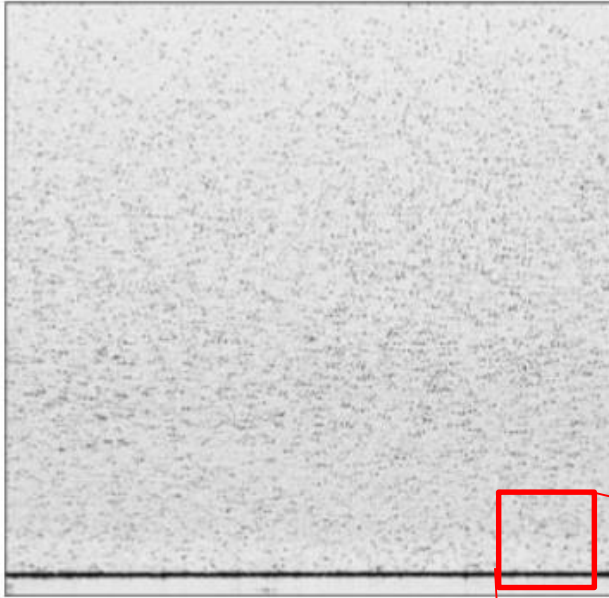
Medida de velocidade

- Medidas pontuais:
 - Tubo de Pitot
 - Anemômetro de fio/filme quente
 - Anemômetro laser-Doppler
- Medidas de campo:
 - Velocimetria por acompanhamento de partículas (*particle tracking velocimetry*, PTV)
 - Velocimetria por *speckle* de laser (*laser speckle velocimetry*, LSV)
 - Velocimetria por imagem de partículas (*particle image velocimetry*, PIV)
 - Rastreamento de partículas Lagrangiano (*Lagrangian particle tracking*, LPT) ou 4D-PTV

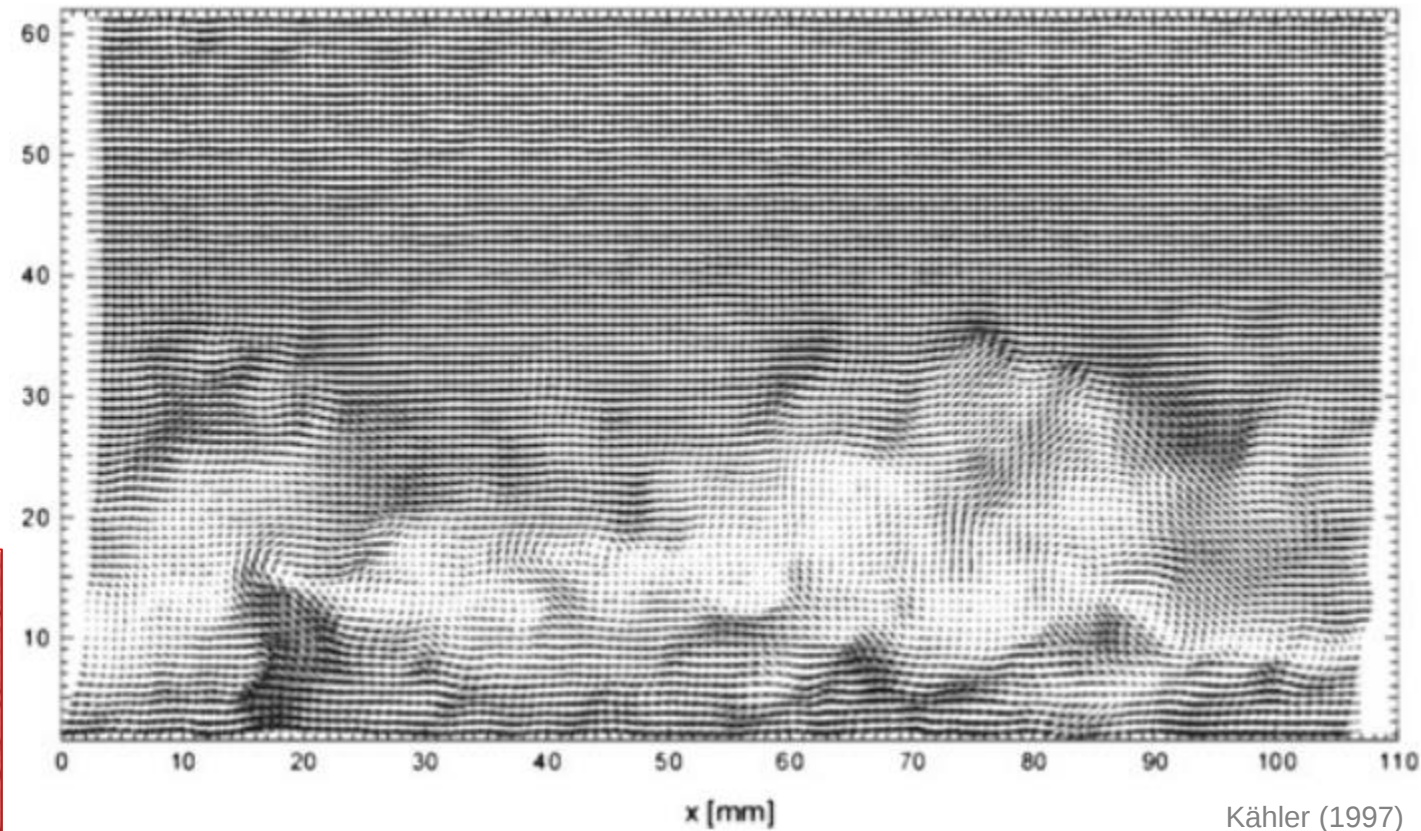
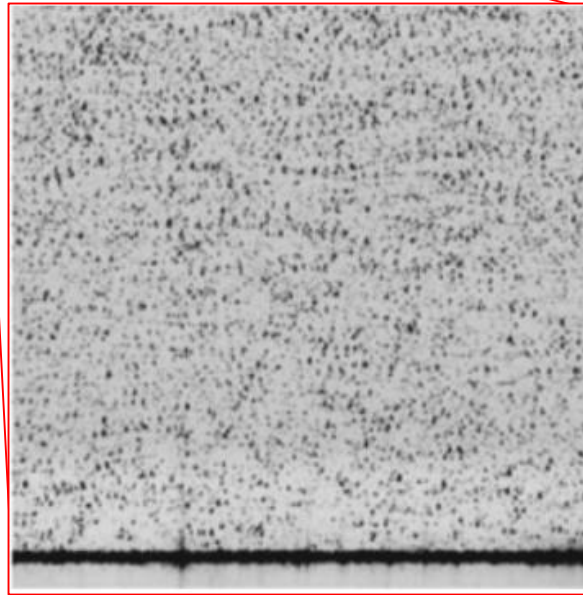


Adaptado de
Scarano 2013

Medida de velocidade



Sobreposição de par de imagens de PIV (cor invertida)



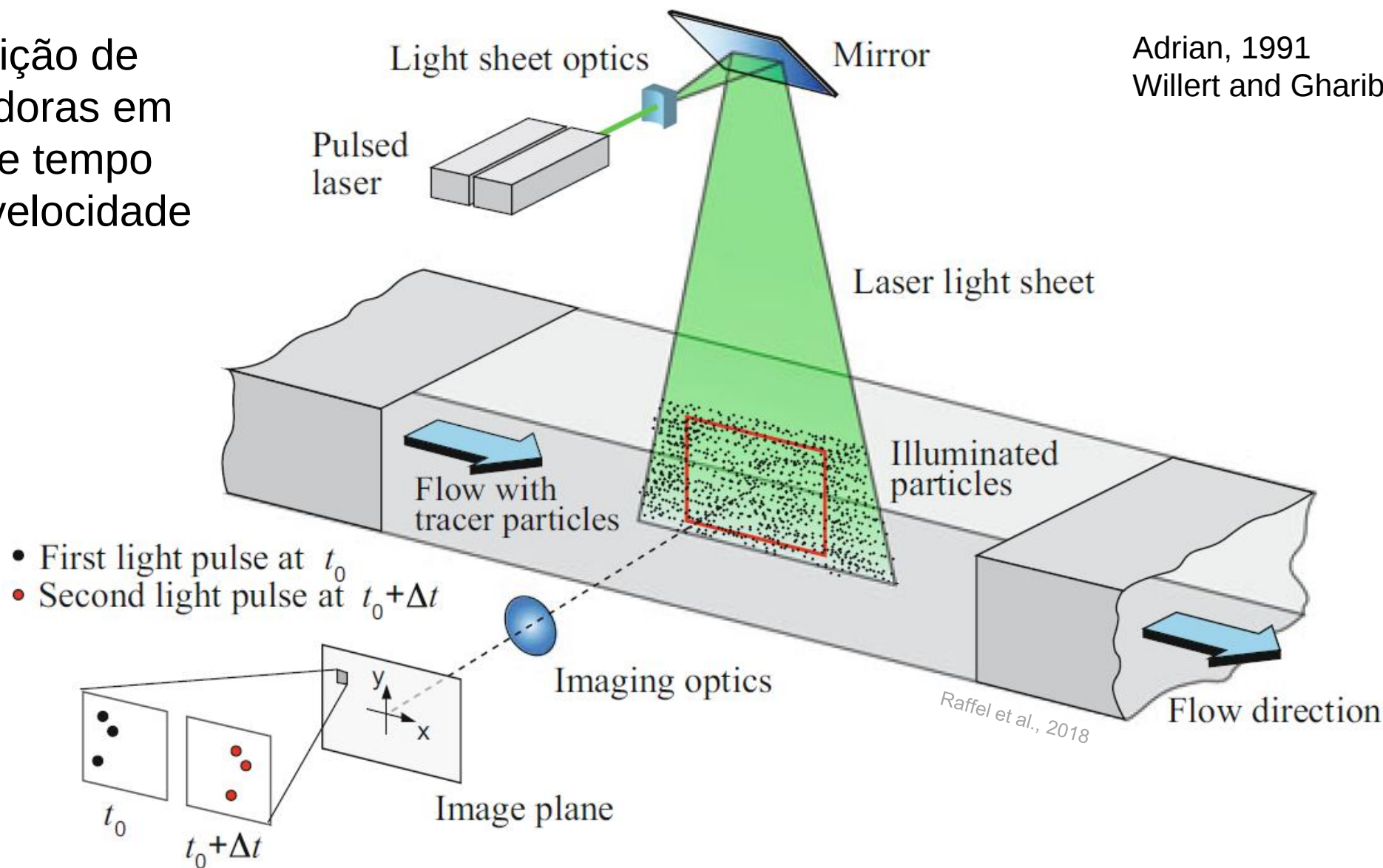
Kähler (1997)

Exemplo de campo instantâneo de velocidades medido através de PIV

Sistema de PIV planar tradicional

Registro da posição de partículas traçadoras em dois instantes de tempo para estimar a velocidade do escoamento

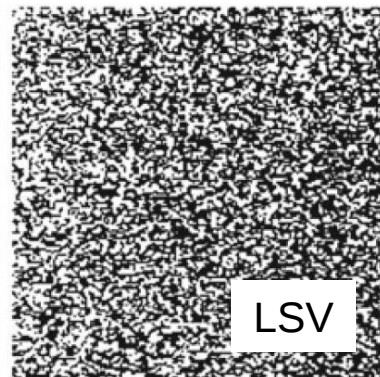
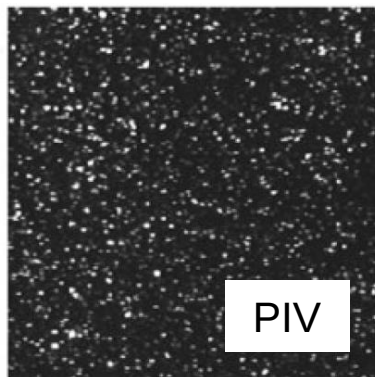
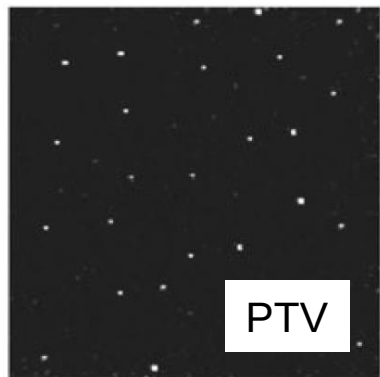
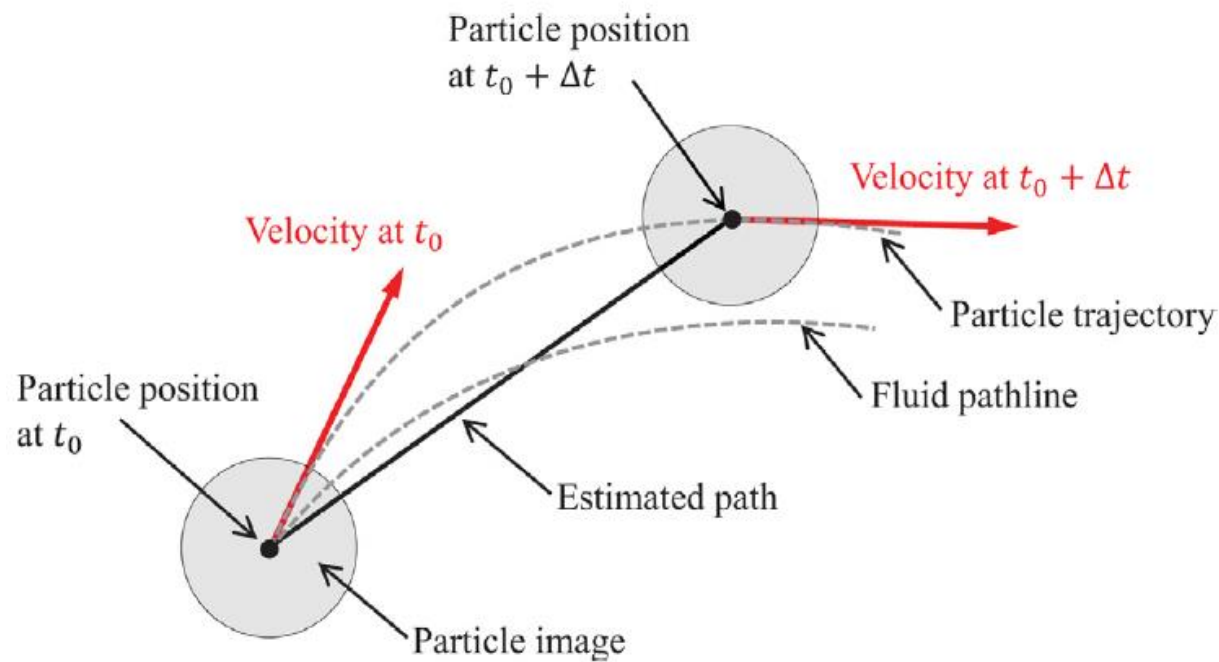
$$\bar{u} = \frac{\Delta \vec{x}(\vec{x}, t)}{\Delta t}$$



Adrian, 1991
Willert and Gharib, 1991

- **Partículas traçadoras:** adição de partículas traçadoras (*seeding*) ao escoamento
- **Iluminação:** iluminação planar ou volumétrica das partículas traçadoras usando um intervalo curto e conhecido de pulso de luz
- **Aquisição da imagem:** registro da luz espalhada (*light scattered*) ou emitida (*emitted light*) pelas partículas traçadoras nos diferentes quadros da câmera
- **Calibração:** mapeamento espacial entre a imagem das câmeras e as coordenadas do mundo
- **Pré-processamento:** melhoria das imagens de partículas (realce e redução de ruído)
- **Análise do movimento:** cálculo do deslocamento entre pulsos de luz através das imagens das partículas
- **Pós-processamento:** detecção e remoção de vetores espúrios, cálculo de estatísticas, estatísticas condicionais, extração de grandezas derivadas, *data assimilation* e visualização dos dados

Partículas traçadoras



- Partículas traçadoras devem seguir o fluido (número de Stokes < 0.1)

$$\text{Stk} = \frac{\tau_P}{\tau_f}$$

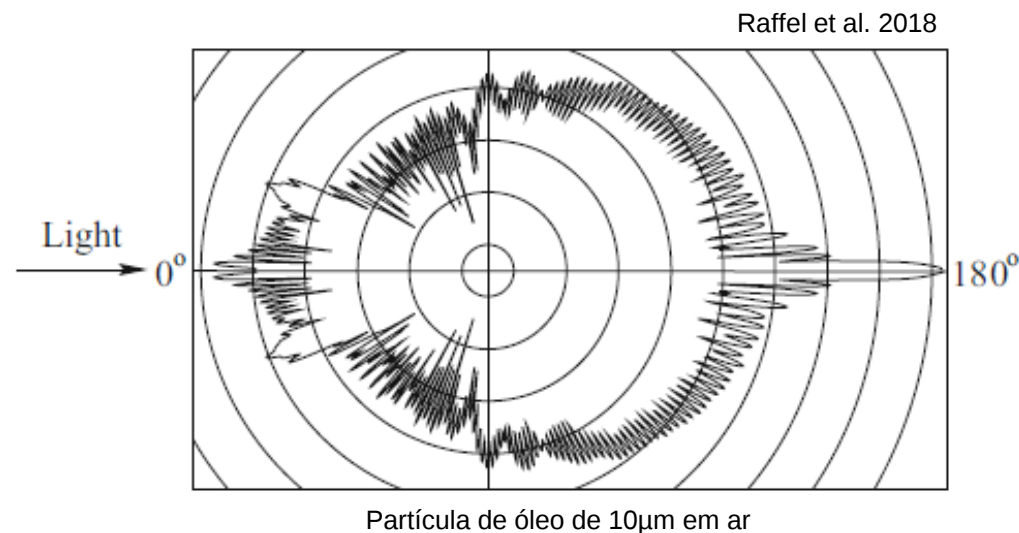
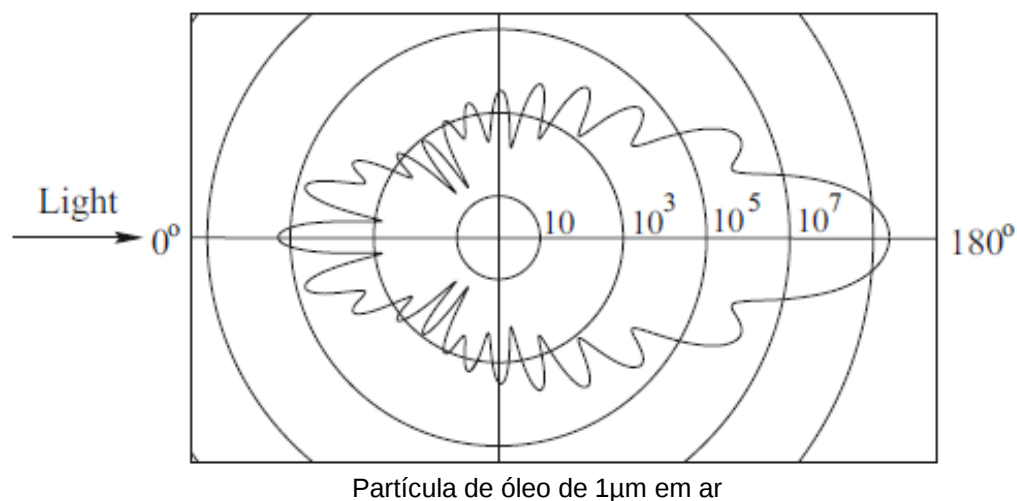
$$\tau_P = d_p^2 \frac{(\rho_p - \rho)}{18\mu}$$

τ_f – tempo de resposta característico do escoamento; ρ_p – densidade da partícula; d_p – diâmetro da partícula; ρ – densidade do fluido; μ – viscosidade dinâmica do fluido

- Diâmetro típico de partículas
Ar: ~1-3 micron (sólida, gotículas de óleo)
~300-500 micron (bolhas de sabão com hélio)
Líquido: ~10-100 micron (esferas ocas de vidro, poliamida, gotículas imisíveis)
- Distribuição de diâmetros estreita
- Distribuição espacial homogênea das partículas
- Concentração média das partículas
 $N_{\text{ppp}} = 0.02\text{-}0.2$ *particle per pixel*

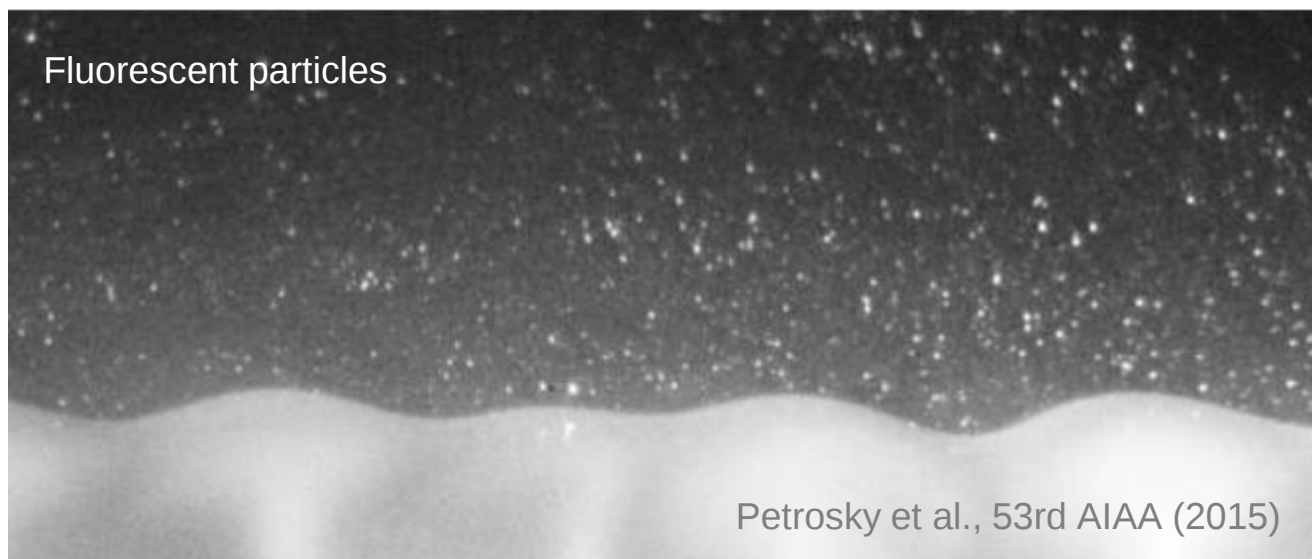
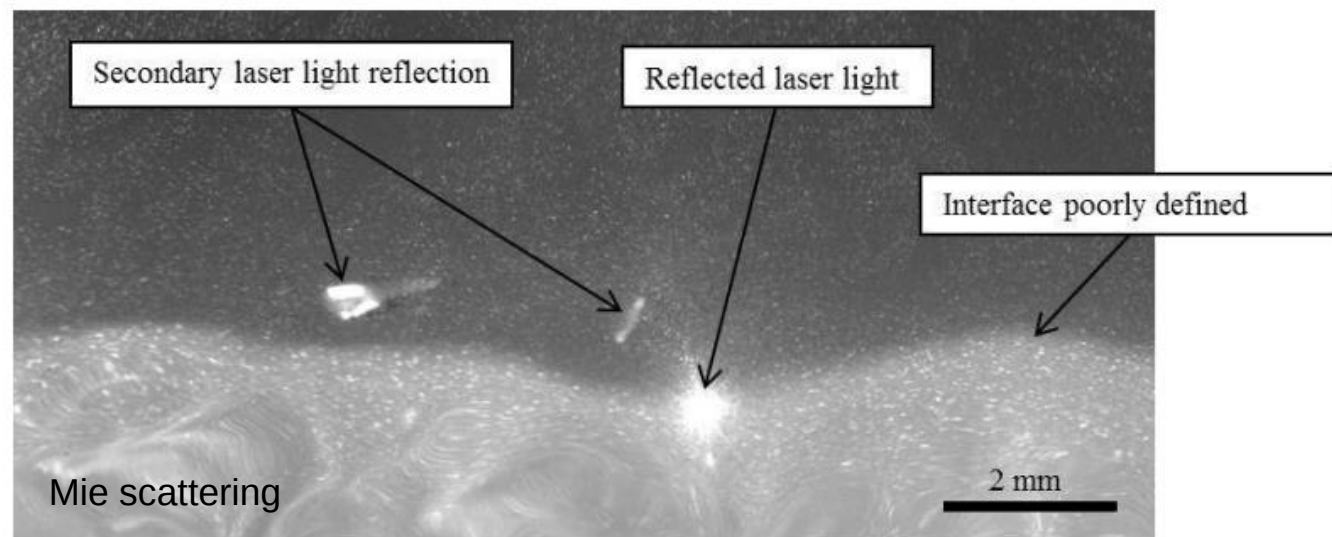
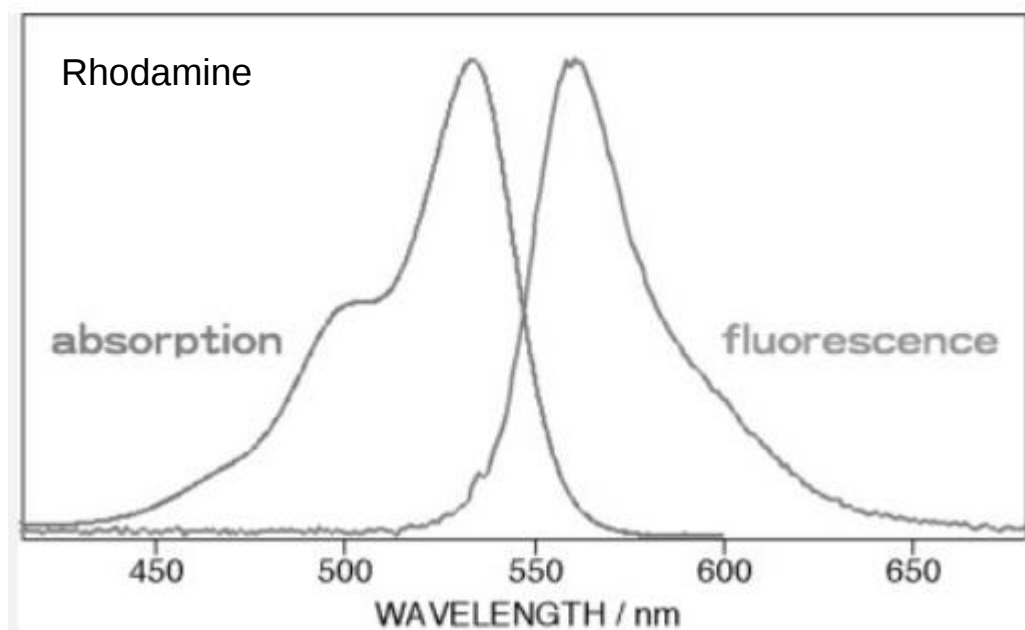
Partículas traçadoras

- Devem espalhar luz suficiente para o registro na imagem (boa razão sinal/ruído)
- Espalhamento de luz segue a teoria de Mie
 - Tamanho da partícula
 - Razão dos índices de refração partícula/fluido
 - Forma da partícula
 - Orientação da câmera
- Otimização do tamanho da partícula: quantidade de luz vs. número de Stokes



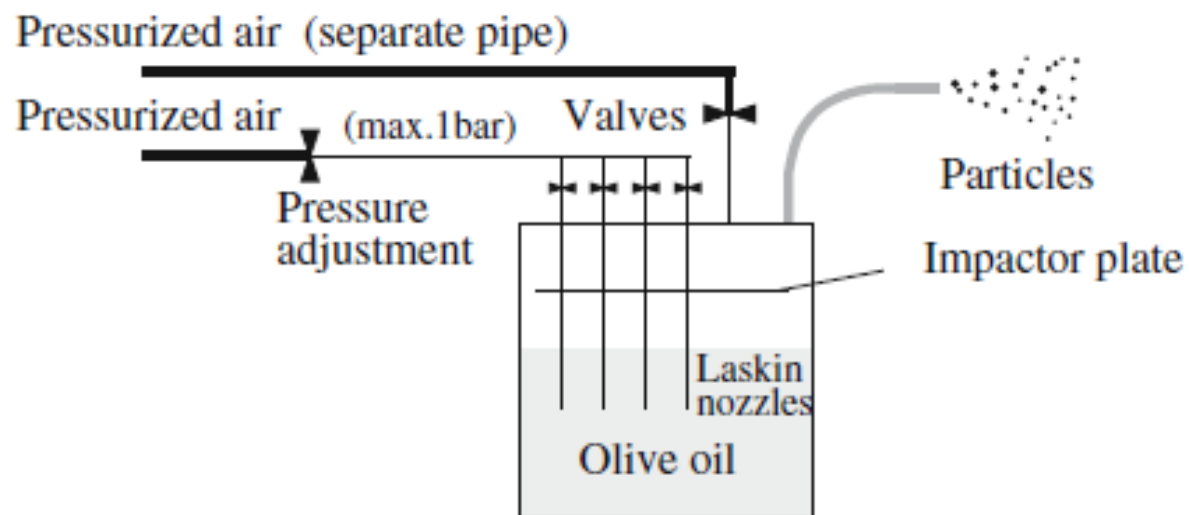
Partículas traçadoras

Partículas fluorescentes + filtros ópticos podem ser usadas para supressão de reflexões indesejáveis da fonte luminosa (paredes, interfaces, outras partículas, etc.)

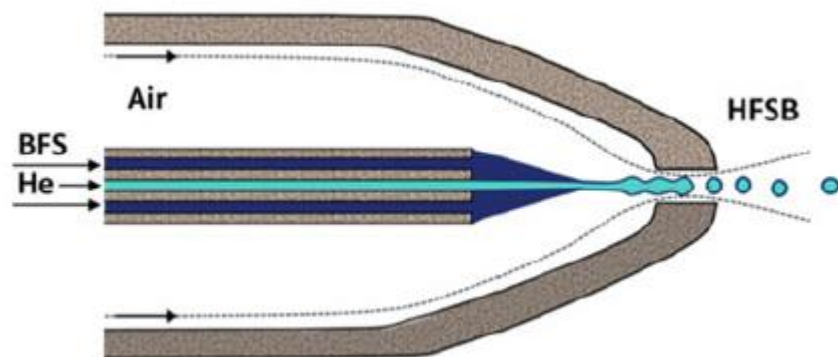


Partículas traçadoras

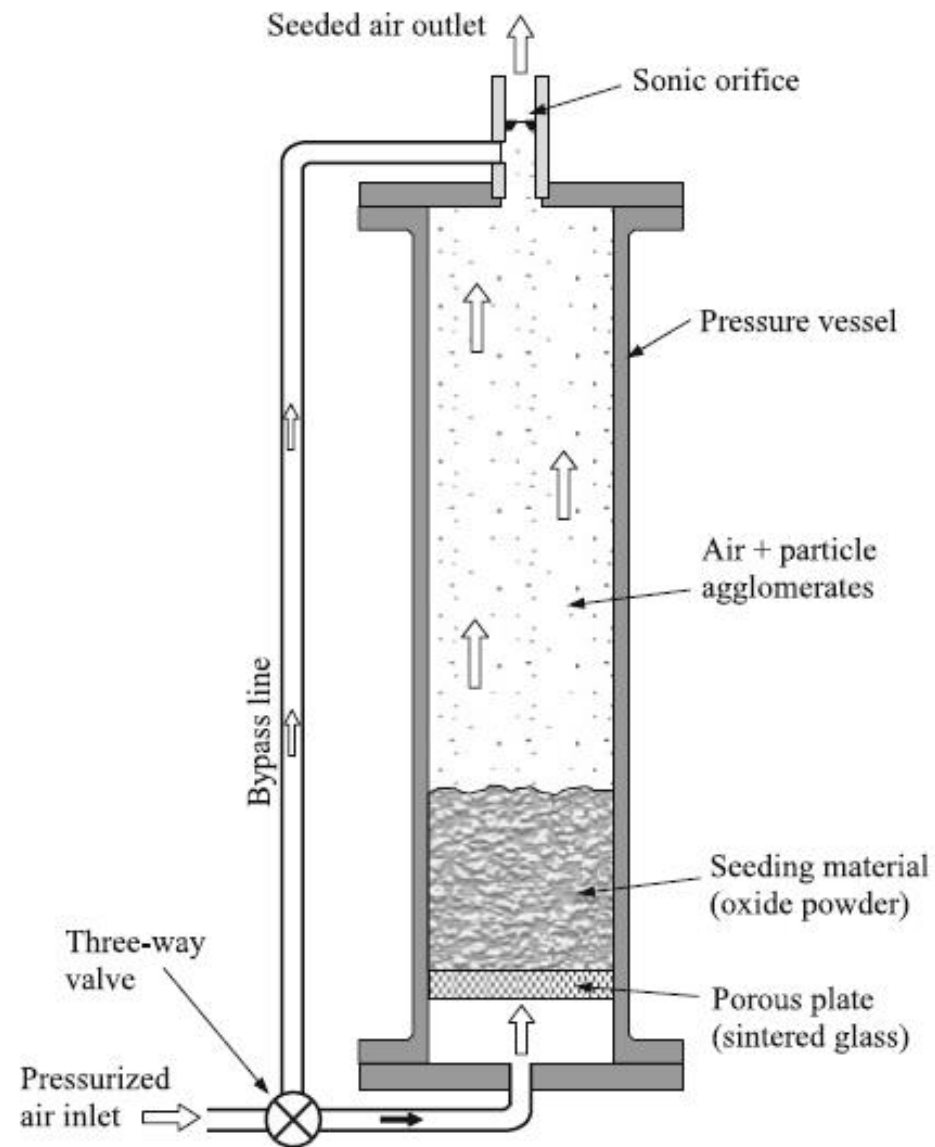
Geradores de partículas para escoamentos gasosos



Gerador de gotículas de óleo



Gerador de bolhas de sabão preenchidas com hélio

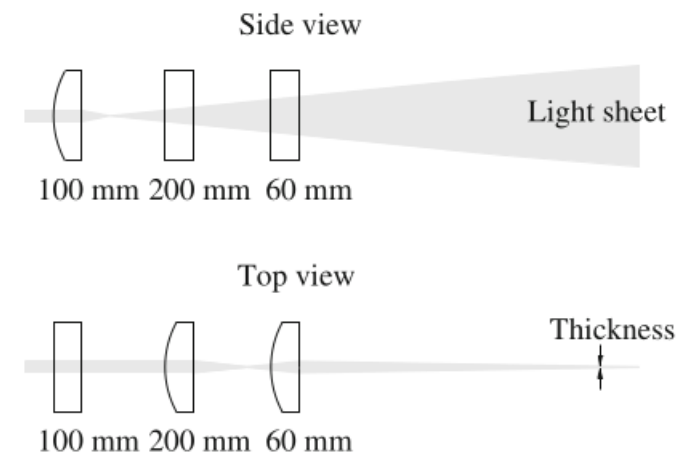
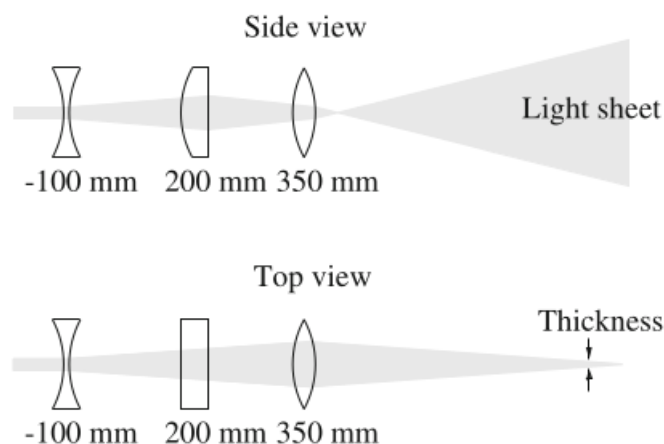
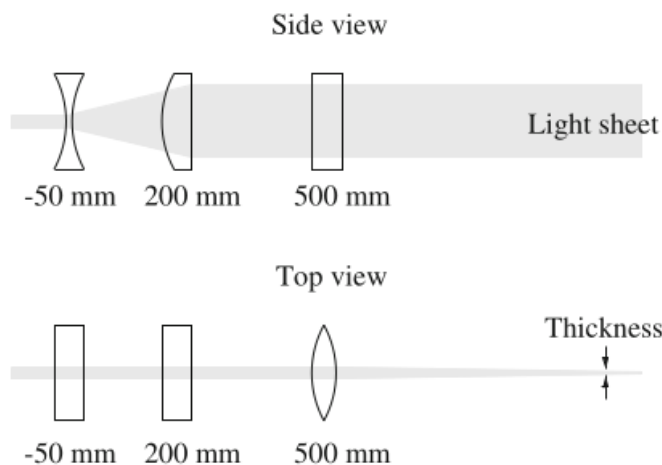
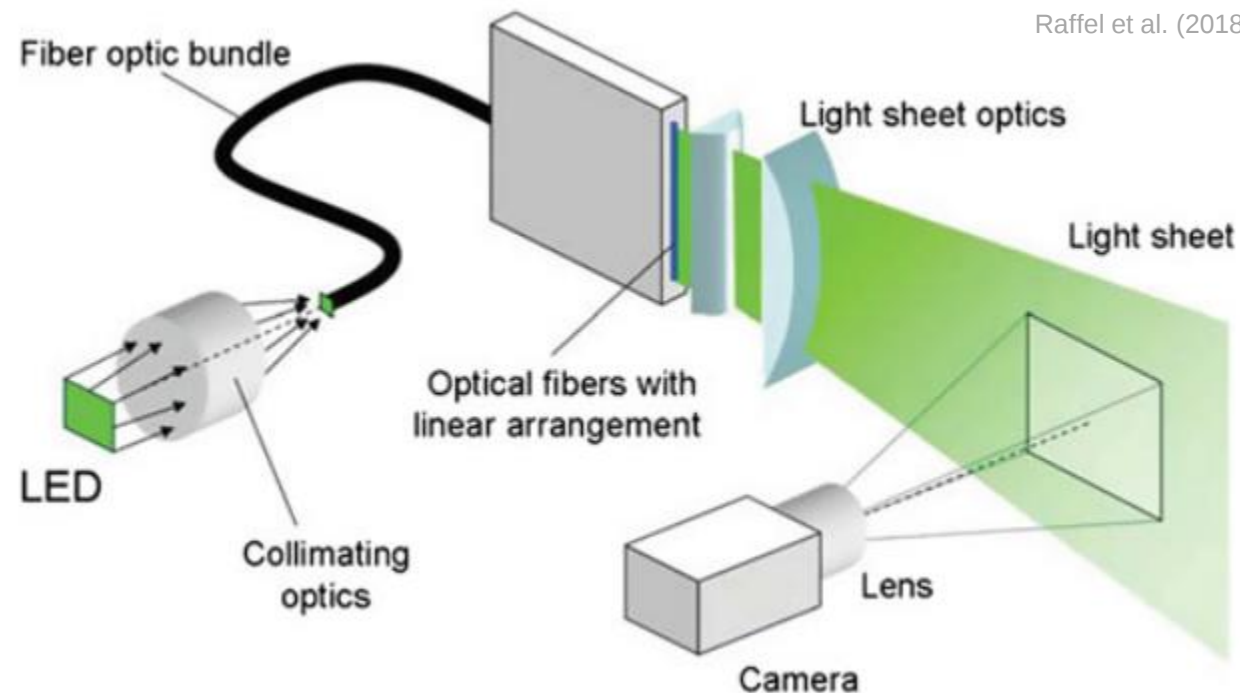


Gerador em leito fluidizado

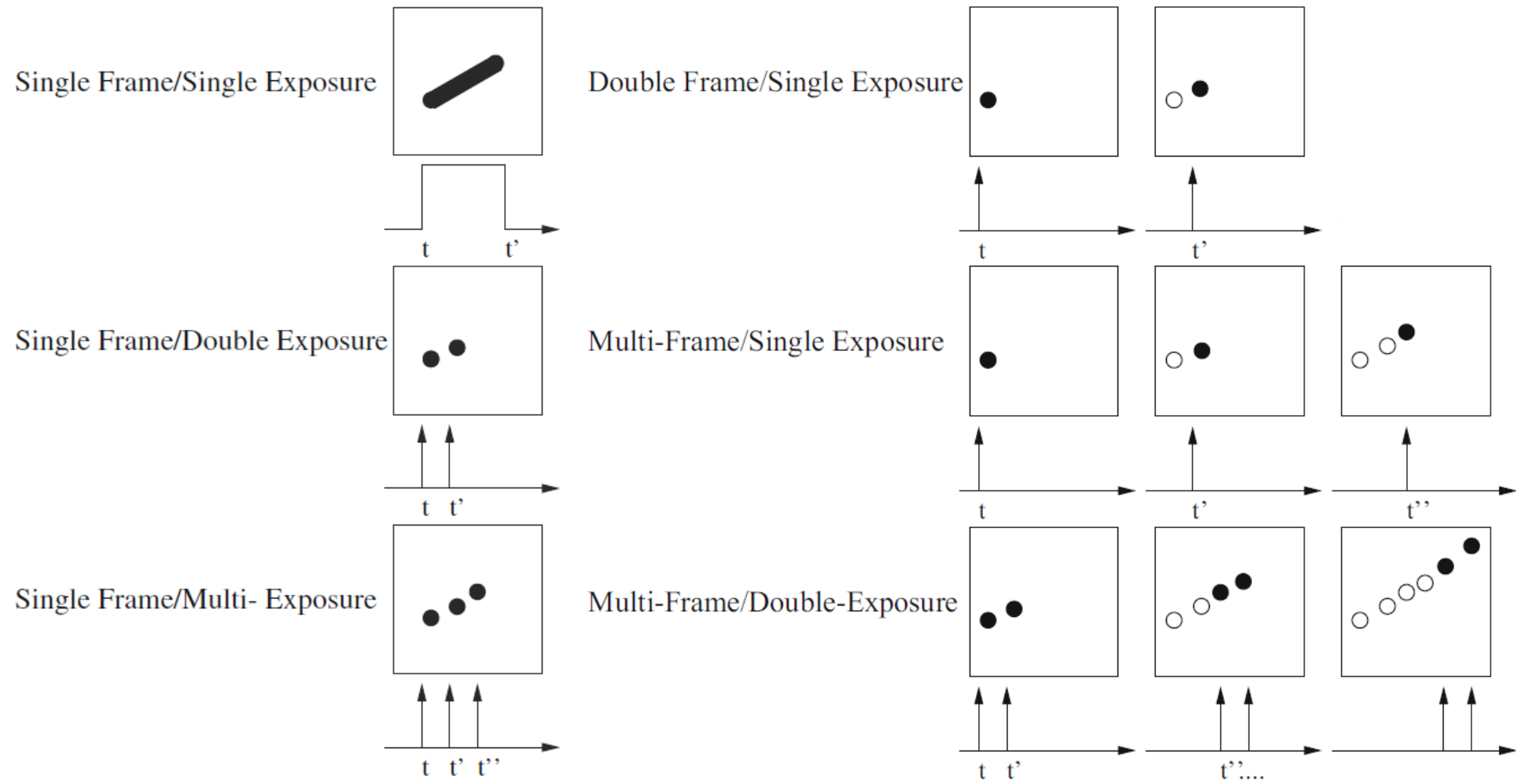
Iluminação

Sistema de iluminação pulsada com intervalo conhecido

- Fonte incoerente (estrobo/flash)
- Fonte coerente (laser)
- Conjunto óptico para formação do plano/volume de luz



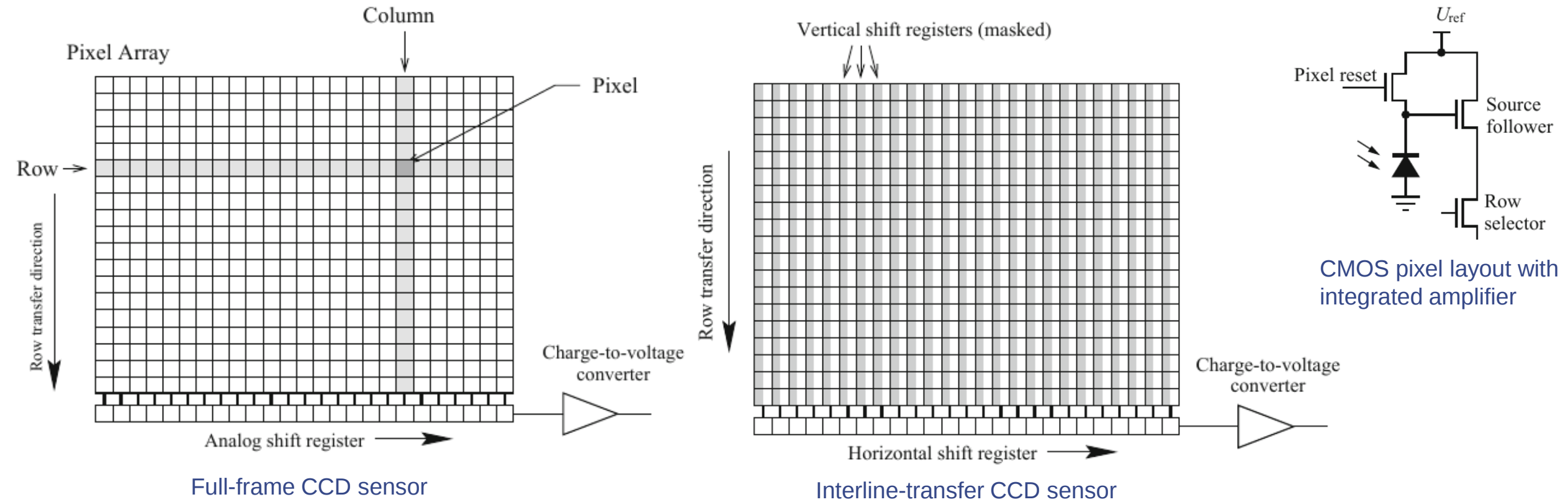
Aquisição da imagem



Raffel et al., 2018

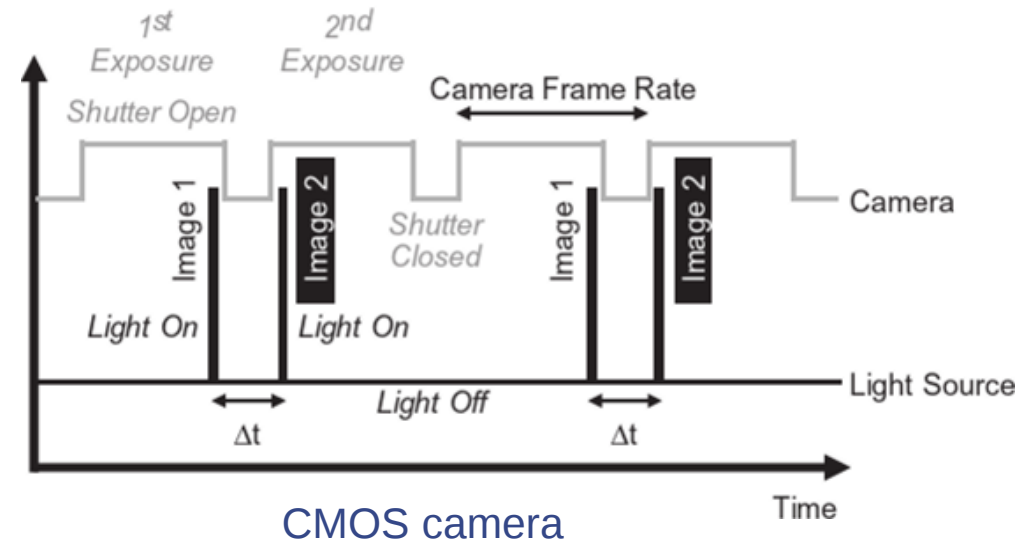
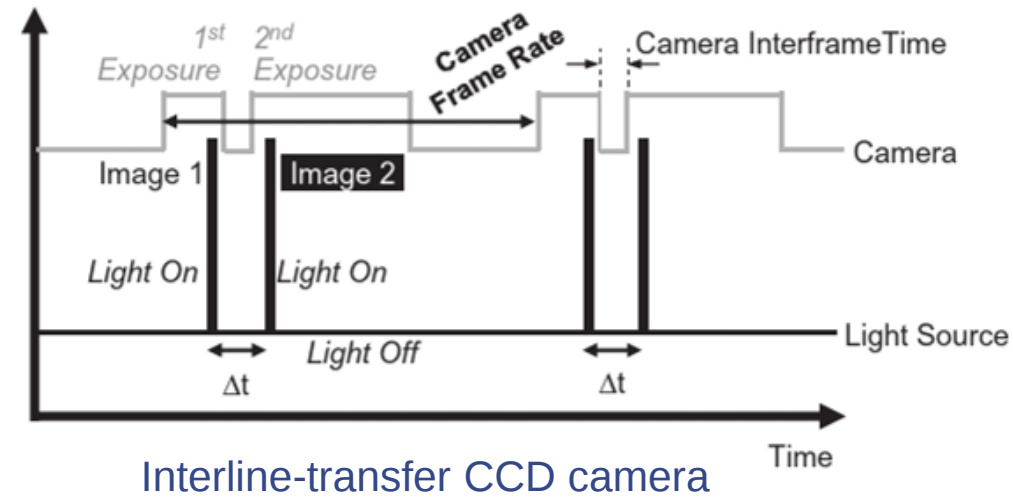
Aquisição da imagem

Câmeras para PIV: CCD, CMOS, sCMOS, baseada em eventos



Aquisição da imagem

Técnica de *frame-straddling* para quadro duplo com exposição única (*double frame single exposure*)



Subtração de iluminação de fundo (mínimo, média, média móvel, mediana, etc.)



Imagem original com iluminação não homogênea e reflexão de luz na parede

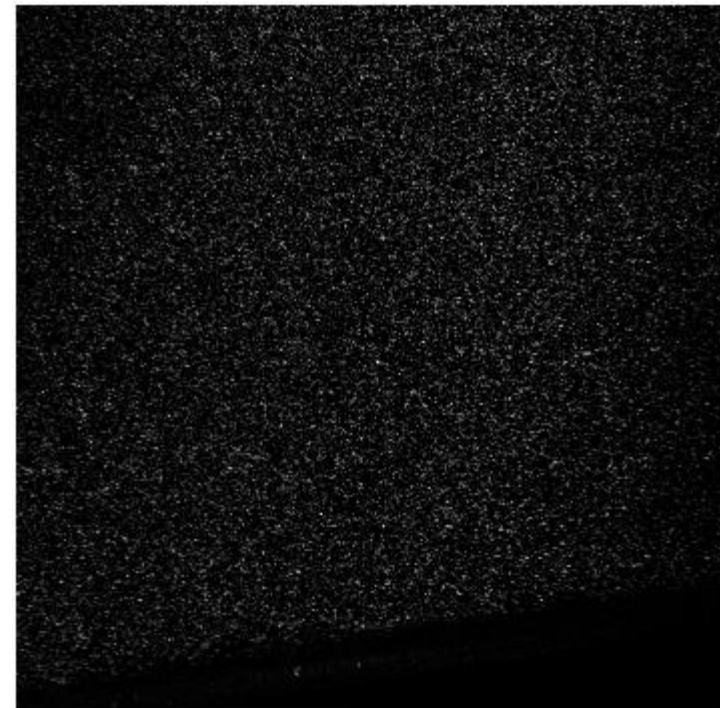


Imagem corrigida após subtração de iluminação de fundo (média histórica)

Subtração de iluminação de fundo (mínimo, média, média móvel, mediana, etc.)

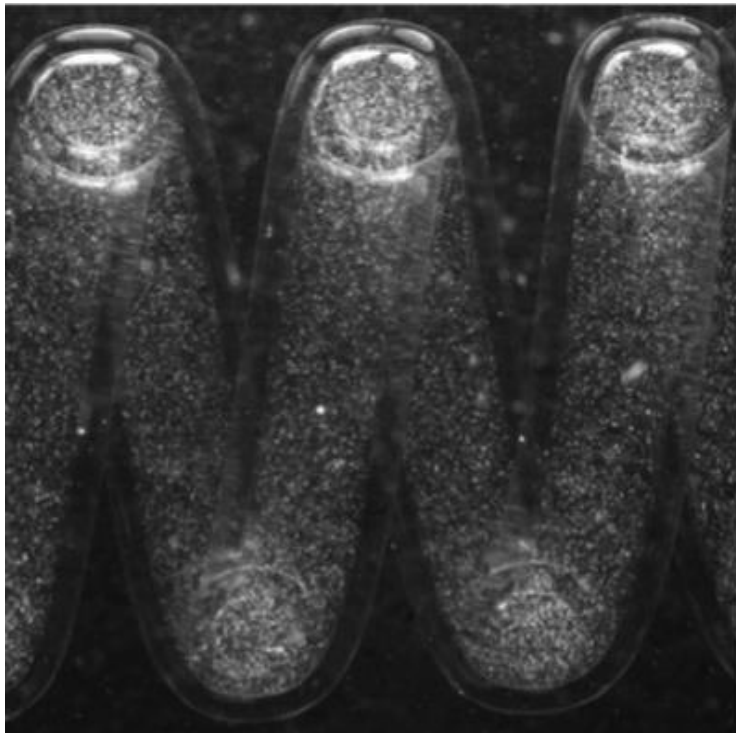


Imagem original com iluminação não homogênea e reflexão de luz na parede

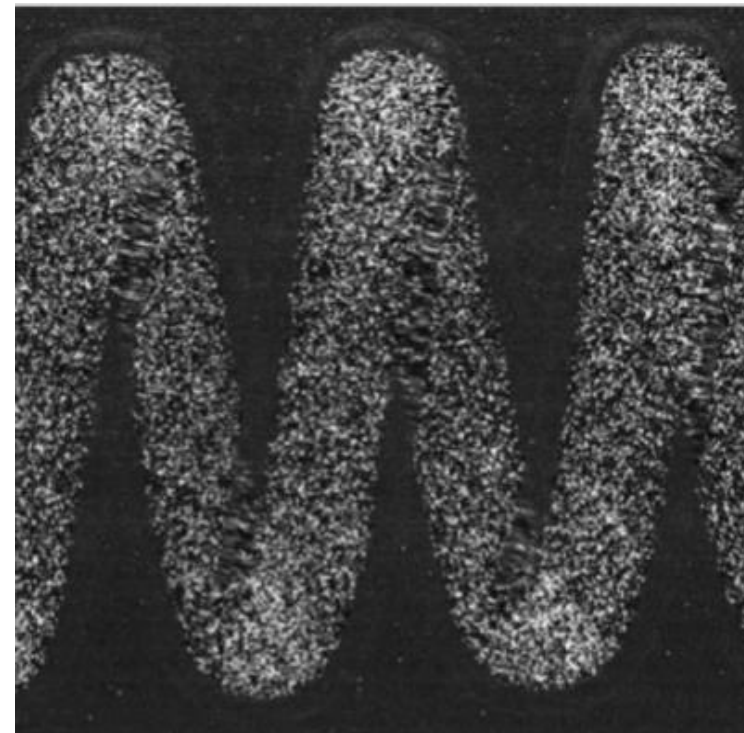


Imagem corrigida após subtração de iluminação de fundo (média móvel histórica)

Filtros FFT passa-alta ou passa-faixa

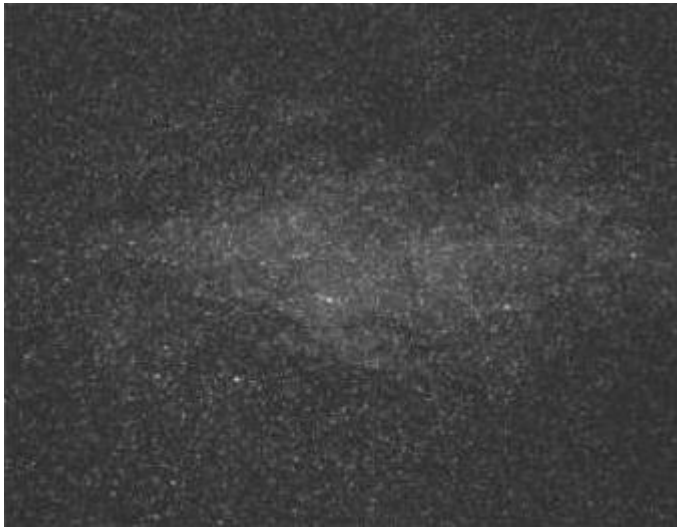


Imagem original com iluminação não homogênea



Transformada de Fourier rápida (FFT)



Alta frequência



Baixa frequência

Normalização por janelas locais

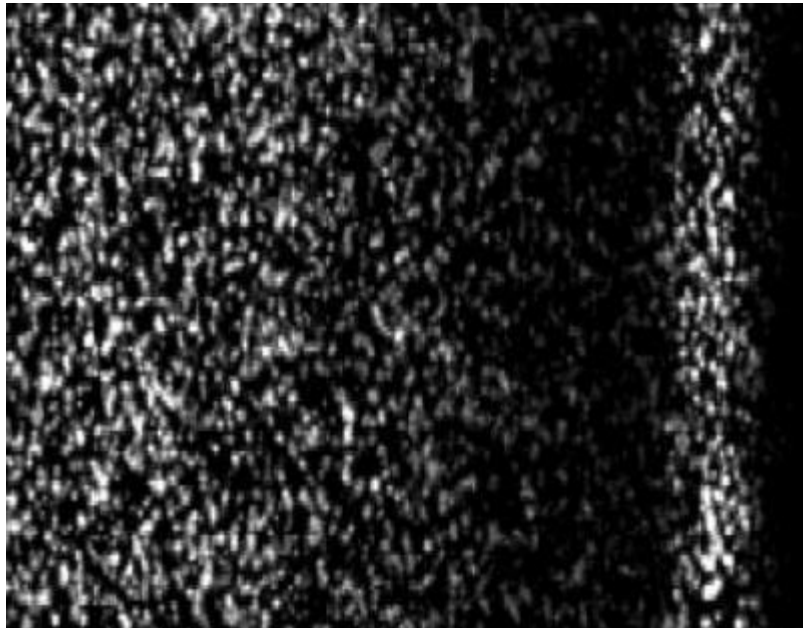
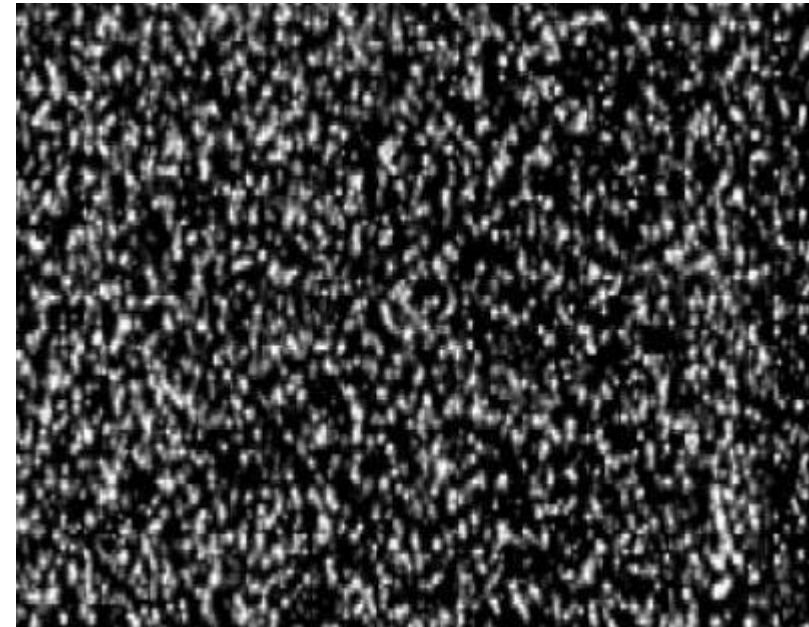


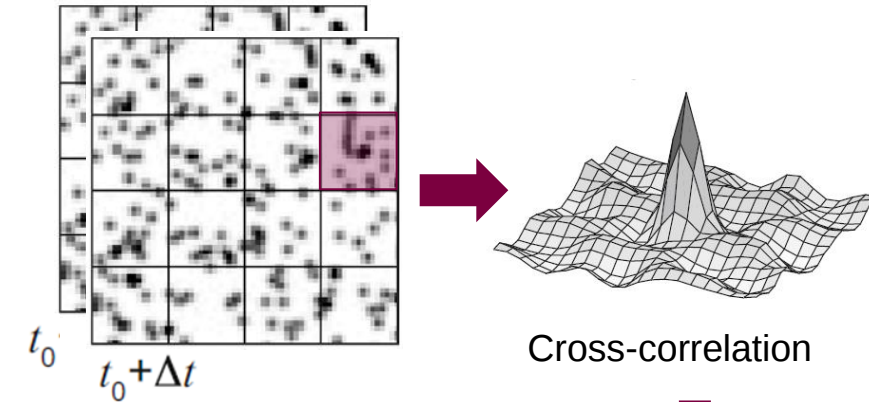
Imagem original com iluminação não homogênea



Correção da iluminação através normalização por janelas locais

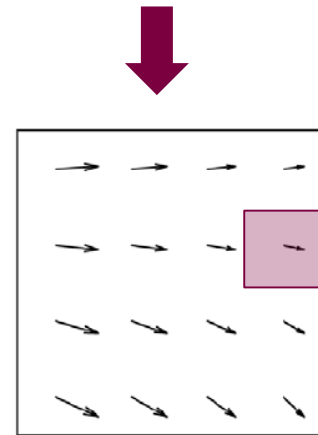
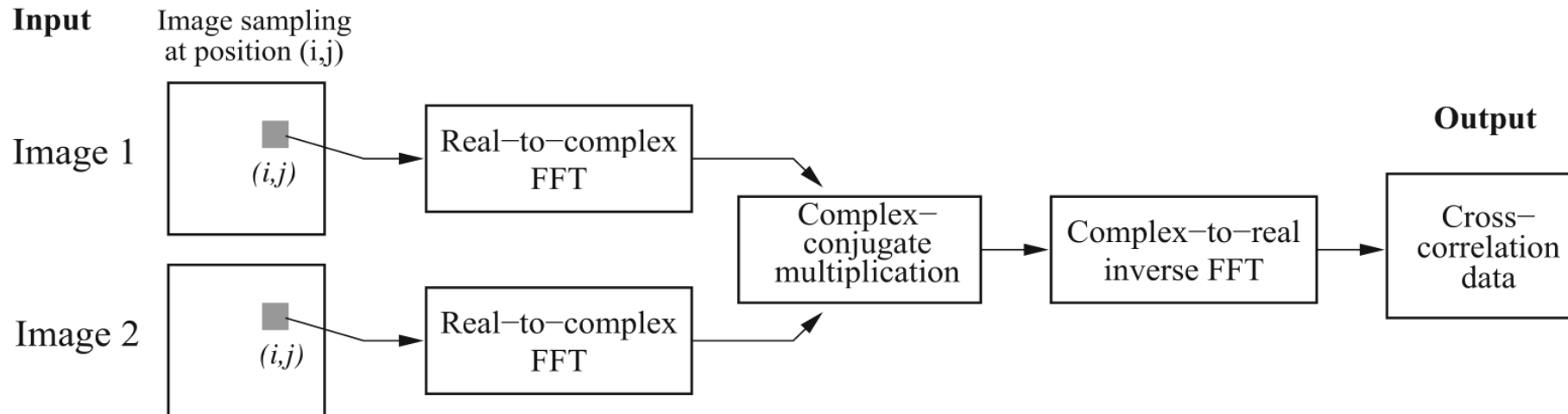
- Correlação cruzada bidimensional

$$r(x, y) = I(x, y) \star I'(x, y) = \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n I(i, j) I'(i + x, j + y)$$



- Correlação cruzada através da transformada de Fourier rápida

$$r(x, y) \Leftrightarrow \hat{I} \cdot \hat{I}'^*$$

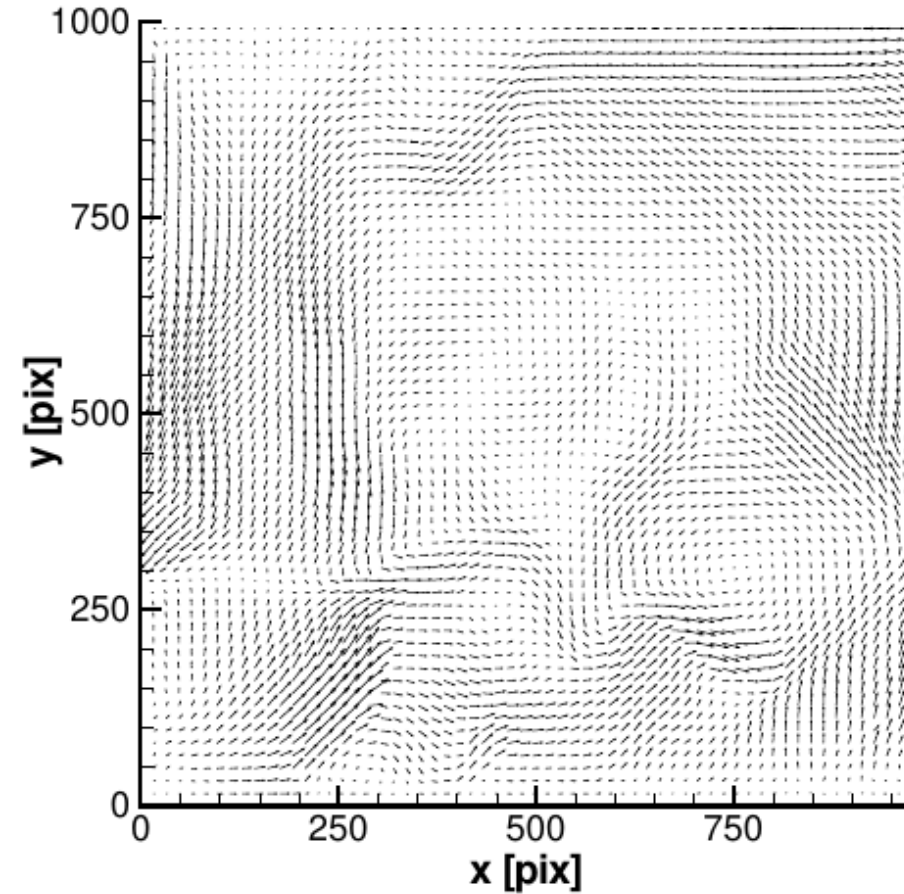


$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{X}}{\Delta t} = \frac{1}{M} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

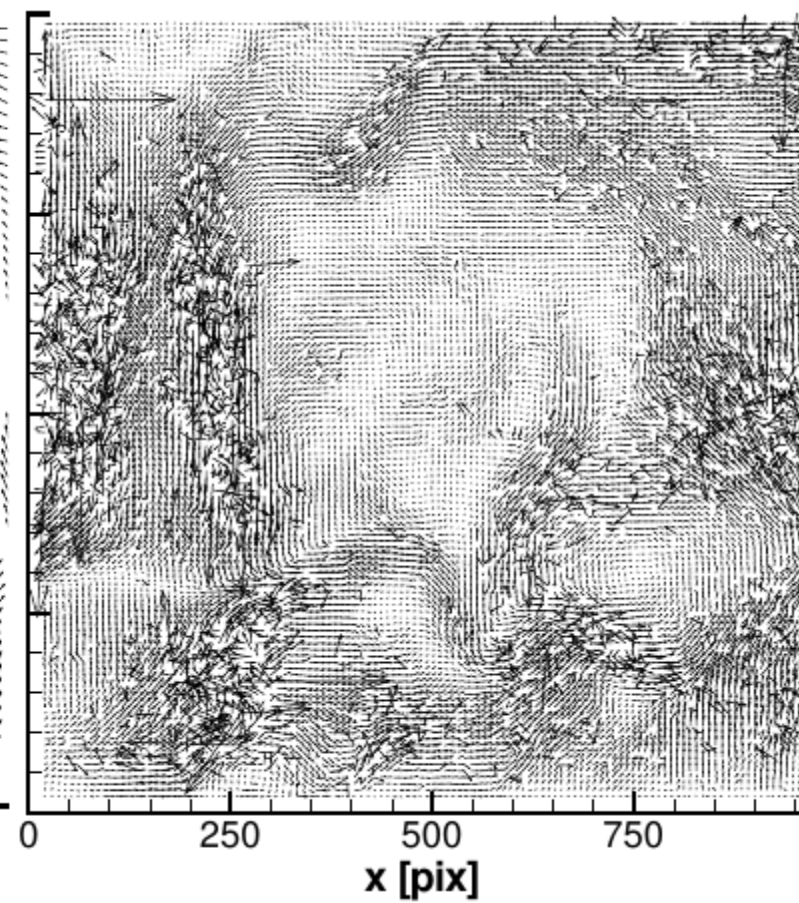
- Detecção sub-pixel do pico de correlação (ajuste parabólico, gaussiano, etc.)
- Métodos de interrogação de múltiplos passes:
 - Campo de deslocamentos da iteração anterior é utilizado para deslocar a janela da iteração seguinte
 - Algoritmos de validação de vetores e remoção de vetores espúrios
 - Gradiente do campo de deslocamentos da iteração anterior pode ser usado para deformar a janela ou imagem de partículas
 - Redução do tamanho da janela de interrogação ao longo das iterações
 - Aumento da resolução através de algoritmos híbridos de PIV+PTV
 - Aumento da faixa dinâmica, precisão e da resolução espacial

Análise do movimento

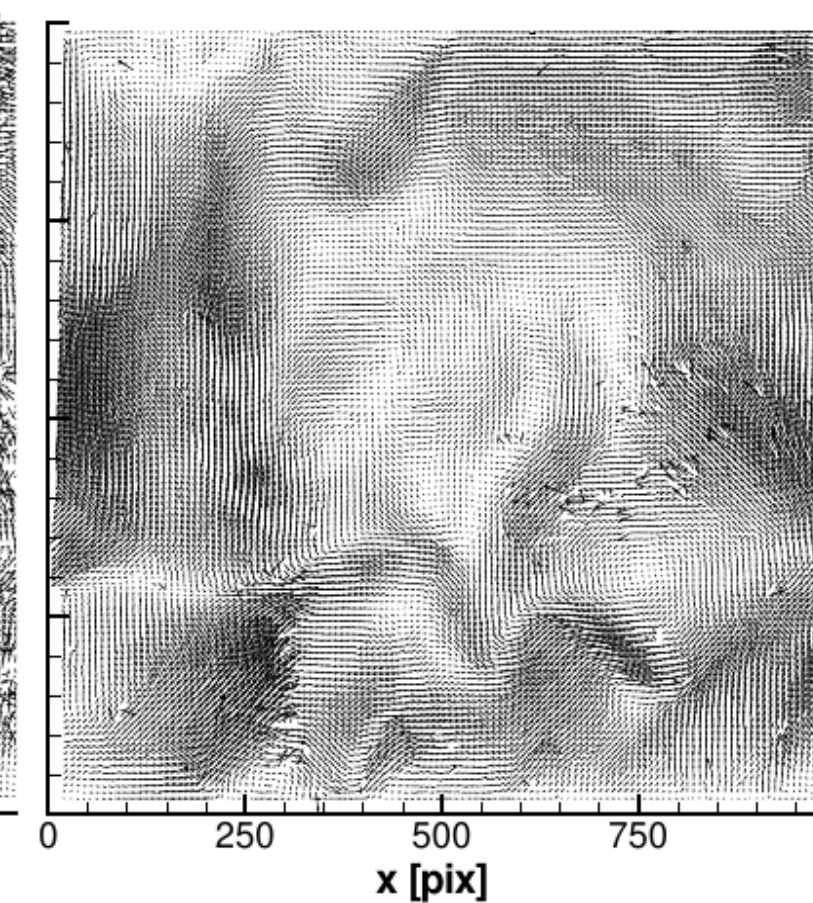
Single-pass cross-correlation with coarse grid



Single-pass cross-correlation with fine grid

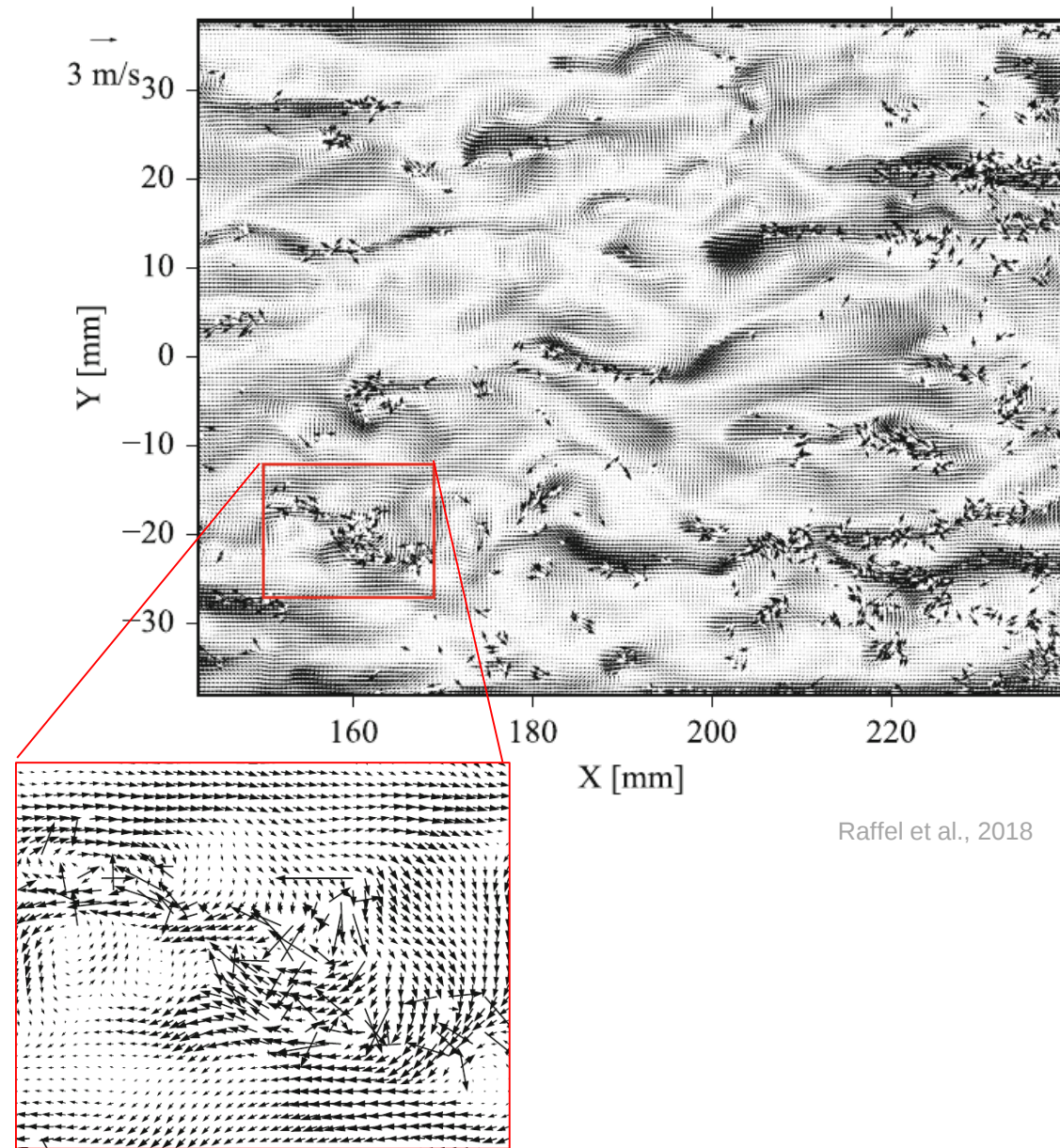


Multi-pass cross-correlation with final fine grid



Pós-processamento

- Técnica PIV otimizada gera cerca de 95% de vetores válidos (resolução espacial vs precisão)
- Algoritmos de interrogação de múltiplos passes e extração de grandezas derivadas exigem eliminação dos vetores espúrios
- Detecção automática de vetores espúrios através de combinação de várias técnicas:
 - Análise global dos deslocamentos
 - Comparação com vizinhos
- Remoção de vetores espúrios ou substituição (interpolação, mediana, 2° pico de correlação, etc.)

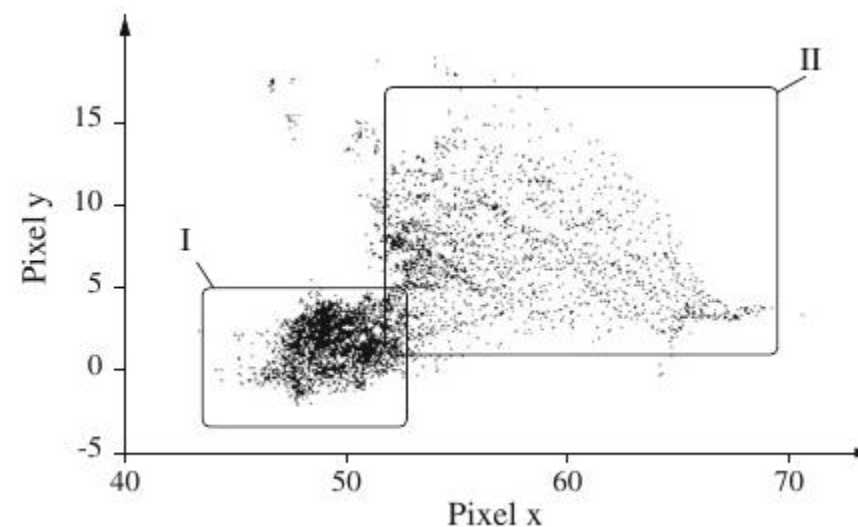
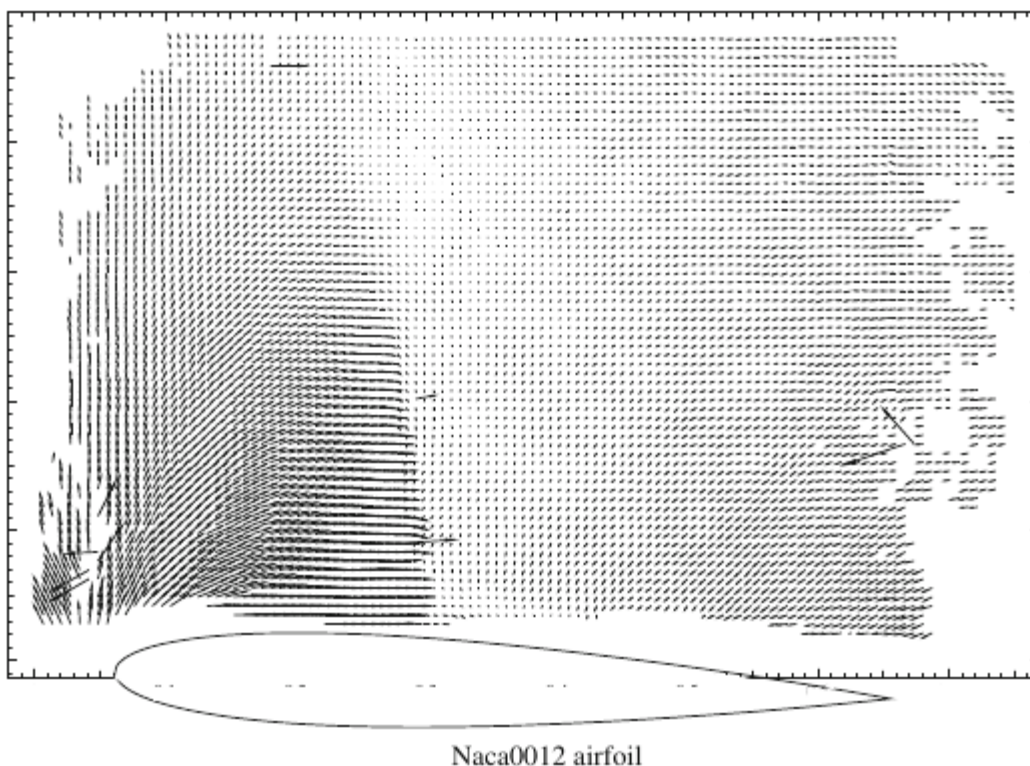


Pós-processamento

Análise global dos deslocamentos:

- Faixa de valores
- Teste Z-score (critério de Chauvenet)
- Regiões no histograma

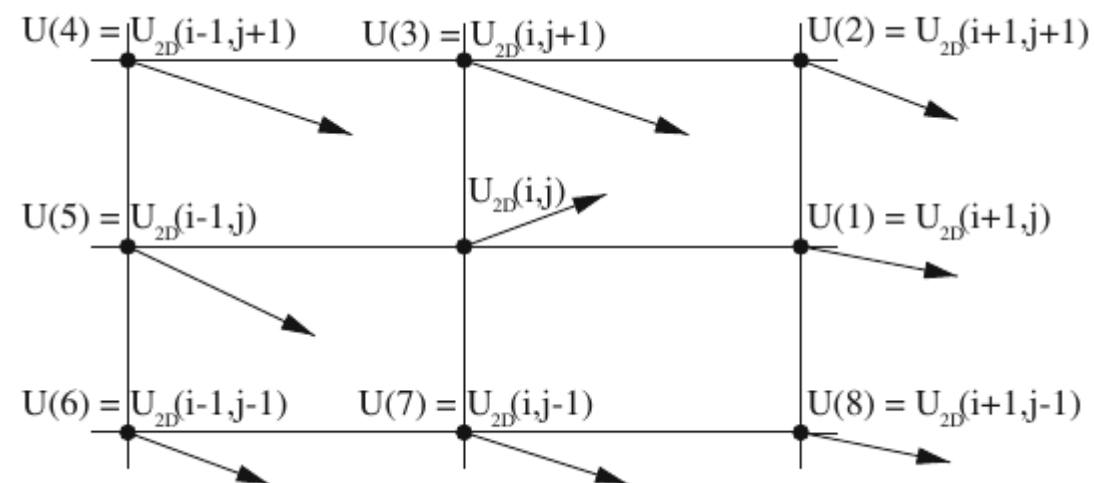
$$\left| \frac{u_i - \mu_U}{\sigma_U} \right| < Z_{\text{thresh}}$$



Análise local dos deslocamentos através da mediana normalizada

- Eficiente, porém com alto custo computacional

$$\frac{|U_{2D}(\text{med}) - U_{2D}(i, j)|}{r_{\text{med}} + \varepsilon_0} < \varepsilon_{\text{thresh}}$$

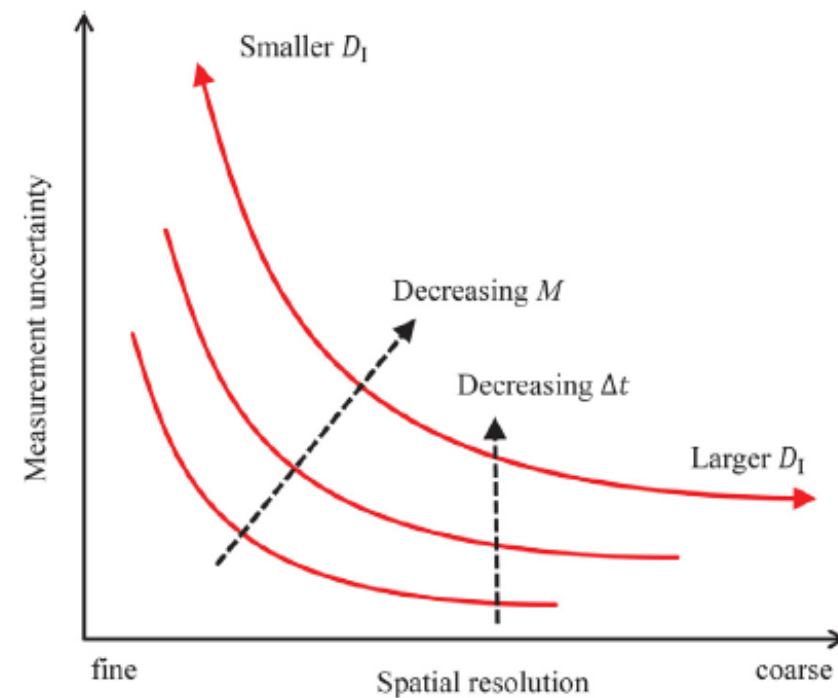


Otimização das medições de PIV

- Filtragem espacial: o movimento é ponderado pela intensidade da imagem da partícula dentro da janela de interrogação e flutuações são suavizadas
- Filtragem temporal: longo intervalo de tempo entre pulsos de luz pode causar erros de bias devido a aceleração do escoamento ou linhas de corrente curvas
- Resolução espacial: tamanho da janela de interrogação (D_I) vs espaçamento dos vetores (sobreposição de janela)
- Faixa espacial dinâmica (*dynamic spatial range*, DSR): tamanho do campo (FOV) / tamanho da janela (~100 para sistema com uma câmera e processamento padrão)
- Faixa de velocidade dinâmica (*dynamic velocity range*, DVR): maior deslocamento (Δx) / incerteza (~ 20–100 para uma medição típica)
- Melhor incerteza de velocidade: ~0.1 pixel (2σ)

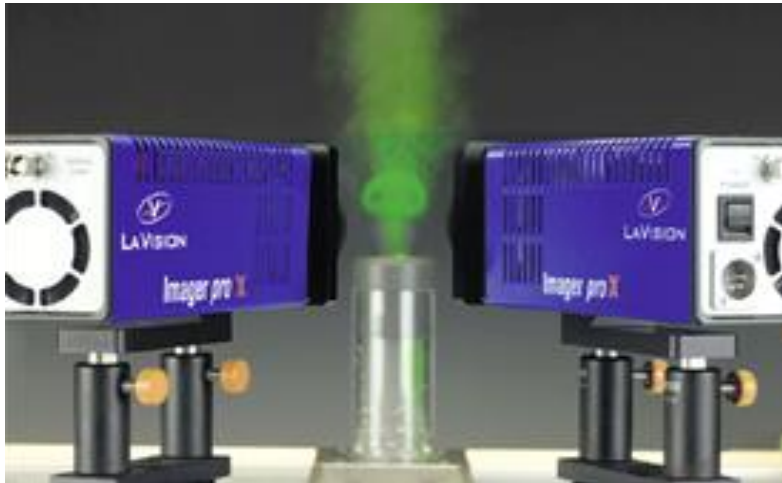
Otimização das medições de PIV

- Diâmetro da imagem da partícula: $d\tau = 2\text{-}3$ pixel
(*peak locking vs peak broadening*)
- Pares de partícula: $N_l > 6$
(resolução espacial vs erro aleatório)
- Deslocamento dentro do plano: $d\tau < \Delta X < 1/4 D_l$
- Gradiente no plano: ΔX variation $< 2/3 d\tau$
- Deslocamento fora do plano: $\Delta Z < 1/4 L$
(espessura do plano de luz L , intervalo de tempo entre pulsos de luz dt , janela de interrogação D_l , offset entre os planos de luz pulsada)
- Particle image signal: $\text{SNR} > 1.7$
(tamanho da partícula, potência da luz, distancia da câmera, optica do sistema)
- Vetores válidos globais: $\sim 95\%$



Raffel et al., 2018
Wilson and Smith, 2013
Scharnowski and Kähler, 2020

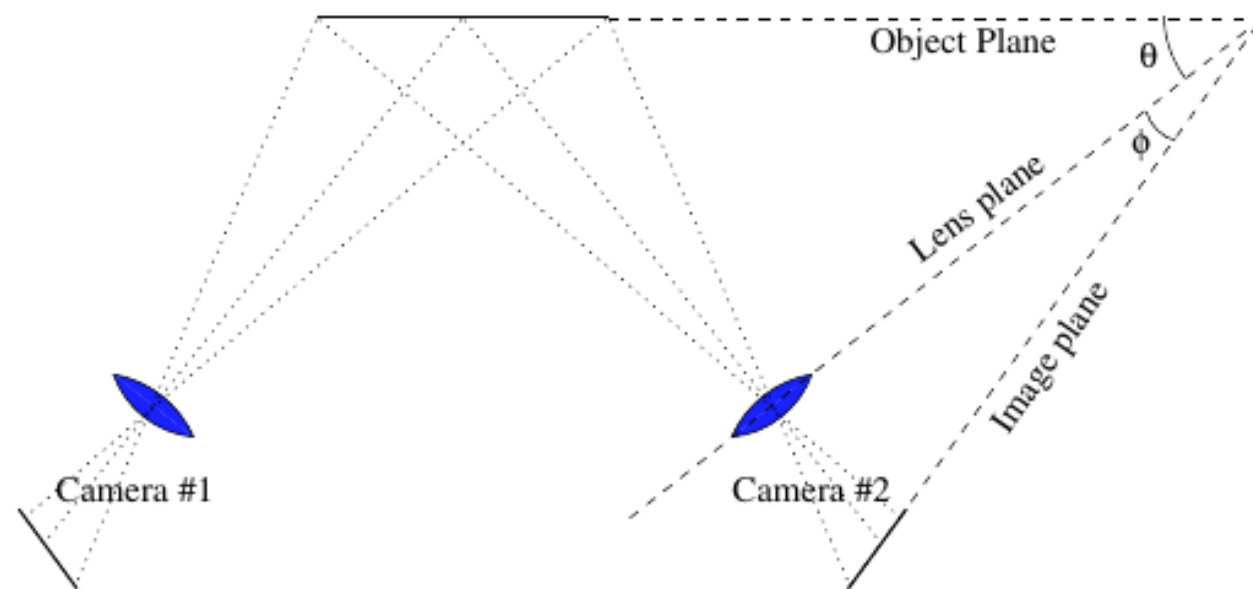
Sistemas de PIV comercial



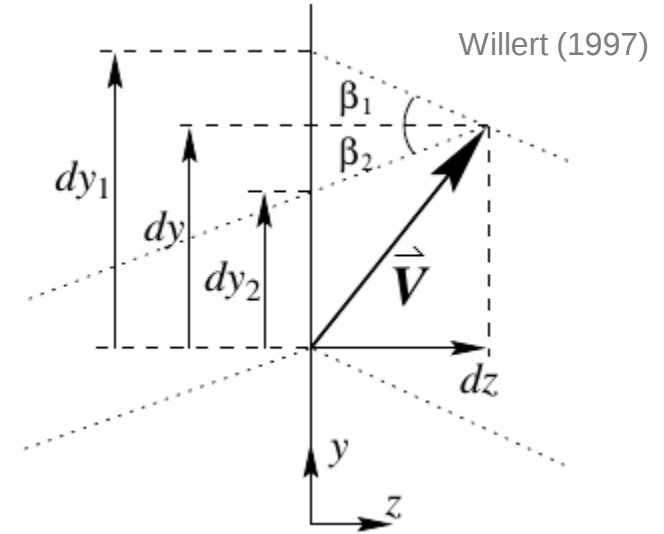
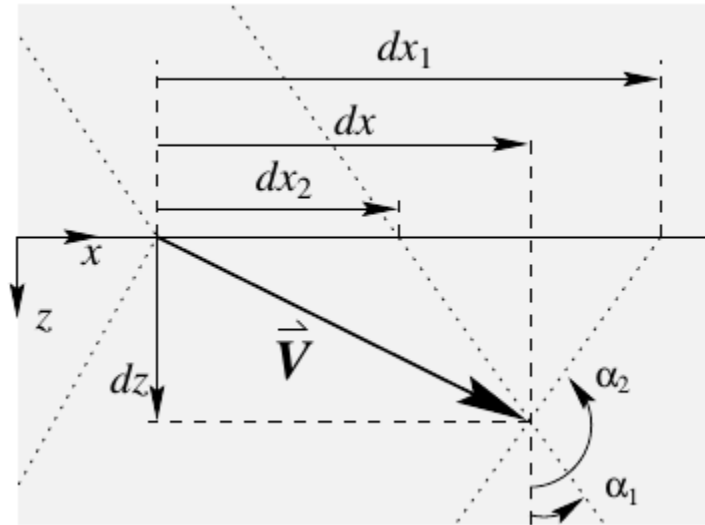
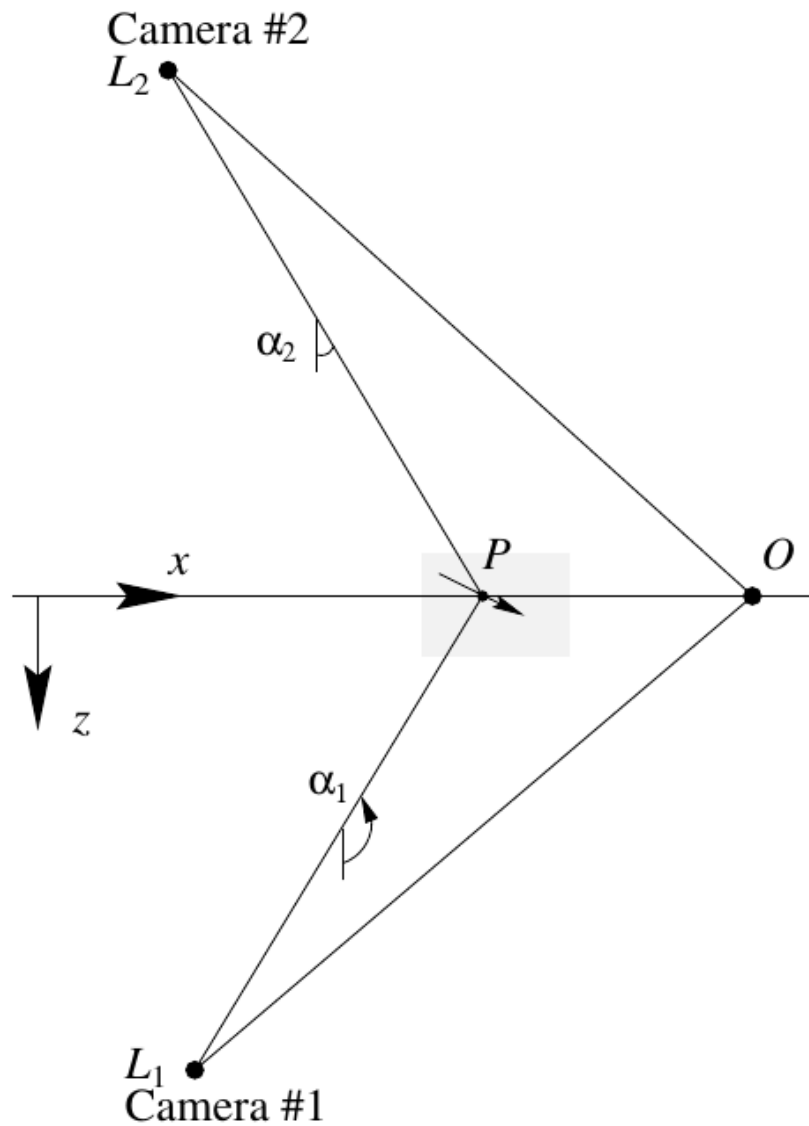
PIV estéreo (*stereoscopic PIV, SPIV*)

- Duas câmeras anguladas para obtenção das três componentes de velocidade no plano (3C-2D)
- Angulação da lente em relação ao sensor da câmera para foco de todo campo de visão (condição de Scheimpflug)
- A distorção óptica de perspectiva é corrigida através de calibração das câmeras
- Arranjo ortogonal entre as câmeras fornece menores incertezas na componente fora do plano

$$\begin{matrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{matrix} \quad \vec{\nabla} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ - & - & - \end{bmatrix}$$



Willert, Meas. Sci. Technol. (1997)



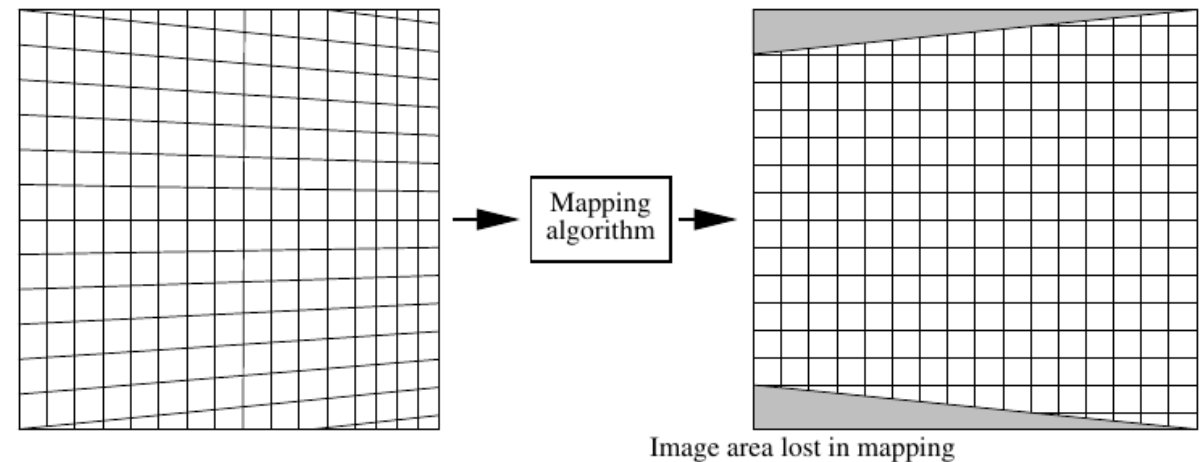
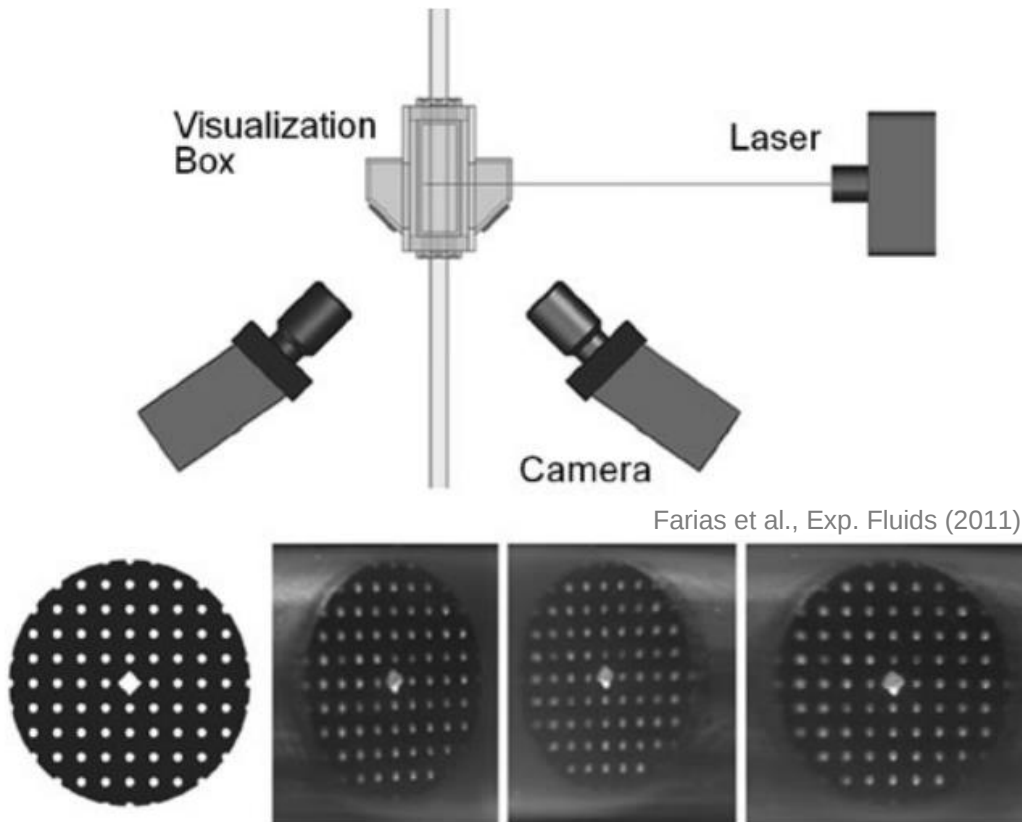
$$dx = \frac{dx_2 \tan \alpha_1 - dx_1 \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$$

$$dy = \frac{dy_1 + dy_2}{2} + \frac{dx_2 - dx_1}{2} \left(\frac{\tan \beta_2 - \tan \beta_1}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \right)$$

$$dz = \frac{dx_2 - dx_1}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$$

PIV estéreo

- Utilização de prismas e caixas de visualização para atenuação das distorções ópticas
- Calibração das câmeras para mapear as coordenadas do mundo para as coordenadas da câmera
 - Modelo *pinhole* (modelo físico baseado na transformação perspectiva)
 - Modelo *pinhole* + distorção de lente (corrige distorções ópticas tipo *pincushion* e *barrel*)
 - Modelo polinomial (mais recomendado na presença de distorções ópticas mais complexas)

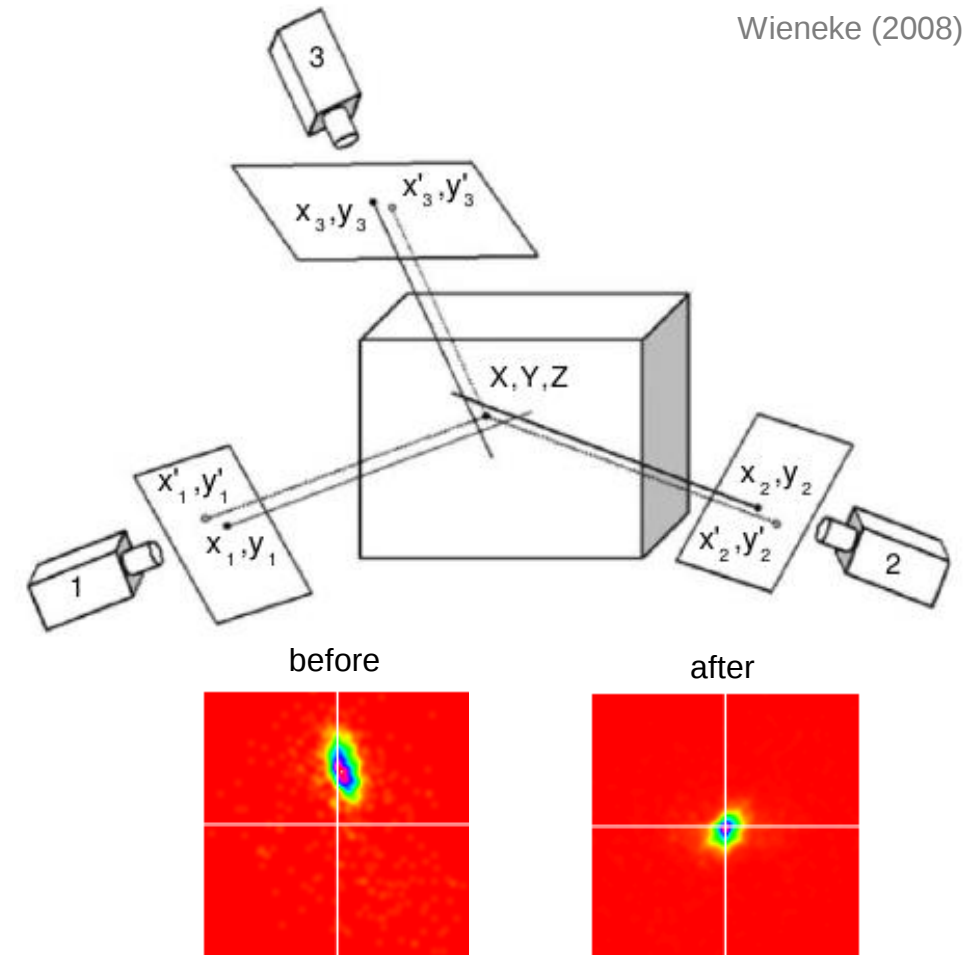


Modelo
polinomial de
3ª ordem

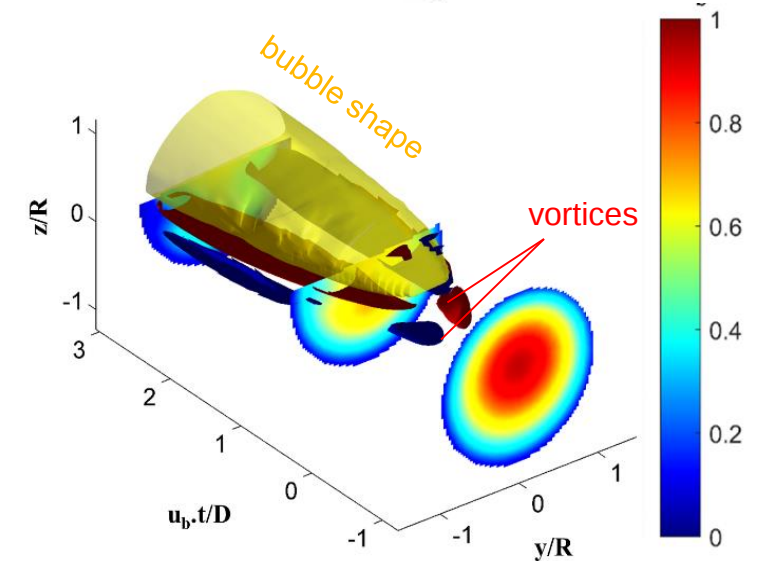
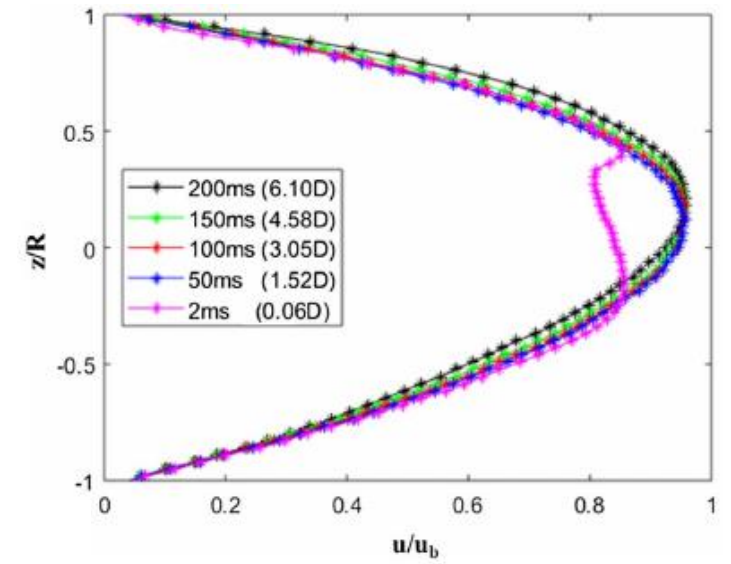
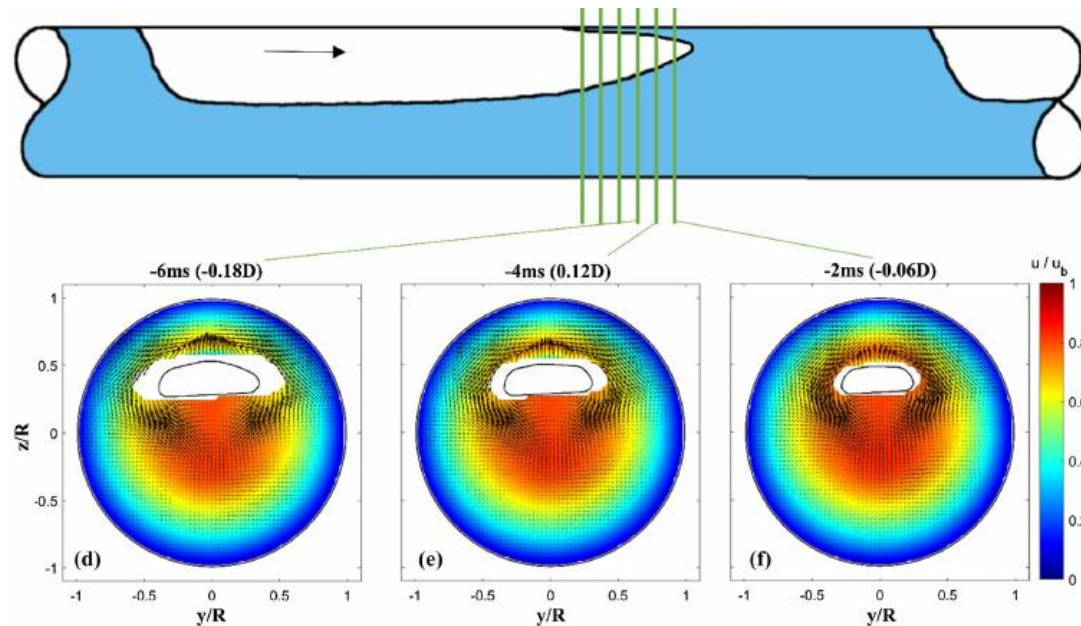
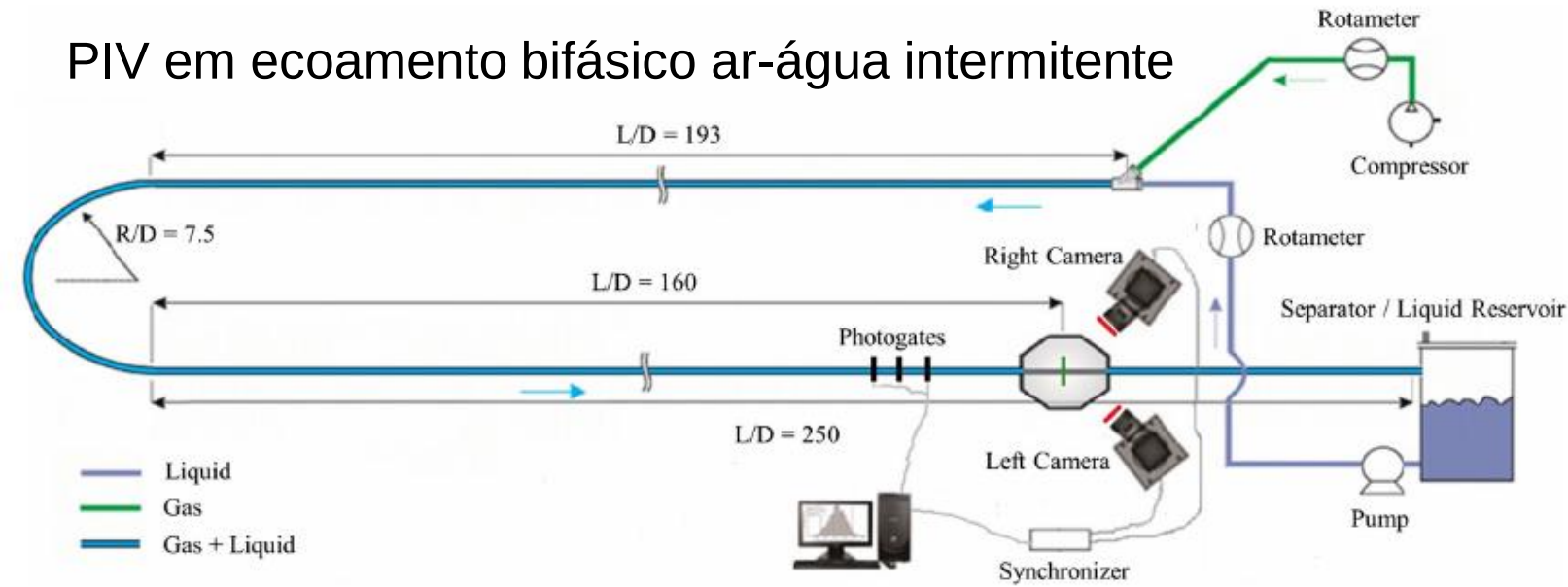
$$\begin{aligned} u_i &= a_0^u + a_1^u x + a_2^u y + a_3^u z + a_4^u x^2 + a_5^u xy + a_6^u y^2 + a_7^u xz \\ &\quad + a_8^u yz + a_9^u z^2 + a_{10}^u x^3 + a_{11}^u x^2 y + a_{12}^u xy^2 + a_{13}^u y^3 \\ &\quad + a_{14}^u x^2 z + a_{15}^u xyz + a_{16}^u y^2 z + a_{17}^u xz^2 + a_{18}^u yz^2 \\ v_i &= a_0^v + a_1^v x + a_2^v y + a_3^v z + a_4^v x^2 + a_5^v xy + a_6^v y^2 + a_7^v xz \\ &\quad + a_8^v yz + a_9^v z^2 + a_{10}^v x^3 + a_{11}^v x^2 y + a_{12}^v xy^2 + a_{13}^v y^3 \\ &\quad + a_{14}^v x^2 z + a_{15}^v xyz + a_{16}^v y^2 z + a_{17}^v xz^2 + a_{18}^v yz^2 \end{aligned}$$

PIV estéreo

- A calibração possui erros devido a imperfeições do alvo de calibração, procedimento de calibração, estabilidade mecânica dos suportes da câmera e lente, variações térmicas, vibrações, etc.
- Erros de calibração podem ser reduzidos através de um procedimento iterativo de *self-calibration*
 1. Medição das posições (u_i, v_i) das partículas mais brilhantes em todas as imagens das câmeras
 2. Determinação das posições 3D prováveis das partículas por triangulação
 3. Divisão do volume iluminado em subvolumes
 4. Mapa de disparidade $\mathbf{d}_i = (u'_i, v'_i) - (u_i, v_i)$ de todas as partículas pareadas contidas no subvolume
 5. Detecção do pico em cada mapa de disparidade que representa o vetor de disparidade mais provável $\mathbf{d}_i(x, y, z)$
 6. Validação do campo vetorial de disparidade 3D-2C com substituição dos vetores espúrios
 7. Correção das funções de mapeamento de todas as câmeras $\Phi'_i(x, y, z) = \Phi_i(x, y, z) - \mathbf{d}_i(x, y, z)$
 8. Repetição de todo o procedimento para melhorias adicionais



PIV em escoamento bifásico ar-água intermitente



Fernandes et al., Exp Fluids (2018)

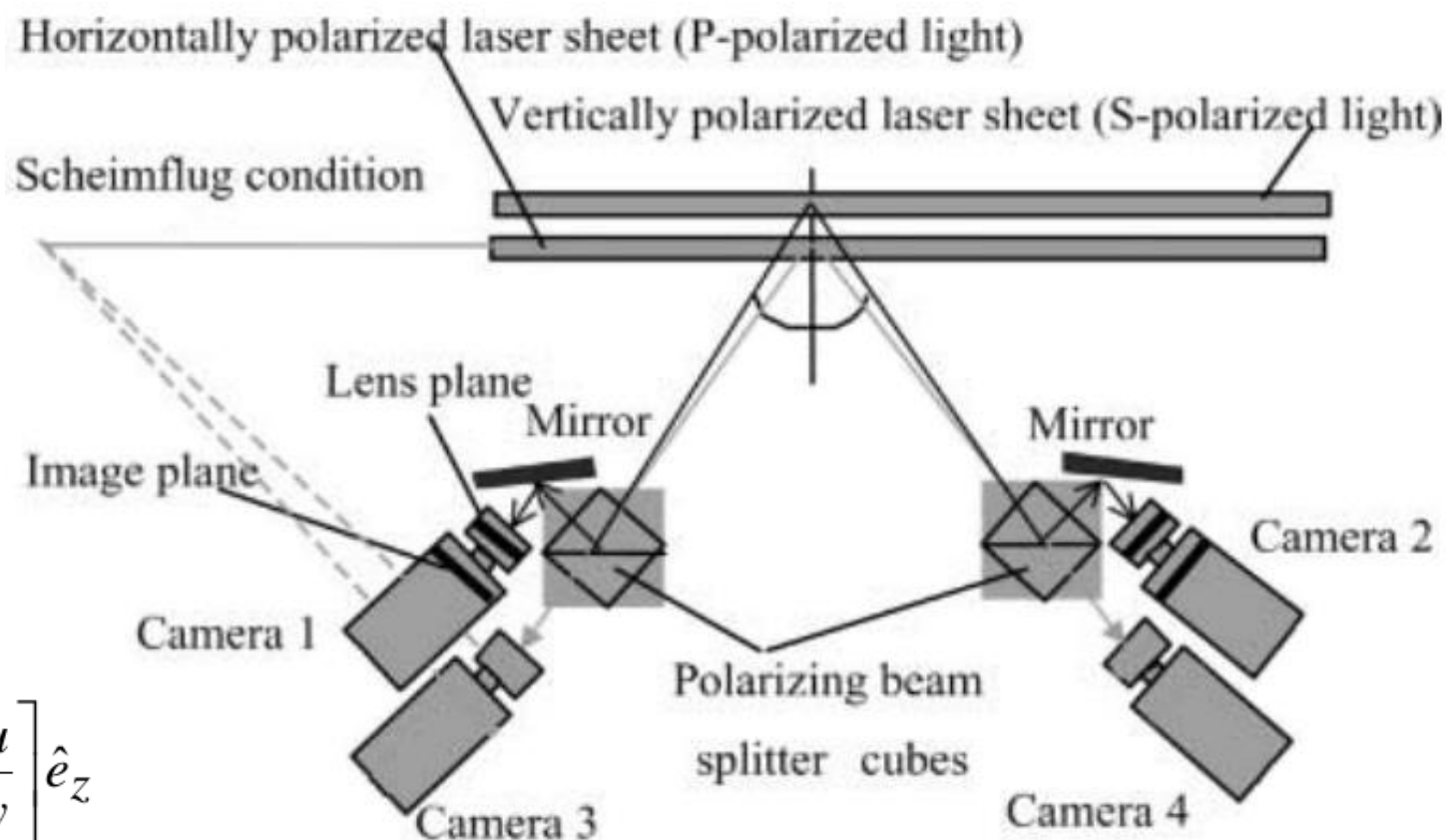
PIV estéreo de dois planos (*dual-plane SPIV*)

Dois SPIV sincronizados usando planos paralelos próximos e com diferente polaridade (2x 3C-2D)

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

em cada plano

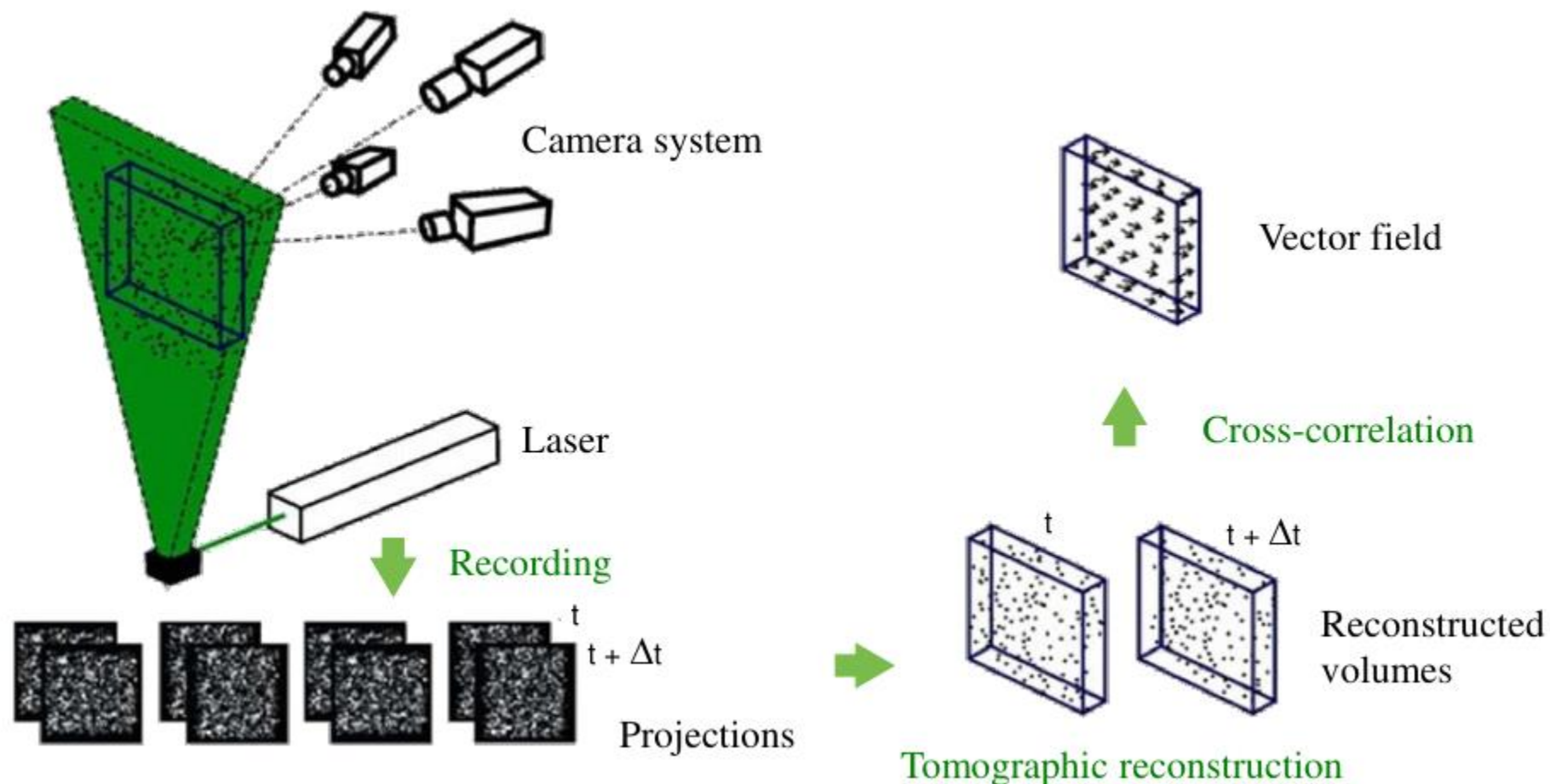
$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \hat{e}_x + \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] \hat{e}_y + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \hat{e}_z$$



Hu et al., Exp. Fluids (2001)

PIV tomográfico (*tomographic PIV*, TPIV)

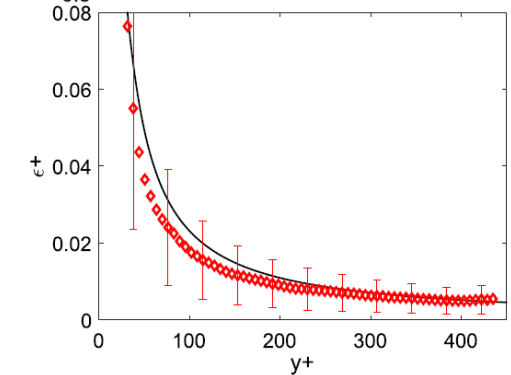
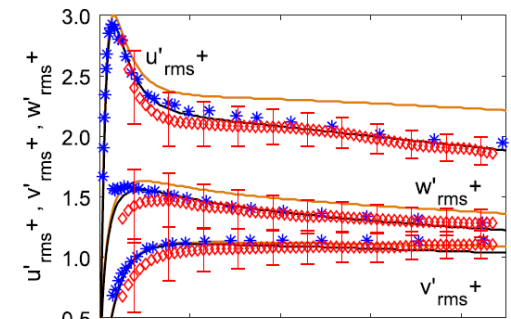
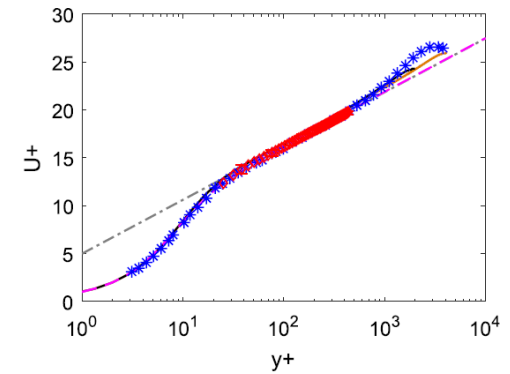
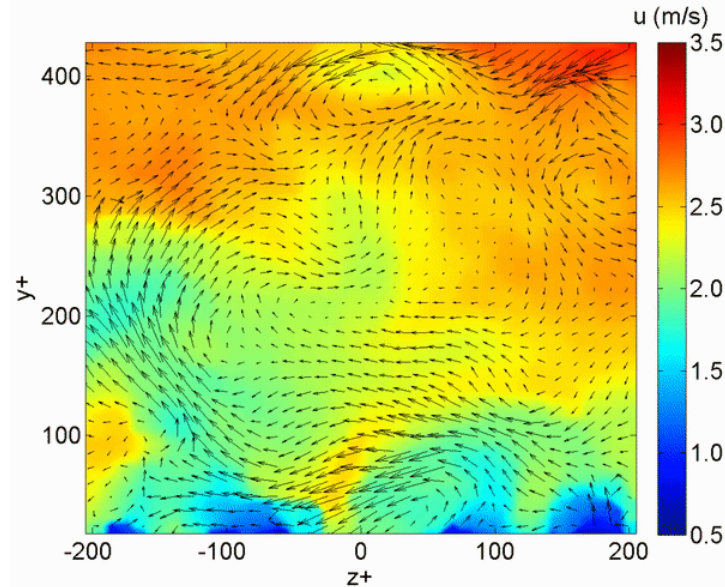
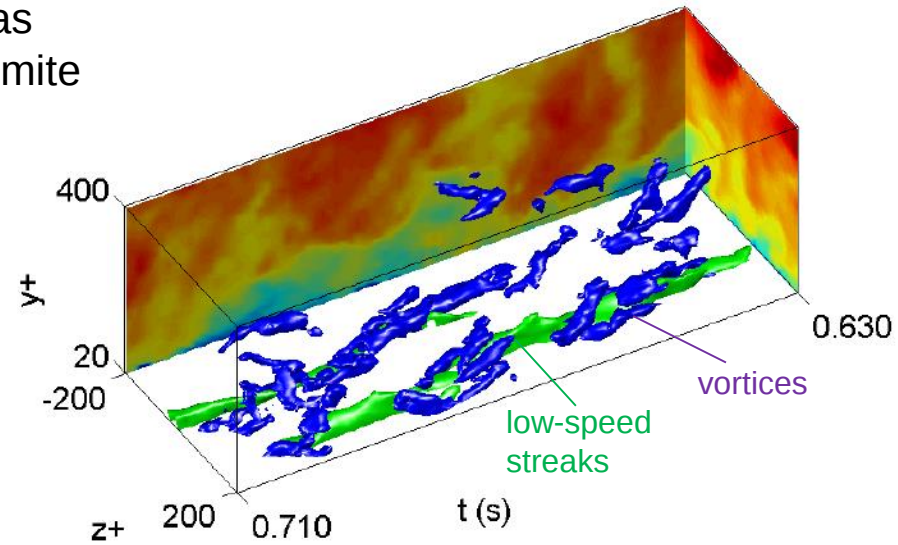
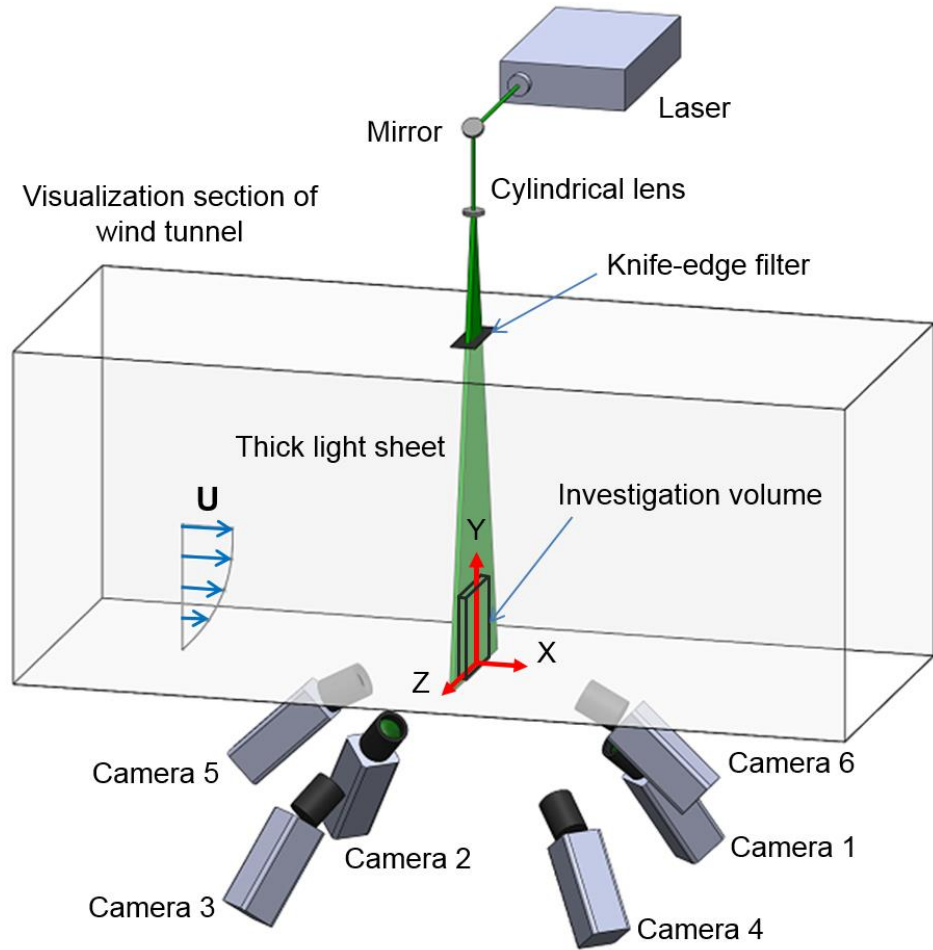
Múltiplas câmeras e algoritmos computacionais sofisticados para obtenção de campos vetoriais instantâneos 3C-3D



Elsinga et al., Exp. Fluids (2006)

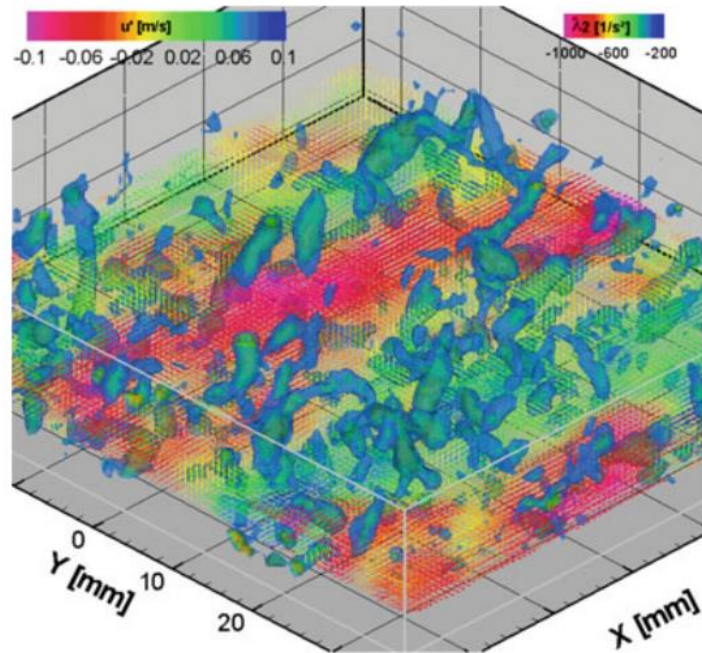
PIV tomográfico

Medição de estatísticas de 1ª e 2ª ordem e estatísticas condicionais em escoamento turbulento de camada limite

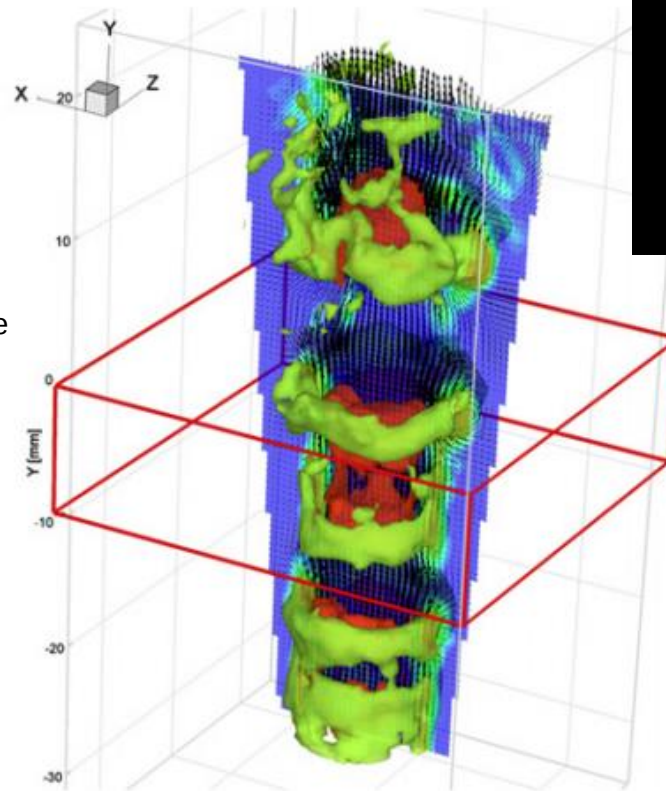


Martins et al., MST (2015)
Martins et al., ETFS (2019)

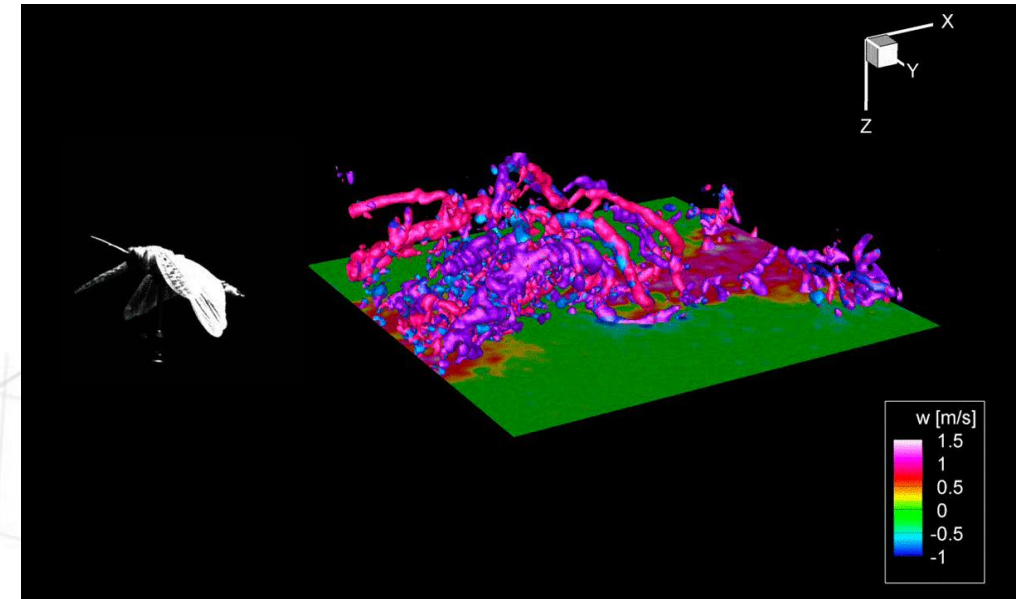
PIV tomográfico



Campo instantâneo tridimensional de velocidade de camada limite turbulenta mostrando vórtices (Schröder et al., Exp. Fluids, 2011)



Campo de velocidades tridimensional do escoamento na saída de um jato em água mostrando evolução dos vórtices em anel (Novara et al., 2010)



Campo tridimensional de velocidade resolvido no tempo em escoamento de esteira de um gafanhoto voando em um túnel de vento a uma velocidade de 3,3 m/s (LaVision)

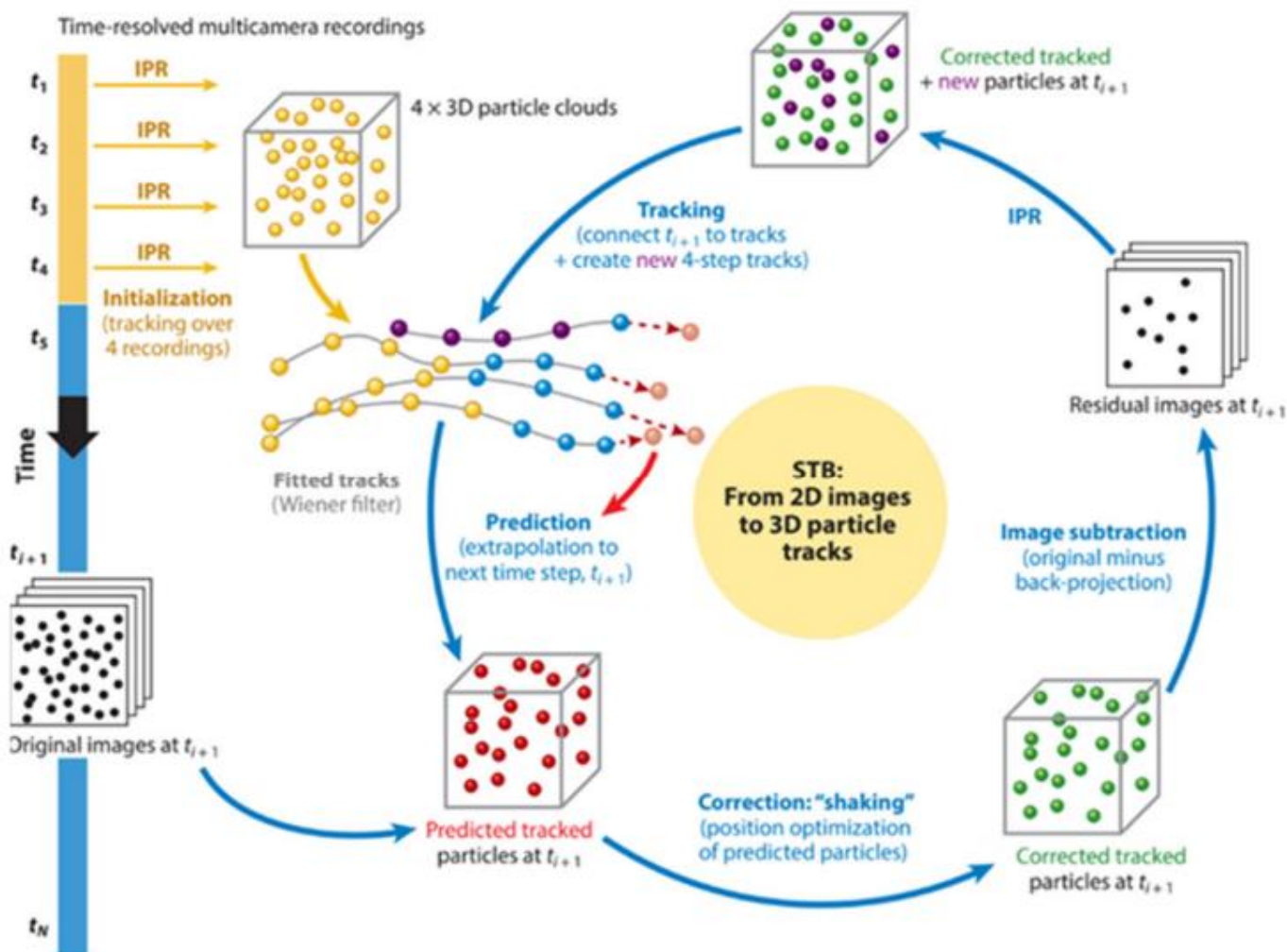
Lagrangian Particle Tracking (LPT)

- Múltiplas câmeras rápidas para obtenção de trajetórias de partículas
- Informação temporal é utilizada para refinar a posição espacial 3D da partícula e prever sua posição no instante seguinte
- Ausência de filtragem espacial, diferentemente do que ocorre na utilização de algoritmos de correlação cruzada ou discretização em voxels
- Praticamente ausência de partículas fantasmas
- Precisão na determinação de velocidade e aceleração
- Tempo computacional e quantidade de dados reduzida (número de partículas vs número de voxels)
- Vetor velocidade para cada partícula ao invés de campos tridimensionais com espaçamento definido (interpolação posterior necessária na maioria dos casos)

Lagrangian Particle Tracking

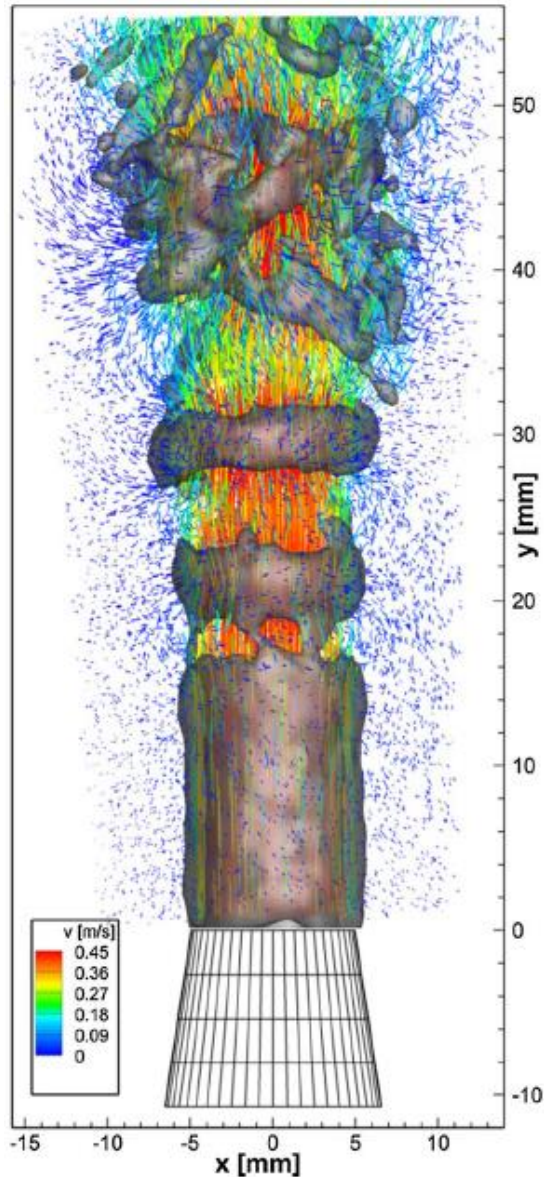
Shake-the-box LPT:

Schanz et al. (2016)

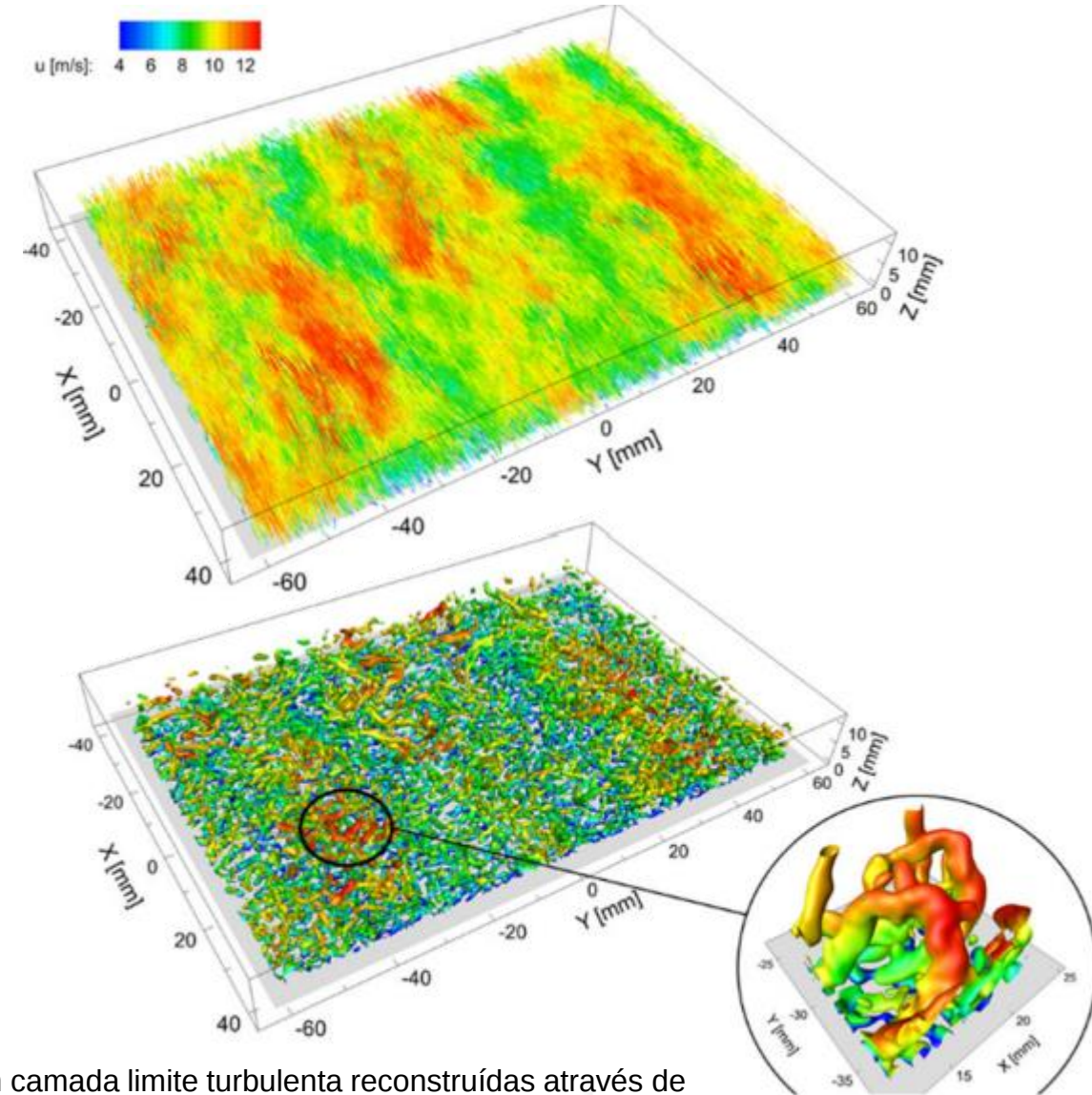


1. Inicialização através de IPR
2. Ajuste das posições das partículas rastreadas nos instantes anteriores (filtro Wiener)
3. Previsão da posição da partícula no instante seguinte
4. As partículas são ligeiramente chacoalhadas ('shaking') até a posição e intensidade corretas, minimizando o erro de previsão
5. Adição de novas partículas (entrando no volume de medição) nas imagens residuais
6. Todas as partículas são novamente chacoalhadas para corrigir erros residuais
7. Remoção de partículas que saem do volume de medição ou com intensidade ficar abaixo de um determinado limite
8. Repetição das etapas 5-7, se necessário
9. Adição de novas trajetórias para as novas partículas identificadas

Lagrangian Particle Tracking (LPT)



Trajetórias de partículas ao longo de 100 interlavos de tempo em um jato em água reconstruídas através de STB-LPT (Schanz et al., 2016)

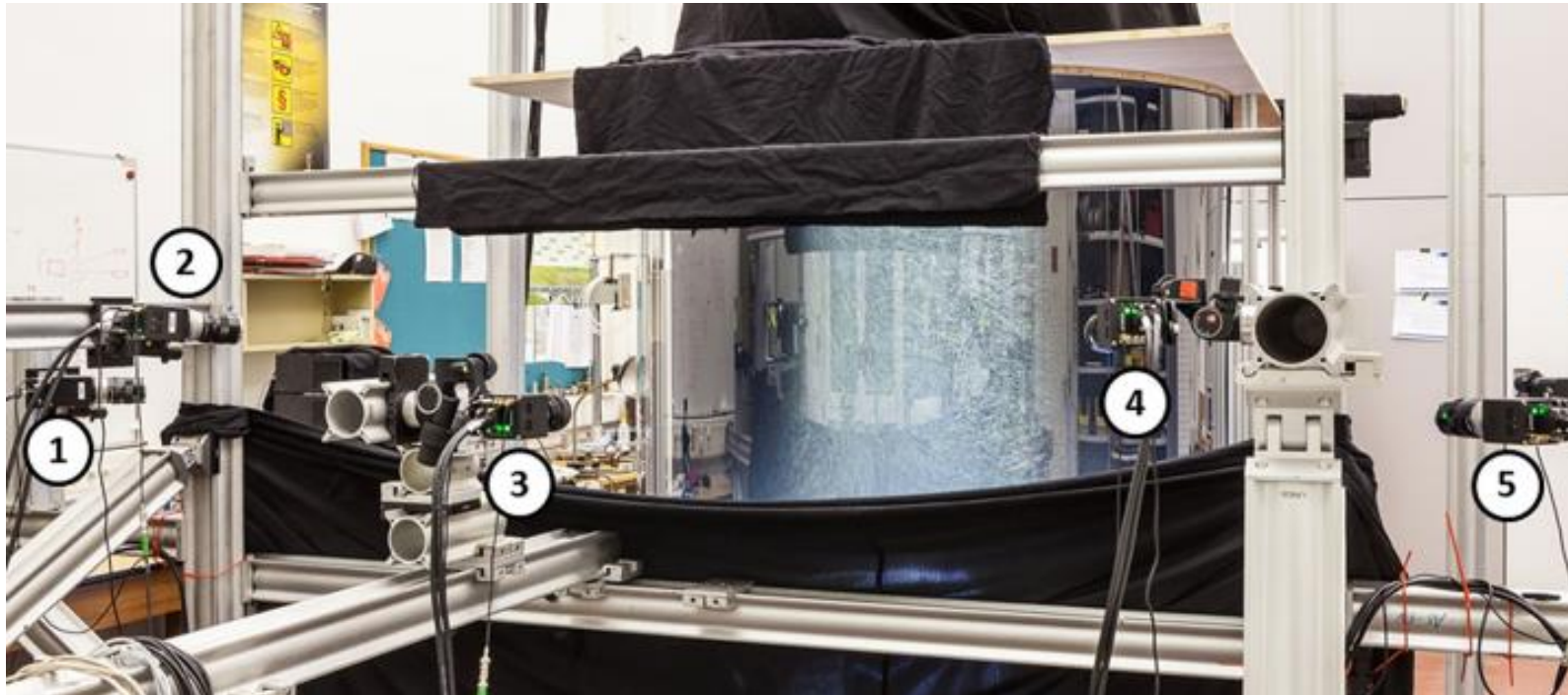
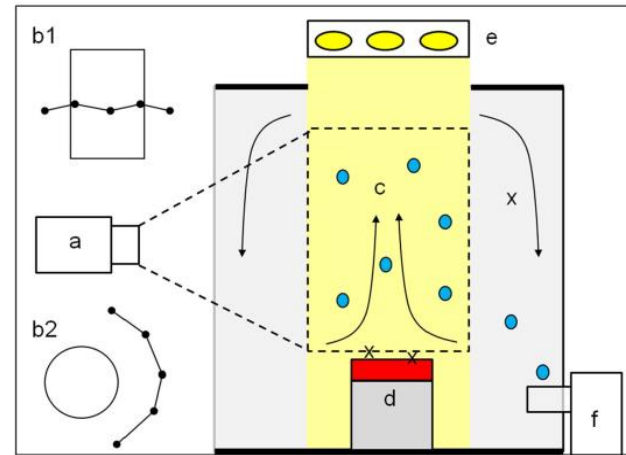


Trajetórias de partículas em camada limite turbulenta reconstruídas através de Multi-pulse-STB-LPT e vórtices visualizados após FlowFit (Novara et al., 2019)

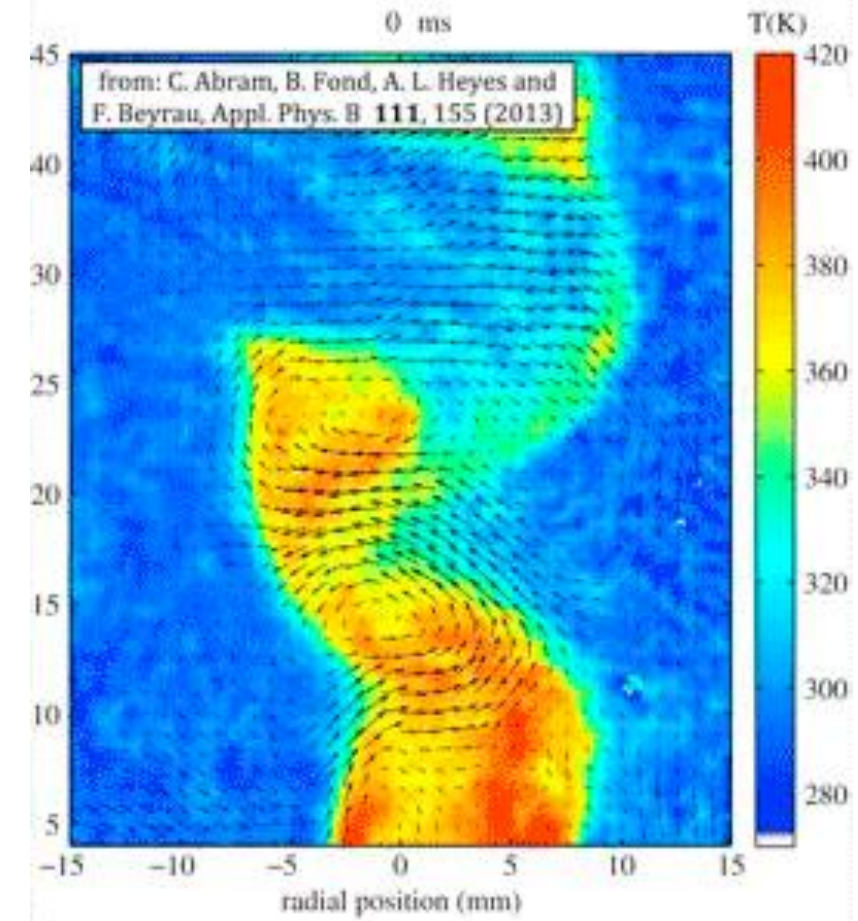
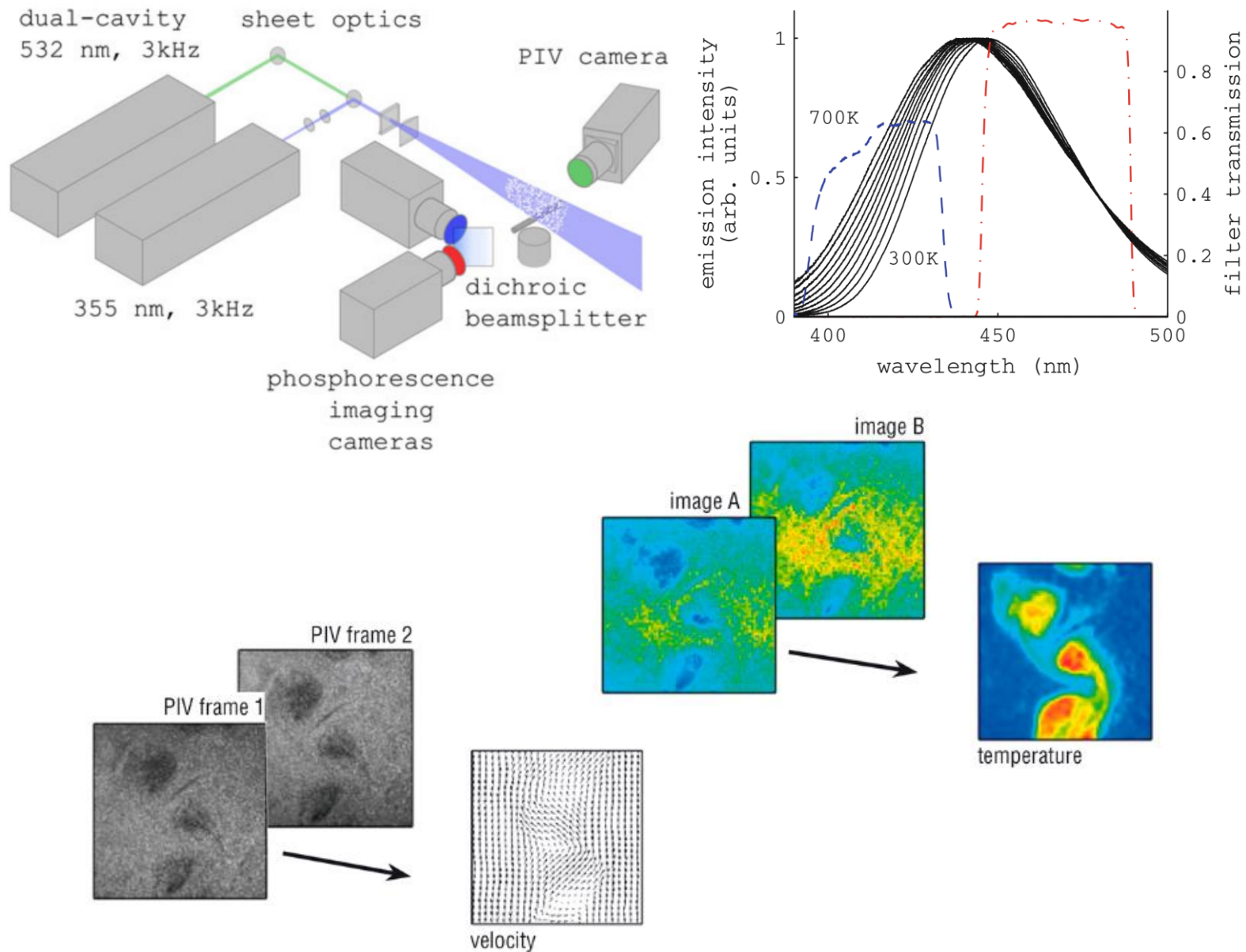
Escoamentos 3D em grande escala e resolvidos no tempo

Pluma térmica medida através de
Lagrangian Particle Tracking ou 4D PTV

Huhn et al., 2017

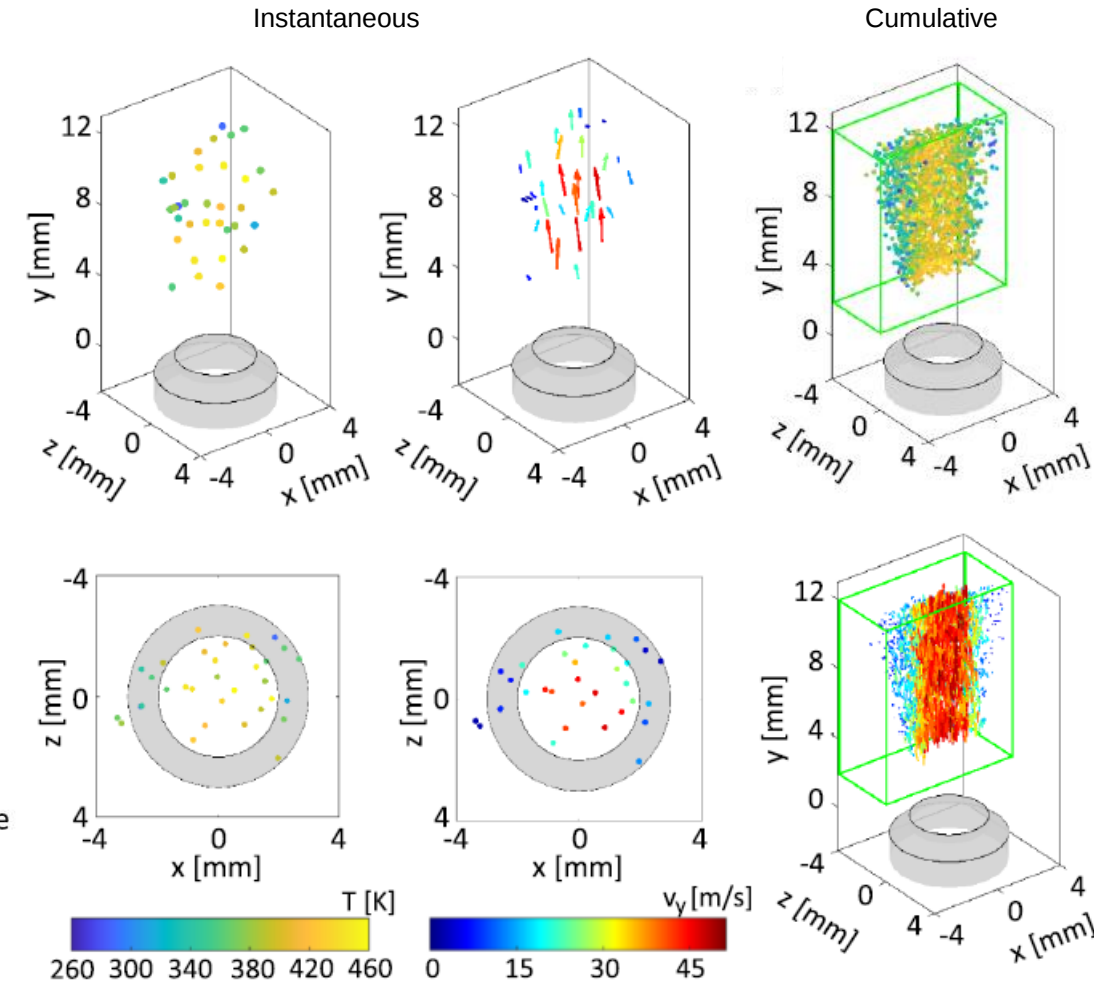
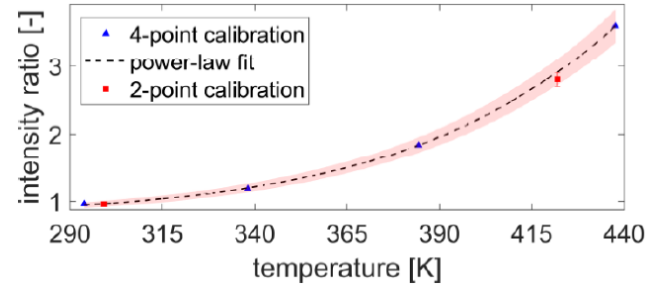
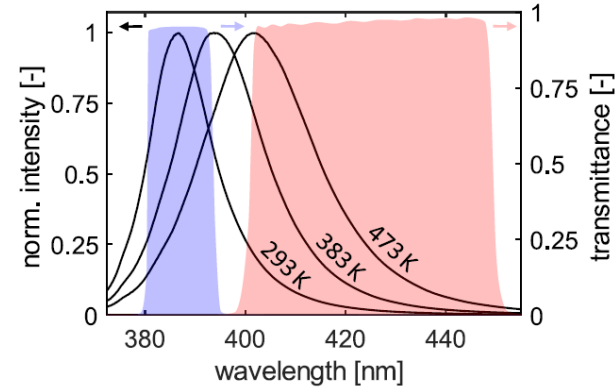


Thermographic particle image velocimetry



Thermographic 3D particle tracking velocimetry

Campos instantâneos 3D de temperatura e velocidade usando partículas sub-micrométricas



Stelter et al., Meas. Sci. Technol. (2023)

Algumas implementações PIV de código aberto

- OpenPIV (<http://www.openpiv.net/>)
- PIVlab (<https://www.pivlab.de/>)
- Particle tracking codes (<https://www.4d-ptv.com/PTV-method/PTV-Code>)

Referências bibliográficas

- Adrian, R.J. (1991). Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. Annual review of fluid mechanics, 23(1), pp.261-304.
- Adrian, R.J., and Westerweel, J. (2011). Particle image velocimetry. Cambridge university press.
- Abrantes, J.K, de Paula, I.B., and Azevedo, L.F.A. (2012). Medição de escoamentos turbulentos utilizando velocimetria por imagem de partículas. EPPT 2012/ABCM, Capítulo 5, pp.133-209.
- Elsinga, G. E., Scarano, F., Wieneke, B., and van Oudheusden, B. W. (2006). Tomographic particle image velocimetry. Experiments in fluids, 41(6), 933-947.
- Raffel, M., Willert, C.E., Scarano, F., Kähler, C.J., Wereley, S.T., and Kompenhans, J. (2018). Particle image velocimetry: a practical guide (3rd edition). Springer.
- Scarano, F. (2012), Tomographic PIV: principles and practice. Measurement Science and Technology 24(1), 012001.
- Schanz, D., Gesemann, S., and Schröder, A. (2016). Shake-The-Box: Lagrangian particle tracking at high particle image densities. Experiments in fluids, 57(5), 1-27.
- Scharnowski, S. and Kähler, C.J. (2020). Particle image velocimetry -Classical operating rules from today's perspective. Optics and Lasers in Engineering, p.106185.
- Willert, C.E., and Gharib, M. (1991). Digital particle image velocimetry. Experiments in fluids, 10(4), pp.181-193.
- Willert, C. (1997). Stereoscopic digital particle image velocimetry for application in wind tunnel flows. Measurement science and technology, 8(12), p.1465.